УДК 514

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПРОЕКЦИОННОМ ЧЕРТЕЖЕ

Э. Г. Кирьяцкий
габилитированный доктор наук, профессор
Вильнюсский технический университет им. Гедиминаса
В. И. Матюхин
учитель-эксперт, Вильнюсская средняя школа "Сантарос"

Детально обсуждается с привлечением большого количества примеров и задач метод параллельных проекций. Основная методическая цель при использовании этого метода – развитие пространственного воображения обучаемого.

Ключевые слова: изображение, проектирование, чертеж, задача, метрические свойства, аффинные свойства.

1. Слова "дан треугольник", "дана пирамида" и т.д. в условиях задач являются сокращениями словосочетаний "дано изображение треугольника", "дано изображение пирамиды" и т.д.

При параллельном проектировании сохраняются (аффинные свойства) [1; 3; 4]: 1) свойство фигуры – быть точкой, прямой, плоскостью; 2) свойство фигуры – иметь пересечение; 3) деление отрезка в данном отношении; 4) свойство прямых, плоскостей, прямой и плоскости – быть параллельными; 5) свойство фигуры – быть треугольником, параллелограммом, трапецией; 6) отношение длин параллельных отрезков; 7) отношение площадей двух фигур и др.

Не сохраняются при параллельном проектировании (но сохраняются при преобразовании подобия) метрические свойства: 1) свойство прямых, плоскостей, прямой и плоскости образовывать между собой определенный угол (в частности, быть перпендикулярными); 2) отношение длин непараллельных отрезков; 3) отношение величин углов между прямыми (в частности, биссектриса при проектировании не переходит в биссектрису); 4) отношение величин двугранных углов; 5) отношение величин углов между прямыми и плоскостями и др.

На построенном по правилам параллельного проектирования изображении не отражаются указанные в условии задачи метрические данные (размеры). Дополняя чертеж метрическими условиями, мы, как говорят, расходуем параметры. Например, если параллелограмм ABCD является изображением ромба и мы пишем: "ABCD – ромб", то тем самым мы на изображение налагаем одно метрическое условие, то есть расходуем один параметр.

Построив же на чертеже параллелограмм и добавив при этом, что дано изображение квадрата, мы расходуем два параметра. Если изображение обладает только аффинными свойствами оригинала, то параметры не расходуются, так как аффинные свойства оригинала при параллельном проектировании сохраняются.

Если при выполнении проекционного чертежа на изображение плоской фигуры израсходованы два параметра, то тем самым однозначно определено изображение каждой точки, лежащей в плоскости этой фигуры, и дальнейшие метрические построения в плоскости этой фигуры, которые могут потребоваться для решения задачи, уже нельзя выполнять произвольно.

Аналогично, если при выполнении проекционного чертежа на изображение пространственной фигуры израсходовано пять параметров, тем самым однозначно определено изображение каждой точки этой фигуры и, следовательно, метрические построения на этом чертеже уже нельзя выполнять произвольно.

Найдем в качестве примера параметрическое число изображения треугольной пирамиды, у которой в основании лежит равносторонний треугольник, а одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания и является равносторонним треугольником. Изображая два правильных треугольника произвольными треугольниками, мы на каждое изображение расходуем по два параметра. Так как плоскости этих треугольников в оригинале перпендикулярны, нужно наложить на изображение еще одно метрическое условие, то есть израсходовать еще один параметр. Итак, параметрическое число данного изображения равно пяти, а потому никаких других метрических построений на этом изображении выполнить произвольно уже нельзя.

Подсчет параметрического числа при выполнении изображения необходим, так как в процессе решения задачи могут потребоваться дополнительные построения метрического характера, которые при наличии свободных параметров можно выполнять произвольно.

Если при построении изображения требуется израсходовать более пяти параметров, то та часть построения изображения, выполнение которой требует расхода пяти параметров, не описывается в решении, дальнейшие же необходимые построения обязательно описываются и выполняются по правилам параллельного проектирования. Если в задаче указывается, что некоторые элементы фигуры надо построить (например, сечение многогранника), то построение изображений этих элементов фигуры описывается обязательно.

При решении задач, речь в которых идет о комбинации геометрических фигур в пространстве, ввиду сложности выполнения чертежей иногда приходится прибегать к их упрощению. Изображать, например, лишь сечение фигуры (в большинстве задач на комбинацию тел вращения), изображать одну фигуру полностью, а другую – лишь частично и т.д.

При решении ряда аффинных задач стереометрии выгодно выбрать направление проектирования так, чтобы некоторые прямые изображались точками, плоскости – прямыми, а произвольные треугольники – правильными. Обоснованием такой возможности служит тот факт, что любой треугольник мы можем изобразить любым треугольником, любую треугольную пирамиду – любым полным (с диагоналями) четырехугольником. Исследование многих отношений между элементами произвольных фигур можно свести при этом к доказательству соответствующих утверждений для “удобных” фигур. Например, доказательства многих свойств треугольной пирамиды упрощается, если за ее изображение принять квадрат.

