УДК 517.927.4

ДВУСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНО ВОЗМУЩЕННОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

В. Н. Лаптинский
доктор физико-математических наук, профессор
Институт технологии металлов НАН Беларуси
И. И. Маковецкий
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусско-Российский университет, г. Могилев

Получены достаточные конструктивные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова с параметром. Разработан итерационный алгоритм построения решения.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, двухточечная краевая задача, однозначная разрешимость, построение решения

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F_0(t,X) + \lambda F_1(t,X),\ X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

где $A, B \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F_i\ (i = 0,1) \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0, \omega]$, $D_{\tilde\rho} = \{(t,X): t \in I, \|X\| < \tilde\rho\}$, $F_i(t,X)$. Предположим, что функции $F_i(t,X)$ удовлетворяют в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F_i(t,0) \not\equiv 0$.

В конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \|X(t)\|$ будем исследовать двухточечную краевую задачу для (1) с условием

$$MX(0,\lambda) + NX(\omega,\lambda) = 0, \tag{2}$$

где $\|\bullet\|$ – подходящая норма матриц в рамках определения этой алгебры, например, любая из норм, приведенных в [1, с. 21], M, N – вещественные $(n \times n)$-матрицы.

Данная работа является продолжением и развитием [2, 3 (см. также [4, § 1.1])]. С помощью метода [5] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), алгоритм построения решения, а также оценка его области локализации.

Введем следующие обозначения:
$D_\rho = \{(t,X): t \in I, \|X\| \le \rho\}$, $\lambda_1 = \max_t \|U(t)\|$, $\lambda_2 = \max_t \|U^{-1}(t)\|$, $\mu_1 = \max_t \|V(t)\|$, $\mu_2 = \max_t \|V^{-1}(t)\|$, $P = U^{-1}(\omega) N^{-1} M$, $Q = -V(\omega)$, $\gamma = \|\Phi^{-1}\|$, $m = \max\{\|P\|, \|Q\|\}$,

$h_i = \max\limits_t \left\| F_i(t,0) \right\|$, $q = \gamma\lambda_0\mu_0 m\omega L$, $p = \gamma\lambda_0\mu_0 m\omega h$, $F(t,X,\lambda) = F_0(t,X) + \lambda F_1(t,X)$, $L = L_0 + \varepsilon L_1$, $h = h_0 + \varepsilon h_1$, $\varepsilon = |\lambda|$,

где $t \in I$, $0 < \rho < \tilde{\rho}$, $\lambda_0 = \lambda_1\lambda_2$, $\mu_0 = \mu_1\mu_0$, Φ – линейный оператор, $\Phi X = PX - XQ$, $L_i = L_i(\rho) > 0$ – постоянные Липшица для $F_i(t,X)$ в D_ρ.

Лемма. *Пусть выполнены условия:*

1) $\det N \neq 0$;
2) матрицы P, Q не имеют общих характеристических чисел;
3) $q < 1$;
4) $p/(1-q) \le \rho$.

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_C \le p/(1-q)$.

Доказательство. Сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2). Пусть $X = X(t,\lambda)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t) = U(t)X(0)V(t) + U(t)\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)\,d\tau V(t), \qquad (3)$$

где $U(t), V(t)$ – соответственно решения уравнений

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U, \quad \frac{dV}{dt} = VB(t),$$

при этом $U(0) = V(0) = E$ – единичная матрица; для компактности изложения формул вместо $X(t,\lambda)$ принимаем $X(t)$.

