УДК 514. 76

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНВАРИАНТНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ В ГРУППОИДЕ ЛИ $\Pi^k(B)$

Л. А. Романович
старший преподаватель
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Теория структур высших порядков на гладких многообразиях является одним из важных направлений современной дифференциальной геометрии. Среди них особый интерес вызывают связности. В данной работе продолжается изучение инвариантных связностей в группоиде Ли k-струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия и приводится описание их кривизны и кручения. Исследование проводится методом Эресмана.

Ключевые слова: гладкое многообразие, группоид Ли, алгеброид Ли, инвариантная связность, кривизна, кручение.

Введение

Важным направлением дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях. Ш. Эресман [1] предложил подход к исследованию геометрических структур на гладких многообразиях, основанный на использовании группоидов Ли и *k*-струй гладких отображений. К. Маккензи изложил основы дифференциальной геометрии, используя группоиды Ли и алгеброиды Ли [2]. И. В. Белько осуществил развитие этого метода [3].

Вопросы теории связностей первого и высших порядков являются актуальными в современной дифференциальной геометрии. Основные идеи общей теории связностей восходят к Э. Картану и Ш. Эресману. Связности, введенные Э. Картаном, сейчас называют картановыми связностями. Они определяют картановы геометрии, которые можно рассматривать одновременно как обобщения римановой геометрии и однородных пространств. Актуальность исследования картановых геометрий подтверждается возросшим в последние годы интересом к ним, о чем свидетельствуют статьи Д. В. Алексеевского, П. Михора, Е. Альта, Ш. Франца (см., например, [4], [5]), монографии А. Чапа и Я. Словака [6]. Одним из обобщений понятия линейной связности в векторном расслоении, основанном на использовании группоидов Ли, является связность в группоиде Ли, построенная Ш. Эресманом. Построение связностей высших порядков методом Эресмана приведено в работе Нго ван Кё [7].

В данной работе продолжается [8], [9] изучение связностей высших порядков на гладких многообразиях, согласованных с транзитивным действием группы Ли и исследуются их кривизна и кручение.

Основная часть

Пусть B – гладкое многообразие, (Ω, B) – группоид Ли над B, (Ω^k, B) – продолжение порядка k группоида Ли (Ω, B), (E, p, B) – векторное расслоение, ассоциированное с группоидом Ли , (Ω, B), $(J^k E, p^k, B)$ – продолжение порядка k векторного расслоения (E, p, B), $(Q^k(\Omega)\ \pi, B)$ – расслоение элементов связностей порядка k.

Группоид Ли (Ω^k, B) действует на векторном расслоении $(J^k E, p^k, B)$ [7, с. 170]. Локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z \cdot X = j_x^k \sigma \cdot j_x^k s = j_y^k \left(\left(\sigma (\beta \circ \sigma)^{-1} \right) \cdot s (\beta \circ \sigma)^{-1} \right), \quad (1)$$

где $Z = j_x^k \sigma \in \Omega^k$, $\alpha \circ \sigma = id$, $X = j_x^k s \in J^k E$, $y = \beta \circ \sigma(x)$.

Группоид Ли (Ω^k, B) действует на векторном расслоении $(Q^k(\Omega)\ \pi, B)$ [3, с. 133]. Локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z \cdot Y = j_x^k \sigma \cdot j_x^k f = j_y^k \left(\left(\sigma (\beta \circ \sigma)^{-1} \right) \cdot f (\beta \circ \sigma)^{-1} \cdot \left(\sigma (x)^{-1} \right) \right), \quad (2)$$

где $Y = j_x^k f \in Q_x^k(\Omega)$.

Нго ван Кё каждой связности в группоиде Ли ставит в соответствие морфизм векторных расслоений [7, с. 190]

$$\lambda_k : E \to J^k E, \quad (3)$$

который расщепляет точную последовательность расслоений

$$0 \to J_0^k E \to J^k E \to E \to 0. \quad (4)$$

Пусть G – группа Ли, H – замкнутая подгруппа в G, $B = G/H$ – однородное пространство. Группа Ли G действует на гладком многообразии B:

$$L_g : G \times B \to B : (g, x) \to gx. \quad (5)$$

Группоид Ли k-струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия $\Pi^k(B)$ действует на векторном расслоении $L_g : G \times B \to B : (g, x) \to gx$. Согласно (1) локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z \cdot X = j_x^k \sigma \cdot j_x^k s = j_y^k \left(\left(\sigma (\beta \circ \sigma)^{-1} \right) \cdot s (\beta \circ \sigma)^{-1} \right), \quad (6)$$

где $Z = j_x^k \sigma \in \Pi^k(B)$, $\alpha \circ \sigma = id$, $X = j_x^k s \in J^k TB$, $y = \beta \circ \sigma(x)$.