Основными задачами, которые успешно решаются методом параллельных проекций, являются:

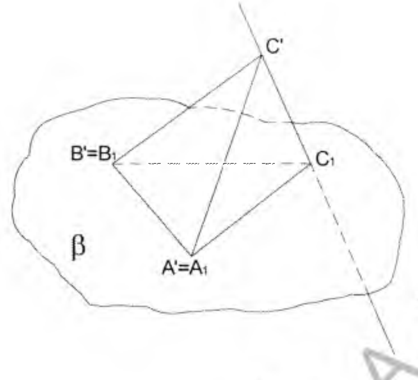
– вычисление отношений отрезков, на которые делятся пересекающиеся отрезки точкой пересечения (при этом в качестве проектирующей прямой выбирается прямая, параллельная одному из этих отрезков);
– нахождение отношений отрезков, лежащих на параллельных прямых;
– исследование взаимного расположения прямых на плоскости;
– вычисление отношений отрезков, на которые плоскость делит данный отрезок (плоскость при этом изображается прямой линией);
– доказательство компланарности двух прямых (в таких задачах за проекцию одной прямой принимается точка);
– определение отношения, в каком данная плоскость делит ребро или диагональ многогранника (секущая плоскость изображается при этом прямой);
– построение прямой, параллельной данной плоскости и пересекающей данную прямую;
– исследование взаимного расположения некомпланарных прямых (за изображение одной из них принимается точка);
– доказательство параллельности прямых;
– доказательство принадлежности точек одной прямой или плоскости;
– исследование взаимного расположения трех прямых (одна из них при этом выбирается в качестве проектирующей);
– построение прямой в пространстве с заданными свойствами;
– исследование взаимного расположения плоскости и многогранника или тела вращения (за изображение плоскости при этом берется прямая);
– доказательство параллельности прямой и плоскости (плоскость при этом изображается прямой);
– доказательство параллельности двух плоскостей (за изображение одной из плоскостей при этом выбирается прямая);
– построение сечений многогранников плоскостью (многогранник при этом изображается так, чтобы образом секущей плоскости была прямая);
– вычисление площадей многоугольников и сечений многогранников (при этом используется свойство, что если площади лежащих в одной плоскости многоугольников равны S_1 и S_2, а площади их проекций на другую плоскость равны S'_1 и S'_2, то $S_1 : S_2 = S'_1 : S'_2$).

Особенность решения задач на проекционном чертеже состоит в том, что при этом приходится, как правило, выполнять два чертежа: на первом должны быть хорошо видны все элементы фигуры, о которой говорится в задаче; при выполнении второго чертежа выбираются нужным образом направление проектирования и плоскость проекций.

Главная обучающая цель метода решения задач на проекционном чертеже – развитие пространственного воображения учащихся.

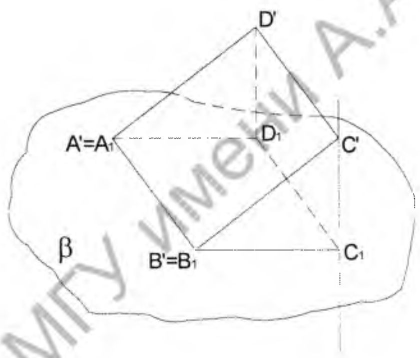
2. Приведем примеры решения задач с помощью метода проектирования [1–3].

Задача 1. Докажите, что любой треугольник можно считать изображением треугольника любой заданной формы.



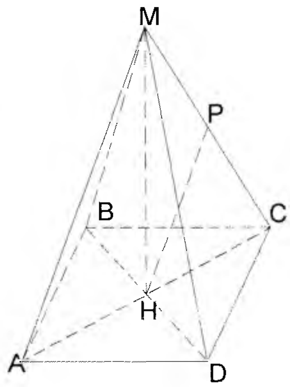
Решение. Пусть $A_1B_1C_1$ – произвольный треугольник, лежащий в плоскости β. Пристроим к его стороне A_1B_1 треугольник $A'B'C'$, подобный данному треугольнику ABC и не лежащий в плоскости β. В качестве проектирующей прямой выберем прямую $C'C_1$. При этом $A' = A_1$, $B' = B_1$ и утверждение доказано.

Задача 2. Докажите, что любой параллелограмм можно считать изображением данного параллелограмма $ABCD$.



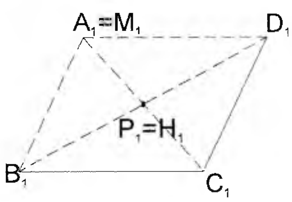
Решение. Пристроим к стороне A_1B_1 произвольного параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$, лежащего в плоскости β, параллелограмм $A'B'C'D'$, подобный данному параллелограмму $ABCD$ и не лежащий в плоскости β. В качестве проектирующей возьмем прямую $C'C_1$. Четырехугольник $C_1D_1D'C'$ является параллелограммом, поэтому $D_1D' \| C_1C'$. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ является проекцией параллелограмма $A'B'C'D'$, подобного параллелограмму $ABCD$.

Задача 3. Ребро тетраэдра равно 100. Можно ли построить такую его параллельную проекцию, площадь которой равна 0,01? (Под тетраэдром здесь и дальше понимается треугольная пирамида, у которой боковые грани и основание – равные равносторонние треугольники).



Решение. По теореме Польке – Шварца за изображение любой треугольной пирамиды можно принять любой полный (с диагоналями) четырехугольник. Поэтому построить такую проекцию можно.