Из (3) имеем

$$X(0) = U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - \int_0^t U^{-1}F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)\,d\tau, \qquad (4)$$

$$X(\omega) = U(\omega)U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) +$$
$$+U(\omega)\int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)\,d\tau V(\omega). \qquad (5)$$

Подставляя (4), (5) в левую часть условия (2), получим

$$MX(0) + NX(\omega) = MU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) - M\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)\,d\tau +$$
$$+NU(\omega)U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) + NU(\omega)\int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)\,d\tau V(\omega).$$

Отсюда имеем на основании (2)

$$MU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t) + NU(\omega)U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega) =$$
$$= M\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)\,d\tau -$$
$$-NU(\omega)\int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)\,d\tau V(\omega)$$

и далее на основании условия 1)

$$U^{-1}(\omega)N^{-1}MU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)+U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)V(\omega)=$$
$$=U^{-1}(\omega)N^{-1}M\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau-$$
$$-\int_t^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau V(\omega). \tag{6}$$

С учетом принятых обозначений из (6) имеем

$$PU^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)-U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)Q=$$
$$=P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau+\int_t^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q,$$

или в форме с оператором Φ:

$$\Phi\left\{U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)\right\}=$$
$$=P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau+$$
$$+\int_t^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q. \tag{7}$$

Так как матрицы P,Q не имеют общих характеристических чисел (см. условие 2) данной леммы), то, согласно [6, с. 207], оператор Φ однозначно обратим, при этом оператор Φ^{-1} является линейным и ограниченным. На основании обратимости оператора Φ от уравнения (7) придем к следующему уравнению:

$$X(t)=U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_t^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t). \tag{8}$$

Установим обратное: всякое непрерывное решение интегрального уравнения (8) является решением задачи (1), (2). Дифференцируя по *t* обе части (8), получим с учетом перестановочности операторов дифференцирования и Φ^{-1}:

$$\frac{dX(t)}{dt}=\frac{dU(t)}{dt}\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_t^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t)+$$
$$+U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[PU^{-1}(t)F(t,X(t),\lambda)V^{-1}(t)-U^{-1}(t)F(t,X(t),\lambda)V^{-1}(t)Q\right]\right\}V(t)+$$
$$+U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_t^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}\frac{dV(t)}{dt}=$$

$$=A(t)U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t)+$$
$$+U(t)\left\{\Phi^{-1}\Phi\left[U^{-1}(t)F(t,X(t),\lambda)V^{-1}(t)\right]\right\}V(t)+$$
$$+U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau,X(\tau),\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t)B(t).$$

Отсюда с учетом (8) получим тождество

$$\frac{dX(t)}{dt}=A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t),\lambda).$$

Докажем, что решение уравнения (8) удовлетворяет краевому условию (2). Для этого вместо (8) рассмотрим эквивалентное ему уравнение (7) с учетом полученного тождества

$$\Phi\left\{U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)\right\}=$$
$$=P\left[\int_0^t U^{-1}(\tau)(dX(\tau))V^{-1}(\tau)-\right.$$
$$\left.-\int_0^t U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau\right]+$$
$$+\left[\int_t^\omega U^{-1}(\tau)(dX(\tau))V^{-1}(\tau)-\right.$$
$$\left.-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau\right]Q. \qquad (9)$$

Выполнив в (9) интегрирование по частям, получим

$$\Phi\left\{U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)\right\}=$$
$$=P\left[U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)-X(0)-\right.$$
$$-\int_0^t\left(\frac{dU^{-1}(\tau)}{d\tau}X(\tau)V^{-1}(\tau)+U^{-1}(\tau)X(\tau)\frac{dV^{-1}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau-$$
$$\left.-\int_0^t U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau\right]+$$
$$+\left[U^{-1}(\omega)X(\omega)V^{-1}(\omega)-U^{-1}(t)X(t)V^{-1}(t)-\right.$$
$$-\int_t^\omega\left(\frac{dU^{-1}(\tau)}{d\tau}X(\tau)V^{-1}(\tau)+U^{-1}(\tau)X(\tau)\frac{dV^{-1}(\tau)}{d\tau}\right)d\tau-$$
$$\left.-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)(A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau))V^{-1}(\tau)d\tau\right]Q.$$

Отсюда имеем соотношение

$$-PX(0)+U^{-1}(\omega)X(\omega)V^{-1}(\tau)Q=0, \qquad (10)$$

эквивалентное условию (2).