Пусть $\Omega = \dfrac{G \times G}{H}$, $\Omega^k = J^k\left(\dfrac{G \times G}{H}\right)$. Группоид Ли $\dfrac{G \times G}{H}$ действует на векторном расслоении (TB, p, B), его продолжение $J^k\left(\dfrac{G \times G}{H}\right)$ – подгруппоид Ли группоида Ли $\Pi^k(B)$, действует на векторном расслоении $(J^k TB, p^k, B)$.

Действие группоида Ли $\Pi^k(B)$ на расслоении $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ естественным образом определяет инвариантную связность относительно действия Ω^k:

$$c(y) = Z \cdot c(x), \quad (7)$$

где $Z = j_x^k \sigma \in \Omega^k$, $\alpha \circ \sigma = id$, $y = \beta \circ \sigma(x)$.

Соответствующий этой связности морфизм векторных расслоений $\lambda_k : TB \to J^k TB$ согласован с действиями Ω на TB и Ω^k на $J^k TB$ [8, с. 38].

Покажем, что кривизна и кручение инвариантной связности также обладают аналогичным свойством. Следуя определению кривизны связности в группоиде Ли [2, с. 295], получим, что для морфизма векторных расслоений $\lambda_k : TB \to J^k TB$ кривизна представляет собой следующее отображение:

$$R_{\lambda_k} : \Gamma(TB \wedge TB) \to \Gamma\left(J_0^k TB\right) : (\mu, \eta) \to \lambda_k[\mu, \eta] - [\lambda_k(\mu), \lambda_k(\eta)], \qquad (8)$$

где $\mu, \eta \in \Gamma(TB)$.

Теорема 1. Кривизна инвариантной связности согласована с действием группоида Ли Ω на TB и его продолжения Ω^k на $J^k TB$.

Доказательство.

Пусть $c : B \to Q^k(\Omega)$ – инвариантная связность порядка *k* в группоиде Ли (Ω, B). Тогда для расщепления $\lambda_k : TB \to J^k TB$ также выполняется условие инвариантности [9, с. 38]

$$\lambda_k(\sigma(x) \cdot \mu(x)) = j_x^k \sigma \cdot \lambda_k(\mu(x)). \qquad (9)$$

Проверим инвариантность скобки относительно действия продолженного группоида Ли Ω^k на расслоении $J^k TB$. Из (1) и определения скобки в $J^k TB$ получим (10):

$$j_x^k \sigma \cdot \left[j_x^k \mu, j_x^k \eta\right] = j_y^{k-1}\left(\sigma(\beta \circ \sigma)^{-1} \cdot \left[\mu(\beta \circ \sigma)^{-1}, \mu(\beta \circ \sigma)^{-1}\right]\right). \qquad (10)$$

Из согласованности скобки с дифференциалом отображения левых сдвигов (5) получим (11) и (12):

$$j_y^{k-1}\left(\sigma(\beta \circ \sigma)^{-1} \cdot \left[\mu(\beta \circ \sigma)^{-1}, \mu(\beta \circ \sigma)^{-1}\right]\right) = j_y^{k-1}\left[\sigma\mu(\beta \circ \sigma)^{-1}, \sigma\eta(\beta \circ \sigma)^{-1}\right] \qquad (11)$$

$$j_y^{k-1}\left[\sigma\mu(\beta \circ \sigma)^{-1}, \sigma\eta(\beta \circ \sigma)^{-1}\right] = \left[j_y^k(\sigma\mu), j_y^k(\sigma\eta)\right] = \left[\sigma j_x^k \mu, \sigma j_x^k \eta\right]. \qquad (12)$$

Из (10), (11), (12) следует инвариантность скобки относительно действия продолженного группоида Ли Ω^k на расслоении $J^k TB$.