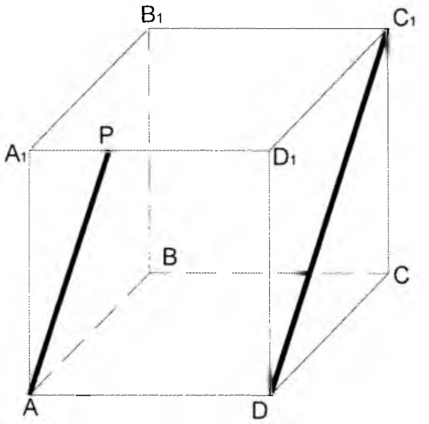
Задача 4. $MABCD$ – правильная четырехугольная пирамида, у которой все ребра равны между собой. Точка P – середина ребра MC, H – точка пересечения диагоналей AC и BD основания. Построить изображение этой пирамиды на плоскости, параллельной плоскости BCM, приняв HP за направление проектирования.



Решение. Треугольник BCM правильный и его плоскость параллельна плоскости проекций. Поэтому сначала строим правильный треугольник $B_1C_1M_1$. Отрезок PH проектируется в точку $P_1= H_1$, которая лежит на середине отрезка M_1C_1. Так как $AM \| HP$, то ребро AM изображается точкой $A_1=M_1$. Строим точку D_1, симметричную точке B_1 относительно точки $P_1=H_1$ (в пирамиде BH=HD). Изображение пирамиды построено.

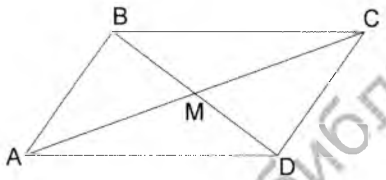
Задача 5. Можно ли две параллельные прямые считать изображением скрещивающихся прямых?

Решение. Да. Нужно в качестве проектирующей взять прямую, параллельную двум параллельным плоскостям, каждая из которых проходит через одну из данных скрещивающихся прямых.



Задача 6. Скрещивающиеся прямые AP и C_1D, указанные на параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, изображены параллельными прямыми. Верно ли, что прямая ℓ, параллельная направлению проектирования, пересекает прямые AP и C_1D?

Решение. Нет. По доказанному в предыдущей задаче, скрещивающиеся прямые изображаются параллельными прямыми только в том случае, если проектирующая прямая не пересекает две плоскости, которые параллельны и каждая из которых проходит через одну из скрещивающихся прямых (AP или C_1D). Поэтому и прямая ℓ не пересекает эти прямые.



Задача 7. Изображением какой пространственной фигуры может служить этот рисунок?

Решение. 1. Изображена треугольная пирамида CABD и ее сечение плоскостью, проходящей через точки B, D и середину M ребра AC.

2. Изображена четырехугольная пирамида с основанием ABCD и вершиной M. Высота этой пирамиды изображается точкой M_1.

3. Изображена четырехугольная пирамида с основанием ABCD и диагональными сечениями BDM и ACM, которые изображаются диагоналями основания.

4. Изображена четырехугольная пирамида, основанием которой является параллелограмм ABCD, а одно из боковых ребер перпендикулярно основанию и диагональное сечение, не перпендикулярное основанию.

5. Изображена прямая четырехугольная призма с основанием ABCD. Отрезки A_1C_1 и B_1D_1 изображают ее диагональные сечения, а точка M_1 – проекцию отрезка, по которому пересекаются эти сечения.

6. Изображены две четырехугольные пирамиды с общим основанием. Точка M_1 является изображением высот этих пирамид (которых, вообще говоря, может быть больше двух).

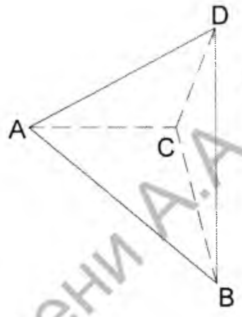
7. Изображены две треугольные пирамиды с общей вершиной M и основаниями ABC и ACD, которые принадлежат одной плоскости.

8. Изображены две треугольные пирамиды, основания которых ABC и ACD лежат на одной плоскости. Точка M является изображением вершин (и высот) этих пирамид, которые расположены по разные стороны от плоскости ABC.

Можно предложить попытаться найти и другие возможности.

Замечание. Здесь, как и в некоторых других задачах, допускается изображение невидимых линий сплошными линиями.

Задача 8. Докажите, что ортогональная проекция тетраэдра DABC с ребром a на плоскость α будет иметь наибольшую площадь, когда плоскость α параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра.

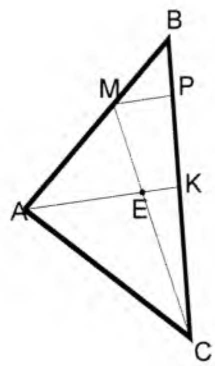


Решение. Скрещивающиеся ребра AB и CD равны и взаимно перпендикулярны (докажите). Если прямые AB и CD параллельны плоскости проекций α, то ортогональной проекцией тетраэдра будет квадрат $A_1B_1C_1D_1$, диагонали которого равны a. Площадь этого квадрата равна

$$\frac{1}{2}\cdot a \cdot a = \frac{1}{2}a^2.$$

Если α не параллельна ребрам AB и CD, то ортогональной проекцией тетраэдра будет четырехугольник, диагонали которого меньше a.