Для исследования разрешимости уравнения (8) воспользуемся принципом Банаха – Каччиопполи [7, с. 605] сжимающих отображений. Запишем уравнение (8) в операторной форме

$$X = \mathcal{L}(X), \tag{11}$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен нелинейный интегральный оператор, определяемый правой частью уравнения (8). Для произвольной матрицы $X(t)$, принадлежащей шару $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$, имеем

$$\|\mathcal{L}(X)\| \le \|U(t)\| \|\Phi^{-1}\| \left[\|P\| \int_0^t \left\| U^{-1}(\tau) F(\tau, X(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau) \right\| d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_t^\omega \left\| U^{-1}(\tau) F(\tau, X(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau) \right\| d\tau \|Q\| \right] \|V(t)\|. \tag{12}$$

Поскольку $\|F_i(t, X)\| \le L_i \|X\| + h_i$, то, продолжая оценки в (12), получим с использованием принятых обозначений

$$\|\mathcal{L}(X)\| \le \lambda_1 \mu_1 \gamma m \omega \lambda_2 \mu_2 \left[L \|X\|_{\mathbb{C}} + h \right] = \gamma \lambda_0 \mu_0 m \omega \left(L \|X\|_{\mathbb{C}} + h \right) \le$$
$$\le q\rho + p \le q\rho + (1-q)\rho = \rho. \tag{13}$$

Отсюда следует оценка

$$\|\mathcal{L}(X)\|_{\mathbb{C}} \le \rho. \tag{14}$$

Далее выясним вопрос о сжимаемости оператора $\mathcal{L}$ в шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$. Из (8) имеем для всех X, Y таких, что $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$, $\|Y\|_{\mathbb{C}} \le \rho$:

$$\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y) =$$
$$= U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[P \int_0^t U^{-1}(\tau) \big(F(\tau, X(\tau), \lambda) - F(\tau, Y(\tau), \lambda) \big) V^{-1}(\tau) d\tau + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau) \big(F(\tau, X(\tau), \lambda) - F(\tau, Y(\tau), \lambda) \big) V^{-1}(\tau) d\tau Q \right] \right\} V(t). \tag{15}$$

Выполнив оценки по норме в (15), аналогичные (12), (13), получим

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| \le \gamma \lambda_0 \mu_0 m \omega L \|X - Y\|_{\mathbb{C}} = q \|X - Y\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\|_{\mathbb{C}} \le q \|X - Y\|_{\mathbb{C}}. \tag{16}$$

Соотношения (14), (16) являются условиями принципа Банаха – Каччиопполи применительно к (11) в шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$. На основании этого принципа заключаем: уравнение (8) однозначно разрешимо в области D_ρ. Стало быть, решение задачи (1), (2) существует и единственно в указанной области.

Изучим вопрос отыскания решения уравнения (8). Для построения этого решения воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [7, с. 605]). Применительно к (8) имеем

$$X_{k+1}(t) = U(t) \left\{ \Phi^{-1} \left[P \int_0^t U^{-1}(\tau) F(\tau, X_k(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau) d\tau + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \int_t^\omega U^{-1}(\tau) F(\tau, X_k(\tau), \lambda) V^{-1}(\tau) d\tau Q \right] \right\} V(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

где $X_0(t)$ – произвольная матрица класса $\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащая шару $\|X\|_{\mathbb{C}}\le\rho$. Тогда, согласно (14), $\|X_i\|_{\mathbb{C}}\le\rho\ (i=1,2,\ldots)$. Это нетрудно установить индукцией по k и на основании условия 4).