Проверим далее инвариантность кривизны R_{λ_k} относительно действия продолженного группоида Ли. Из (8) и линейности действия Ω^k на $J^k TB$ получим (13) и (14):

$$j_x^k \sigma \cdot R_{\lambda_k}(\mu, \eta) = j_x^k \sigma \cdot \left(\lambda_k[\mu(x), \eta(x)] - [\lambda_k(\mu(x)), \lambda_k(\eta(x))]\right), \qquad (13)$$

$$j_x^k \sigma \cdot \left(\lambda_k[\mu(x), \eta(x)] - [\lambda_k(\mu(x)), \lambda_k(\eta(x))]\right) = \lambda_k(\sigma(x) \cdot [\mu(x), \eta(x)]) - [\lambda_k(\sigma\mu(x)), \lambda_k(\sigma\eta(x))]. \qquad (14)$$

Из (13) и (14) следует

$$j_x^k \sigma \cdot R_{\lambda_k}(\mu, \eta) = R_{\lambda_k}(\sigma\mu, \sigma\eta). \qquad (15)$$

Теорема доказана.

Следуя определению кручения связности в группоиде Ли [7, с. 199], получим, что для морфизма векторных расслоений $\lambda_k : TB \to J^k TB$ кручение представляет собой следующее отображение:

$$\begin{gathered} T_{\lambda_k} : \Gamma(TB \wedge TB) \to \Gamma(J^{k-1}TB) : (\mu, \eta) \to \\ D_\mu(\lambda_k(\eta)) - D_\eta(\lambda_k(\mu)) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\mu), \lambda_k(\eta)]) \end{gathered}, \tag{16}$$

где $\mu, \eta \in \Gamma(TB)$, D – дифференциальный оператор Спенсера D [10, с. 54]

В терминах оператора $\nabla_k = D \circ \lambda_k$ (17) имеет вид (18):

$$T_{\lambda_k}(\mu, \eta) = \nabla_{k\mu}(\eta) - \nabla_{k\eta}(\mu) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\mu)\ \lambda_k(\eta)]). \tag{17}$$

Теорема 2. Кручение инвариантной связности согласовано с действием группоида Ли Ω на TB и его продолжения Ω^k на $J^k TB$.

Доказательство.

Пусть $c : B \to Q^k(\Omega)$ – инвариантная связность порядка k в группоиде Ли (Ω, B) и пусть $\lambda_k : TB \to J^k TB$ – соответствующий этой связности морфизм векторных расслоений. Проверим инвариантность кручения T_{λ_k} относительно действия продолженного группоида Ли. Из (17) получим (18):

$$T_{\lambda_k}(\mu, \eta) = \nabla_{k\mu}(\eta) - \nabla_{k\eta}(\mu) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\mu), \lambda_k(\eta)]). \tag{18}$$

Из согласованности оператора Спенсера с действием Ω^k на $J^k TB$ получим (19)

$$D_\mu(\lambda_k(\sigma\eta)) - D_\eta(\lambda_k(\sigma\mu)) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\sigma\mu), \lambda_k(\sigma\eta)]) = T_{\lambda_k}(\sigma\mu, \sigma\eta). \tag{19}$$

Из (18) и (19) следует (20):

$$j_x^k \sigma \cdot T_{\lambda_k}(\mu, \eta) = T_{\lambda_k}(\sigma\mu, \sigma\eta). \tag{20}$$

В терминах дифференциального оператора ∇_k инвариантность кручения T_{λ_k} относительно действия продолженного группоида Ли следует из (21) и (22):

$$j_x^k \sigma \cdot T_{\lambda_k}(\mu, \eta) = j_x^k \sigma \cdot (\nabla_{k\mu}(\eta)) - \nabla_{k\eta}(\mu) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\mu), \lambda_k(\eta)]), \tag{21}$$

$$(\nabla_{k\sigma\mu}(\sigma\eta)) - \nabla_{k\sigma\eta}(\sigma\mu) - \rho_{k-1}([\lambda_k(\sigma\mu), \lambda_k(\sigma\eta)]) = T_{\lambda_k}(\sigma\mu, \sigma\eta). \tag{22}$$

Теорема доказана.

В качестве примера приведем описание кривизны инвариантных связностей первого и второго порядков на двумерной сфере

$$S^2 = \left\{(x^1, x^2, x^3) \in R^3 \middle| (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\right\}. \tag{23}$$

Как известно, данное многообразие является однородным пространством

$$S^2 \approx {}^{O(3)}\!\big/_{O(2)}, \tag{24}$$

на котором действует группа ортогональных матриц третьего порядка $O(3)$:

$$O(3)\times S^2 \to S^2 : \left(\sigma_i^j, x^j\right) \to \sigma_i^j x^j . \tag{25}$$

Локальная запись условий инвариантности морфизмов (3) использована для вычисления функций Γ^n_{kj} и Γ^n_{klj} инвариантных связностей на S^2 [9, с. 39]. Для локального описания функций кривизны инвариантных связностей на S^2 относительно действия (25) воспользуемся локальной записью морфизмов (8).