Задача 9. Дан произвольный треугольник ABC. Точки M и K лежат на сторонах AB и BC соответственно, $AM=\frac{2}{3}AB$, CK= KB. Отрезки AK и CM пересекаются в точке E. Найдите отношение отрезков AE и EK, CE и EM.

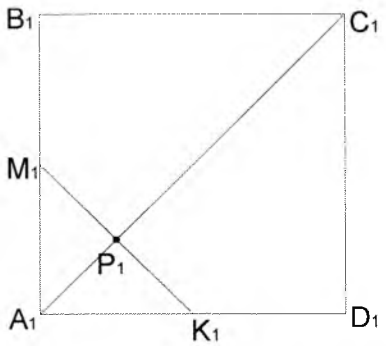


Решение. Будем считать данный треугольник изображением правильного треугольника. Приняв за направление проектирования прямую, параллельную AK, спроектируем на BC точки M, A и E. По условию задачи AM:MB =2:1, CK:KB=1:1. Для удобства вычислений пусть, например, $A_1B_1=B_1C_1=A_1C_1=6$, где $A_1B_1C_1$ – образ треугольника ABC. Тогда $C_1K_1=K_1B_1=3$, $B_1P_1=1$, $P_1K_1=2$, $C_1P_1=5$. Так как $\Delta C_1K_1E_1$ подобен $\Delta C_1P_1M_1$, то $C_1E_1:C_1M_1=K_1E_1:P_1M_1=C_1K_1:C_1P_1=3:5$ и $C_1E_1:E_1M_1=3:2$. Поэтому CE:EM=3:2.

Так как $\Delta B_1M_1P_1 \sim \Delta B_1A_1K_1$, то $M_1P_1:A_1K_1=B_1P_1:B_1K_1=1:3$, и т.к. $M_1P_1=\frac{5}{3}K_1E_1$, то $\frac{5}{3}K_1E_1:A_1K_1=1:3$, $K_1E_1:A_1K_1=1:5$. Отсюда $A_1E_1:E_1K_1=4:1$, а потому AE:EK=4:1.

Ответ. AE:EK=4:1, CE:EM=3:2.

Задача 10. Дан параллелограмм ABCD. Точка M – середина стороны AB, точка K лежит на стороне AD, причем AK:KD=1:2. Найдите, в каком отношении точка P пересечения AC и MK делит отрезок MK.

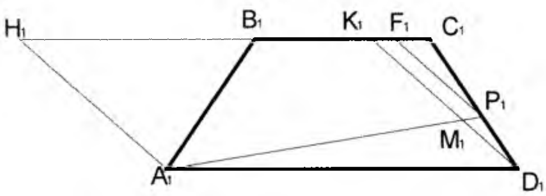


Решение. Пусть данный параллелограмм является изображением квадрата $A_1B_1C_1D_1$, A_1P_1 – биссектриса прямого угла A_1 треугольника $A_1K_1M_1$, поэтому по свойству биссектрисы $M_1P_1:P_1K_1= A_1M_1:A_1K_1= = A_1B_1: A_1D_1=3:2$.

Значит $MP:PK=3:2$.

Ответ. 3:2.

Задача 11. ABCD – трапеция, у которой AD и BC – основания, AD=2·BC, Точка K – середина основания BC, P – точка, лежащая на боковой стороне DC, причем $DP=\frac{1}{4}DC$. Отрезки AP и DK пересекаются в точке M. Найдите отношение отрезков AM и MP.

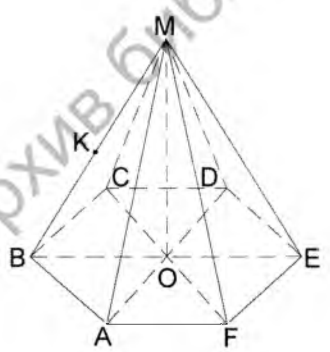


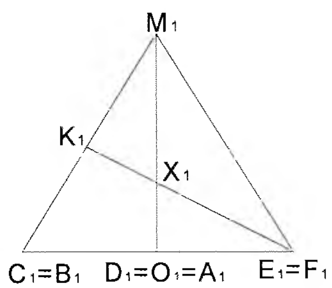
Решение. Пусть данная трапеция является изображением равнобедренной трапеции $A_1B_1C_1D_1$, у которой (для удобства вычислений) $A_1D_1=16$, $B_1C_1=8$.

Выбрав в качестве направления проектирования прямую, параллельную прямой D_1K_1, спроектируем на прямую B_1C_1 точки A_1, M_1, P_1. Получим соответственно точки H_1, K_1, F_1. Так как $A_1M_1:M_1P_1=H_1K_1:K_1F_1$ и $H_1K_1=A_1D_1=16$, то остается найти K_1F_1. По теореме Фалеса, $K_1F_1:F_1C_1=P_1D_1:P_1C_1=1:3$. А так как $K_1C_1=K_1B_1=4$, то отсюда $K_1F_1=1$ и $A_1M_1:M_1P_1=16:1$. Значит, $AM:MP=16:1$.

Ответ. 16:1.