С помощью несложных выкладок установим (без использования свойств функций Грина), что все приближения, построенные согласно алгоритму (7), удовлетворяют краевому условию (2). Сначала продифференцируем по t обе части формулы (17):

$$dX_{k+1}(t)=\left[A(t)X_{k+1}(t)+X_{k+1}(t)B(t)+F\left(t,X_k(t),\lambda\right)\right]dt. \tag{18}$$

Соотношение (18) запишем в виде

$$F\left(t,X_k(t),\lambda\right)dt=dX_{k+1}(t)-\left[A(t)X_{k+1}(t)+X_{k+1}(t)B(t)\right]dt. \tag{19}$$

При $t=\omega$ из (17) следует

$$X_{k+1}(\omega)=U(\omega)\Phi^{-1}\left\{P\int_0^\omega U^{-1}(\tau)F\left(\tau,X_k(\tau),\lambda\right)V^{-1}(\tau)d\tau\right\}V(\omega). \tag{20}$$

Запишем теперь (20) в следующем виде:

$$\Phi U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega)=P\int_0^\omega U^{-1}(\tau)F\left(\tau,X_k(\tau),\lambda\right)V^{-1}(\tau)d\tau. \tag{21}$$

Подставляя (19) в (21) и выполняя интегрирование по частям с использованием тождеств $dU^{-1}/dt=-U^{-1}A(t)$, $dV^{-1}/dt=-B(t)V^{-1}$, получим

$$\Phi U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega)=P\left[U^{-1}(\omega)X_{k+1}(\omega)V^{-1}(\omega)-X_{k+1}(0)\right]. \tag{22}$$

Используя явный вид левой части (22), придем к равенству

$$MX_{k+1}(0)+NX_{k+1}(\omega)=0,\ k=0,1,2,\ldots \tag{23}$$

Справедливость равенства (23) позволяет строить приближенные решения задачи (1), (2) в классе допустимых функций. Это свойство алгоритма (17) делает его достаточно удобным для возможных приложений.

Используя (16), получим рекуррентную оценку

$$\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}\le q\|X_m-X_{m-1}\|_{\mathbb{C}},\ m=1,2,\ldots,$$

а затем на ее основе

$$\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}\le q^m\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}},\ m=1,2,\ldots \tag{24}$$

На основании условий 3), 4) последовательность $\left\{X_k(t)\right\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t\in I$ к решению $X(t)\in D_\rho$ уравнения (8).

На основе оценки (24) нетрудно получить оценку, характеризующую скорость сходимости алгоритма (17)

$$\|X_k-X\|_{\mathbb{C}}\le q^k\frac{\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q},\ k=0,1,2,\ldots \tag{25}$$

Полагая в (25) $k=0$, $X_0=0$, получим

$$\|X\|_{\mathbb{C}}\le\frac{\|X_1\|_{\mathbb{C}}}{1-q}. \tag{26}$$

Выведем явную, т. е. по исходным данным задачи, оценку для $\|X\|_{\mathbb{C}}$. При $k=0$, $X_0=0$ из (17) имеем

$$X_1(t)=U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,0,\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau,0,\lambda)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t). \qquad (27)$$

Выполнив последовательно оценки по норме в (27), получим

$$\|X_1(t)\|\le\|U(t)\|\,\|\Phi^{-1}\|\left[\|P\|\int_0^t\left\|U^{-1}(\tau)F(\tau,0,\lambda)V^{-1}(\tau)\right\|d\tau+\right.$$
$$\left.+\int_t^\omega\left\|U^{-1}(\tau)F(\tau,0,\lambda)V^{-1}(\tau)\right\|d\tau\|Q\|\right]\|V(t)\|\le$$
$$\le\lambda_1\mu_1\gamma m\omega\int_0^\omega\left\|U^{-1}(\tau)F(\tau,0,\lambda)V^{-1}(\tau)\right\|d\tau\le\gamma\lambda_0\mu_0\omega h=p\cdot$$

Отсюда следует оценка

$$\|X_1\|_C\le p. \qquad (28)$$

Используя (28), имеем из (26)

$$\|X\|_C\le\frac{\|X_1\|_C}{1-q}\le\frac{p}{1-q}\le\rho. \qquad (29)$$

Теперь получим априорную оценку для $\|X\|_C$ на основе уравнения (8), рассматривая его как тождество при $X=X(t,\lambda)$. Производя оценки по норме в (8), получим с учетом (13)

$$\|X\|_C\le q\|X\|_C+p.$$

Отсюда на основании условия 3) имеем

$$\|X\|_C\le\frac{p}{1-q}\cdot \qquad (30)$$

Легко видеть, что оценка (29) предпочтительнее оценки (30).