Функции кривизны инвариантной связности первого порядка могут быть найдены из условий (26):

$$R^t_{ij,k} = \Gamma^n_{kj}\cdot\Gamma^t_{ni} - \Gamma^n_{ki}\cdot\Gamma^t_{nj} + \frac{\partial\Gamma^t_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial\Gamma^t_{ki}}{\partial x^j}, \tag{26}$$

где Γ^n_{kj} – функции инвариантной связности первого порядка на S^2 относительно локальной карты (U_1,φ_1) [9, с. 39].

Функции кривизны инвариантной связности первого порядка на S^2 относительно локальной карты (U_1,φ_1) имеют вид (27.1) – (27.4):

$$R^1_{11,1}(x) = R^1_{11,2}(x) = R^2_{11,1}(x) = R^2_{11,2}(x) = 0 \tag{27.1}$$

$$R^1_{12,1}(x) = 2\frac{x^1x^2}{\rho^2},\ R^1_{12,2}(x) = \frac{1-\left(x^1\right)^2}{\rho^2} \tag{27.2}$$

$$R^2_{12,1}(x) = \frac{1-\left(x^2\right)^2}{\rho^2},\ R^2_{12,1}(x) = -2\frac{x^1x^2}{\rho^2} \tag{27.3}$$

$$R^2_{11,1}(x) = R^2_{11,2}(x) = R^2_{22,1}(x) = R^2_{22,2}(x) = 0, \tag{27.4}$$

где $\rho = \sqrt{1-\left(x^1\right)^2-\left(x^2\right)^2}$.

Заключение

В последнее время возрос интерес к исследованию картановых геометрий. В работе продолжено изучение инвариантных связностей в группоиде Ли k-струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия $B = G/H$ и приведено описание их геометрических характеристик – кривизны и кручения. В качестве примера приведено описание кривизны инвариантных связностей первого и второго порядков на двумерной сфере.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Ehresmann, C.*** Introduktion a la theorie des structures infinitesimales et des pseudo-groupes de Lie / C. Ehresmann // Colloq. Geometr. Differ., Strastbourgs. – 1953. – P. 97–100.
2. ***Mackenzie, K***. Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometrie / K. Mackenzie. – Cambridge : Universitu Press, 1987. – 327p.
3. ***Белько, И. В.*** Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии / И. В. Белько. – Москва : Издательство УРСС, 2004. – 208 с.
4. ***Alekseevsky, D. V.*** Tanaka structures (non Holonomic *G*-structures) and Cartan connections / Dmitri V. Alekseevsky, Lianna David // Joornal of Geometry and Phusics. – 2015. – V. 91. – P. 88–100.

5. ***Michor, P.*** Tensor fields an connections on holomorphic orbit spaces of finits groups / A. Kriegl, M. Losik, P. Michor // Journal of Lie Theorie. – 2003. – № 13(2). – P. 519–534
6. ***Cap, A.*** Parabolic Geometrie I: Backgroup and General Theory / A. Cap, J. Slovak // AMS : Publishing House, 2009. – 628 p.
7. ***Ngo van Que***. Du prolongement des espaces fibres et des struktures infinitesimales / Ngo van Que // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1967. – T. 17, N 1. – P. 159–223.
8. ***Рамановіч, Л. А.*** Інварыянтныя звязнасці ў групоідах Лі / Л. А. Рамановіч // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. – 1998. – № 3. – С. 117–121.
9. ***Романович, Л. А.*** Инвариантные связности в группоиде Ли $\Pi^k(B)$ / Л. А. Романович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. – 2018. – № 1(51). – С. 35–41.
10. ***Пале, Р***. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе / Р. Пале. – Москва : Мир, 1970. – 359 с.

Поступила в редакцию 02.01.2019 г.
Контакты: L_ramanovich@mail.ru (Романович Людмила Александровна)

Romanovich L. GEOMETRIC PROPERTIES OF INVARIANT CONNECTIONS IN LIE GROUPOID $\Pi^k(B)$.

The article follows up on the research of invariant connections between the Lie groupoid k-jets of local dıffeomorphisms of smooth manıfold and provides a description of their curvature and torsion. Ehresmann's method is used in the research.

Keywords: smooth manifold, Lie groupoid, Lie algebroid, invariant connection, curvature, torsion.