Задача 12. Дана правильная шестиугольная пирамида MABCDEF. Точка K делит ребро BM пополам. В каком отношении плоскость FEK делит ребро AM?

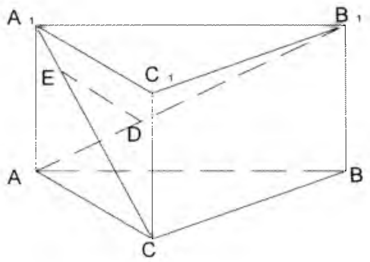


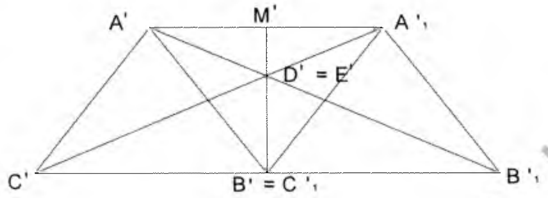


Решение. Пусть X – точка пересечения ребра AM с плоскостью FEK. Примем за направление проектирования прямую, параллельную прямой EF, и построим ортогональную проекцию данной пирамиды. При этом плоскость FEK будет изображаться прямой K_1E_1. Отрезки M_1A_1 и K_1E_1 – медианы треугольника $M_1B_1E_1$, поэтому $M_1X_1:X_1A_1=2:1$. Следовательно, $MX:XA=2:1$.

Ответ. 2:1.

Задача 13. На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней призмы $ABCA_1B_1C_1$ взяты точки D и E так, что прямые DE и BC_1 параллельны. Найдите отношение длин отрезков DE и BC_1.

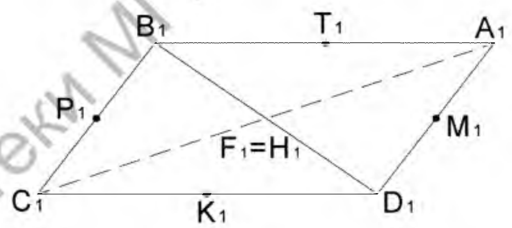




Решение. Строим изображение нижнего основания призмы в виде правильного треугольника $A_1B_1C_1$. При этом диагональ BC_1 изобразится точкой $B'=C'_1$. Отрезок DE, параллельный BC_1, изобразится при этом точкой $D'=E'$. Так как $DE||BC_1$, то прямые C'_1E', $B'D'$, $A_1A'_1$ пересекаются в точке M'. А так как $M'D':D'B'=1:2$, то $DE:BC_1=1:3$.

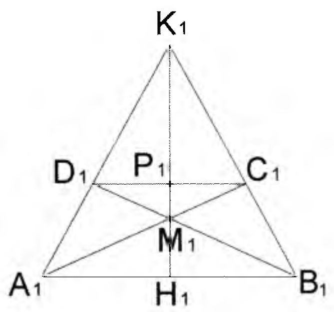
Ответ. 1:3.

Задача 14. Через середины противолежащих ребер треугольной пирамиды DABC проведены прямые. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.



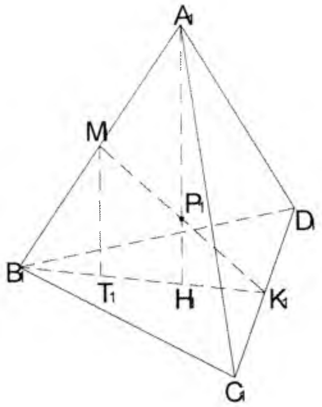
Решение. Примем за направление проектирования, например, прямую FH, где F и H – середины ребер BD и AC пирамиды. Тогда пирамида DABC изобразится параллелограммом $D_1A_1B_1C_1$ вместе с его диагоналями A_1C_1 и B_1D_1. Середины противолежащих сторон параллелограмма K_1, M_1, T_1, P_1 симметричны относительно точки $F_1=H_1$, что и доказывает утверждение задачи.

Задача 15. Дана произвольная трапеция ABCD. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Докажите, что прямая KM проходит через середины H и P оснований AB и CD трапеции.



Решение. Это хорошо известная задача, имеющая несколько способов решения.

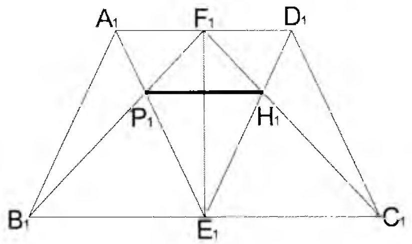
Примем треугольник AKB за изображение правильного треугольника $A_1K_1B_1$, а трапецию ABCD – за изображение равнобедренной трапеции $A_1B_1C_1D_1$. Прямая M_1K_1 – ось симметрии треугольника $A_1K_1B_1$ и трапеции $A_1B_1C_1D_1$. Поэтому прямая M_1K_1 делит пополам отрезки C_1D_1 и A_1B_1. Точки P и H являются образами точек P_1 и H_1, поэтому прямая MK проходит через середины сторон CD и AB трапеции ABCD.



Задача 16. Точки M и K – середины сторон AB и CD выпуклого плоского четырехугольника ABCD. Докажите, что точка H пересечения медиан треугольника BCD, середина P отрезка MK и вершина A принадлежат одной прямой.