Далее рассмотрим задачу (1), (2) с точки зрения теории возмущений.

Используемый метод позволяет получить в явном виде по исходным данным задачи оценку допустимых возмущений задачи, т. е. возмущений, сохраняющих условия ее однозначной разрешимости, а также оценить влияние этих возмущений на решение невозмущенной задачи; другими словами, дать оценку величины $\|X(t,\lambda)-X(t,0)\|$. Такие оценки являются важными для решения ряда прикладных задач.

Наряду с принятыми обозначениями введем следующие:

$$a_0=\gamma\lambda_0\mu_0m\omega L_0,\ a_1=\gamma\lambda_0\mu_0m\omega L_1,\ b_0=\gamma\lambda_0\mu_0m\omega h_0,\ b_1=\gamma\lambda_0\mu_0m\omega h_1,$$
$$\varepsilon_1=(1-a_0)/a_1,\ \varepsilon_2=\frac{\rho(1-a_0)-b_0}{\rho a_1+b_1}.$$

Теорема. *Пусть выполнены предположения 1), 2) леммы, а также неравенства*

$$a_0<1, \qquad (31)$$

$$\frac{b_0}{1-a_0}<\rho. \qquad (32)$$

Тогда в области $D=D_\rho\times[-\varepsilon_2,\varepsilon_2]$ задача (1), (2) однозначно разрешима. Решение $X(t,\lambda)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением (17), при этом справедливы оценки

$$\left\| X(t,\lambda) \right\| \le \frac{p}{1-q}, \tag{33}$$

$$\left\| X(t,\lambda) - X(t,0) \right\| \le \frac{\varepsilon\left(a_1 \left\| X_0 \right\|_{\mathbb{C}} + b_1\right)}{1-q}. \tag{34}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что условия (31), (32) обеспечивают в области D_ρ существование и единственность решения интегрального уравнения (8) при отсутствии возмущения, т. е. при $F_1(t,X) \equiv 0$.

Оценим область значений параметра λ, позволяющую сохранить область локализации решения возмущенной задачи. Для этого воспользуемся доказанной леммой. Сначала отметим справедливость почти очевидного соотношения $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Далее на основе условия 3) имеем при $|\lambda| \le \varepsilon_2 < \varepsilon_1$

$$a_0 + \varepsilon a_1 \le a_0 + \varepsilon_2 a_1 < a_0 + \varepsilon_1 a_1 < 1. \tag{35}$$

Для значений λ, определяемых согласно (35), должно выполняться условие 4). Очевидно, при $|\lambda| \le \varepsilon_2$ имеем соотношение

$$\frac{c_0 + \varepsilon c_1}{1 - a_0 - \varepsilon a_1} \le \frac{c_0 + \varepsilon_2 c_1}{1 - a_0 - \varepsilon_2 a_1}. \tag{36}$$

С помощью несложных элементарных выкладок можно установить справедливость равенства

$$\frac{c_0 + \varepsilon_2 c_1}{1 - a_0 - \varepsilon_2 a_1} = \rho. \tag{37}$$

На основании (37) имеем из (36)

$$\frac{c_0 + \varepsilon c_1}{1 - a_0 - \varepsilon a_1} \le \rho \quad \left(|\lambda| \le \varepsilon_2\right). \tag{38}$$

Соотношения (35), (38) являются условиями принципа сжимающих отображений для интегральной задачи (8) в области $D = D_\rho \times [-\varepsilon_2, \varepsilon_2]$. Таким образом, в этой области возмущенная краевая задача однозначно разрешима.