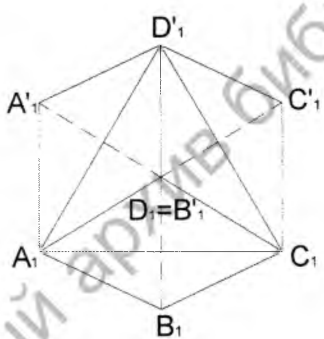
Решение. Примем данный четырехугольник за изображение правильной треугольной пирамиды $A_1B_1C_1D_1$ с основанием $B_1C_1D_1$.

Проведем $M_1T_1||A_1H_1$, где A_1H_1 – высота пирамиды. Так как $B_1M_1=M_1A_1$, то $B_1T_1=T_1H_1$, а значит $T_1H_1=H_1K_1$ и $M_1P_1=P_1K_1$. Точка P_1 пересечения M_1K_1 и A_1H_1 является серединой отрезка M_1K_1. Следовательно, точки H, P и A лежат на одной прямой.



Задача 17. В трапеции ABCD точка E – середина основания BC, F – середина основания AD. Отрезки BF и AE пересекаются в точке P, а отрезки DE и FC пересекаются в точке H. Докажите, что отрезок PH параллелен основаниям трапеции.

Решение. Пусть данная трапеция является изображением равнобедренной трапеции $A_1B_1C_1D_1$. Тогда F_1E_1 – ее ось симметрии и ось симметрии равнобедренных треугольников $A_1E_1D_1$ и $B_1F_1C_1$. Поэтому точки P_1 и H_1 симметричны относительно прямой F_1E_1, а значит $P_1H_1||A_1D_1$, $P_1H_1||B_1C_1$. Так как при параллельном проектировании параллельность прямых сохраняется, то PH||AD, PH||BC.

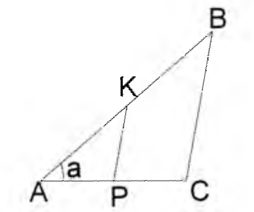


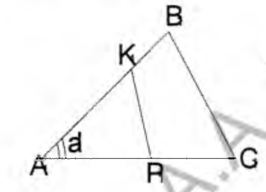
Задача 18. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите на его поверхности точки, наиболее удаленные от прямой DB_1.

Решение. Строим ортогональную проекцию куба на плоскость AD_1C. При этом отрезок DB_1 проектируется в точку $D_1=B_1'$, а перпендикуляры к этому отрезку изображаются без искажения их длины, причем один их конец совпадает с этой точкой $D_1=B_1'$. Наиболее удалены от точки $D_1=B_1'$ точки A_1', A_1, B_1, C_1, C_1', D_1' – проекции вершин куба.

Если ребро куба равно a, то вершины куба A, B, C, A_1, C_1, D_1 удалены от прямой DB_1 на $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ (наибольшее расстояние точек на поверхности куба до прямой DB_1).

Задача 19. Докажите, что площади S_1 и S_2 треугольников, лежащих в одной плоскости, относятся как площади их проекций S_1' и S_2', лежащих в другой плоскости.





Решение. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ является параллельной проекцией треугольника ABC; К и Р – точки на сторонах AB и AC соответственно, а K_1 и P_1 – проекции этих точек. Обозначим $\angle BAC=\alpha$, $\angle B_1A_1C_1=\alpha'$. Тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\alpha;\ S_{AKP}=\frac{1}{2}AK\cdot AP\cdot\sin\alpha;$$

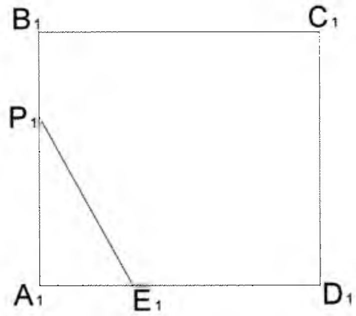
$$S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}A_1B_1\cdot A_1C_1\cdot\sin\alpha',$$

$S_{A_1K_1P_1}=A_1K_1\cdot A_1P_1\cdot\sin\alpha'$. Отсюда $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AKP}}=\dfrac{AB\cdot AC}{AK\cdot AP}$;

$\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_1K_1P_1}}=\dfrac{A_1B_1\cdot A_1C_1}{A_1K_1\cdot A_1P_1}$. Но $\dfrac{AB}{AK}=\dfrac{A_1B_1}{A_1K_1}$ и $\dfrac{AC}{AP}=\dfrac{A_1C_1}{A_1P_1}$, поэтому $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AKP}}=\dfrac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_1K_1P_1}}$.

Замечание. Так как всякий многоугольник можно разбить на треугольники, то утверждение задачи справедливо для любых многоугольников.

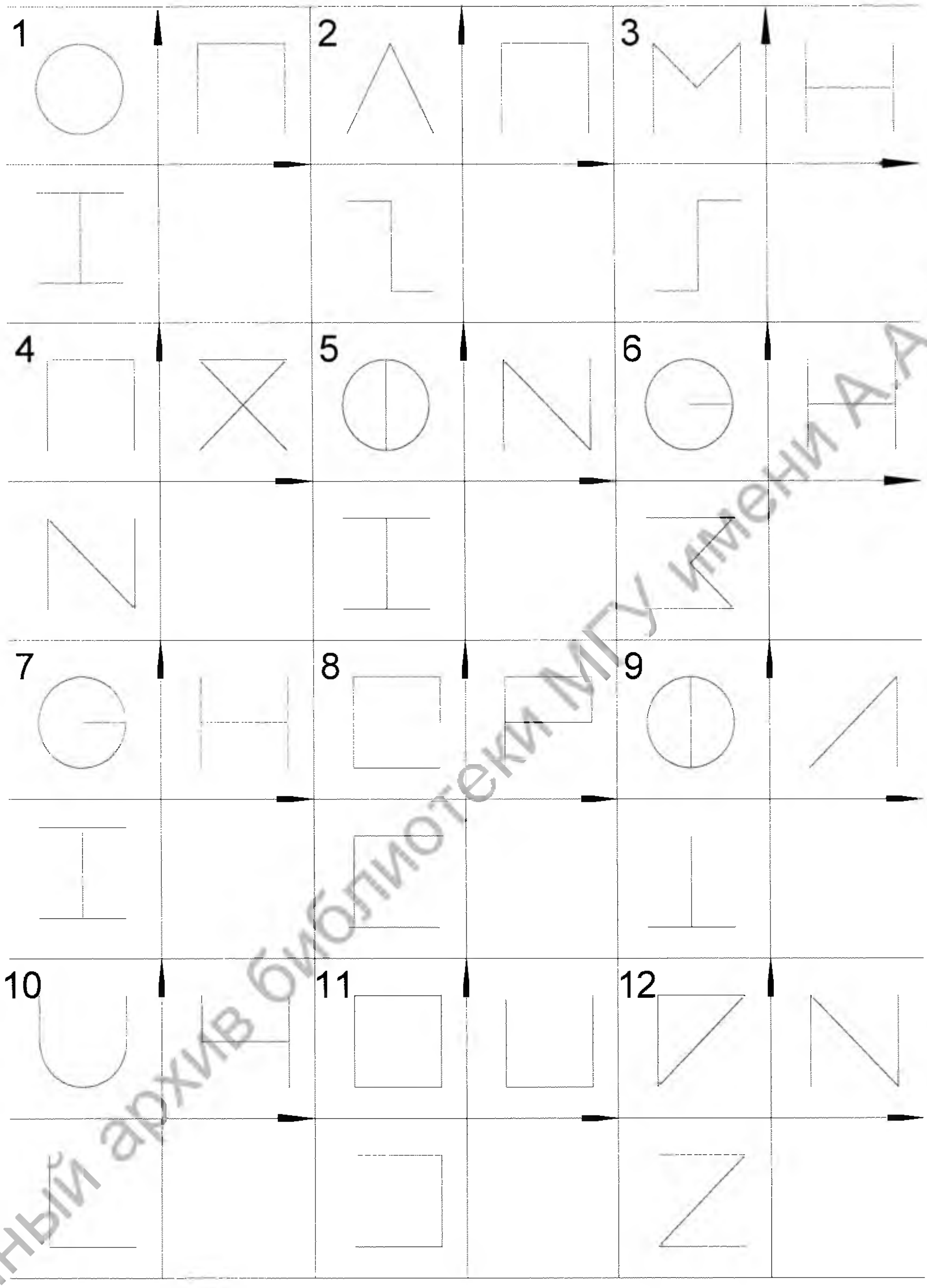
Задача 20. В параллелограмме ABCD точки P и E лежат на сторонах AB и AD соответственно, причем AP= $\frac{2}{3}$ AB и AE = $\frac{1}{3}$AD. Найдите площадь треугольника APE, если площадь параллелограмма равна 18.



Решение. Примем данный параллелограмм за изображение квадрата $A_1B_1C_1D_1$ и для удобства вычислений будем считать, что сторона этого квадрата равна 3a. Тогда $A_1E_1=a$, $A_1P_1=2a$, площадь квадрата равна $9a^2$, а площадь треугольника $A_1P_1E_1$ равна a^2. По доказанному в предыдущей задаче $\dfrac{18}{S_{APE}}=\dfrac{9a^2}{a^2}$, $S_{APE}=2$.

Ответ. 2.

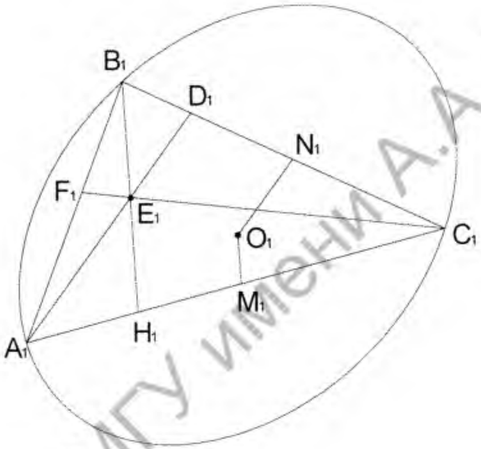
Задача 21. Даны проекции фигур на три плоскости – фронтальная, горизонтальная и профильная (вид спереди, сверху и сбоку). Постройте наглядные изображения этих фигур.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Указание. При решении этой задачи полезно использовать кусок проволоки длиной 35–40 см, с помощью которого "методом проб и ошибок" попытаться изготовить искомую фигуру. После этого нужно выполнить аксонометрическую проекцию полученной фигуры.