Справедливость оценки (33), очевидно, следует из леммы. Получим оценку (34). Возмущенное и невозмущенное уравнения запишем соответственно в виде

$$X_\lambda = \tilde{\mathcal{L}}(F_\lambda), \tag{39}$$

$$X_0 = \tilde{\mathcal{L}}(F_0), \tag{40}$$

где $F_\lambda = F(t,X,\lambda)$, $F_0 = F_0(t,X)$, $X_\lambda = X(t,\lambda)$, $X_0 = X(t,0)$, $\tilde{\mathcal{L}}$ – соответствующий линейный интегральный оператор. Из (39), (40) имеем

$$X_\lambda - X_0 = \tilde{\mathcal{L}}(F_\lambda - F_0). \tag{41}$$

Выполнив оценки по норме в (41) с использованием явного вида уравнений (39), (40), получим на основании (16)

$$\left\| X_\lambda - X_0 \right\| \le (a_0 + \varepsilon a_1) \left\| X_\lambda - X_0 \right\|_{\mathbb{C}} + \varepsilon\left(a_1 \left\| X_0 \right\|_{\mathbb{C}} + b_1\right) =$$

$$= q \left\| X_\lambda - X_0 \right\|_{\mathbb{C}} + \varepsilon\left(a_1 \left\| X_0 \right\|_{\mathbb{C}} + b_1\right).$$

Отсюда, на основании условия 3), имеем оценку (34). Теорема полностью доказана.

Замечание. Очевидно, вместо оценки (34) можно принять более грубую, но явную оценку

$$\left\| X(t,\lambda) - X(t,0) \right\| \le \frac{\varepsilon\left(a_1 \rho + b_1\right)}{1-q}.$$

Замечание 1.2. При дополнительных предположениях о характеристических числах матриц P,Q для оператора Φ^{-1} имеют место различные явные представления (см., например, [8 – 11]), на основе которых для $\left\|\Phi^{-1}\right\|$ можно получить конструктивные оценки.

Замечание 1.3. Отметим, что используемый в работе [11] подход к качественному исследованию задачи (1), (2) приводит к системе двух матричных уравнений относительно $X(t)$, $X(0)$ и таким же алгоритмам построения решения. Конструктивный метод из [5], как видим, дает одно соотношение (8), (17).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Демидович, Б. П.*** Лекции по математической теории устойчивости. – М. : Наука, 1967. – 472с.
2. ***Лаптинский В. Н.*** К вопросу о разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2003. – № 2-3(15). – С. 176–181.
3. ***Лаптинский, В. Н.*** К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7. – С. 994–996.
4. ***Лаптинский В. Н.*** Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев : БРУ, 2012. – 167 с.
5. ***Лаптинский, В. Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300с.
6. ***Гантмахер, Ф. Р.*** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
7. ***Канторович, Л. В.*** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука. 1977. – 744 с.
8. ***Абдикасова, П. А., К. Г. Валеев*** // Математическая физика. – 1976. – Вып. 19. – С. 3–10.
9. ***Беллман, Р.*** Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Наука, 1969. – 368 с.
10. ***Параев, Ю. И.*** Уравнения Ляпунова и Риккати / Ю. И. Параев. – Томск : Томский государственный университет, 1989. – 166 с.
11. ***Murty K. N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505–515.

Поступила в редакцию 14.01.2019 г.
Контакты: lavani@tut.by (Лаптинский Валерий Николаевич)
imi.makzi @ gmail. com (Маковецкий Илья Иванович)

Laptinsky V., Makovetsky I. BILATERAL REGULARIZATION OF NON-LINEARLY PERTURBED TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LYAPUNOV MATRIX EQUATION WITH PARAMETER.

Constructive sufficient conditions of one-valued resolvability of a two-point boundary value problem for a nonlinear Lyapunov equation with parameter are obtained. The iterative algorithm for solution construction is developed.

Keywords: matrix differential equation, two-point boundary value problem, one-valued resolvability, solution construction.