Например, на первом виде указаны проекции двух окружностей одинакового радиуса, лежащих в параллельных плоскостях и соединенных сверху отрезком, перпендикулярным к этим плоскостям.

Задача 22. Дано изображение окружности и вписанного в нее треугольника. Постройте изображения высот треугольника.

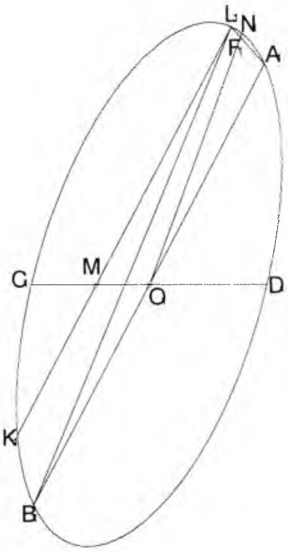


Решение. На изображении окружности строим изображение ее центра O_1 (как это сделать?). Соединяем полученную точку O_1 с серединами M_1 и N_1 отрезков A_1C_1 и B_1C_1. Проводим $A_1D_1 \| O_1N_1$ и $B_1H_1 \| O_1M_1$. Через точку E_1 пересечения отрезков A_1D_1 и B_1H_1 проводим отрезок C_1F_1. Отрезки A_1D_1, B_1H_1, C_1F_1 – изображения высот вписанного в окружность треугольника.

Задача 23. Дано изображение окружности и описанного около нее треугольника. Постройте изображения высот этого треугольника.

Для решения можно воспользоваться решением предыдущей задачи, приняв за точки M и N изображения точек касания.

Задача 24. На изображении круга постройте изображение сектора с углом 15^0 и сегмента с дугой 150^0.



Решение. Строим сопряженные диаметры A_1B_1 и C_1D_1 (как это сделать?). Делим пополам отрезок C_1O_1 и через полученную точку M_1 проводим $K_1L_1 \| A_1B_1$, Разделим пополам отрезок A_1L_1 и через полученную точку F_1 проводим отрезок O_1N_1. Сектор $A_1O_1N_1$ – искомый сектор, а сегмент $L_1C_1B_1$ – искомый сегмент.

Задача 25. Можно ли любой четырехугольник параллельно спроектировать на плоскость в четырехугольник с равными и перпендикулярными сторонами?

Учтем, что середины сторон данного четырехугольника являются вершинами параллелограмма. Спроектируем этот параллелограмм на плоскость в квадрат.

3. Линии чертежа. Линии, которыми на чертеже изображают видимые очертания предмета, называются сплошными основными. Эти линии имеют толщину 0,6–1,5 мм.

Для невидимых очертаний предмета применяют линию, называемую штриховой. Штриховая линия состоит из отдельных черточек одинаковой длины. Длину каждого штриха в зависимости от величины изображения выбирают от 2 до 8 мм, но на одном и том же чертеже длина всех штрихов должна быть обязательно одинаковой. Расстояния между штрихами должны быть от 1 до 2 мм, но одинаковыми на всем чертеже. Толщина штриховой линии должна быть в 2-3 раза меньше, чем толщина основной сплошной линии.

Для обозначения оси симметрии фигуры используют штрихпунктирную тонкую линию, которую называют осевой. Она состоит из длинных тонких штрихов, длина которых равна 5–30 мм, и точек между ними. Расстояние между штрихами 3–5 мм. Толщина тонкой линии в 2-3 раза меньше, чем толщина основной сплошной линии. Штрих-пунктирная линия используется для указания центра окружности. При этом положение центра должно определяться пересечением штрихов, а не точек.

Для указания размеров на чертеже с помощью выносных размерных линий, для обозначений линий сгиба на развертках фигур применяются сплошные тонкие линии, толщина которых в 2-3 раза меньше, чем толщина основной сплошной линии.

На чертежах изображения больших фигур уменьшают, а малых – увеличивают по сравнению с действительными размерами (пользуются масштабом). Но при этом размеры на чертеже проставляют действительные, то есть те, которые фигура имеет в натуре.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Василевский, А. Б.*** Метод параллельных проекций / А. Б. Василевский. – Минск : Народная асвета, 1985.
2. Сборник задач по геометрии для 9–10 классов / И. С. Герасимова [и др.]. – М. : Просвещение, 1977.
3. ***Лоповок, Л. М.*** Изображение фигур в стереометрии. "Преподавание геометрии в 9–10 классах" / Л. М. Лоповок. – М. : Просвещение, 1980.
4. ***Четверухин, Н.Ф.*** Изображение фигур в курсе геометрии / Н. Ф. Четверухин. – М. : Учпедгиз, 1958.

Поступила в редакцию 15.09.2014 г.
Контакты: Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt (Кирьяцкий Эдуард Григорьевич)

Kiryatski E.G., Matiuhin V.I. SOLVING PROBLEMS ON THE PROJECTION DRAWING.

The method of parallel projections is discussed in much detail with a large number of examples and tasks. While applying this method the major methodological objective is to develop student's spacial imagination.

Key words: depiction, graphics, drawing, metric properties, affine properties.