УДК 539.21

Т.В. ДРОБЫШЕВСКАЯ, О.М. ОСТРИКОВ

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННОГО ЕДИНИЧНЫМ ДВОЙНИКОМ В ЗЕРНЕ ПОЛИКРИСТАЛЛА

Разработана методика расчета напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным двойником в зерне поликристалла. Установлено, что максимальные нормальные и скалывающие напряжения локализованы в узловых точках зерна и на двойниковых границах, а также на границах зерна.

Введение

В настоящее время решение задачи о расчете напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным двойником в зерне поликристалла, является весьма важным, так как позволит разработать методики по прогнозированию и предотвращению связанного с двойникованием разрушения деталей машин. Для наиболее полного решения данной задачи помимо напряжений, обусловленных наличием двойника в зерне поликристалла, необходимо учитывать напряжения, созданные зерненными границами, которые с точки зрения распределения деформаций играют роль внутренних концентраторов напряжения [1].

Целью данной работы стало изучение напряженно-деформированного состояния, обусловленного единичным микродвойником в зерне поликристалла.

Постановка задачи. Рассмотрим зерно поликристалла, находящееся вдали от поверхности двойникующегося материала. Границы зерна поликристалла представляем как стенки полных дислокаций (рис. 1).

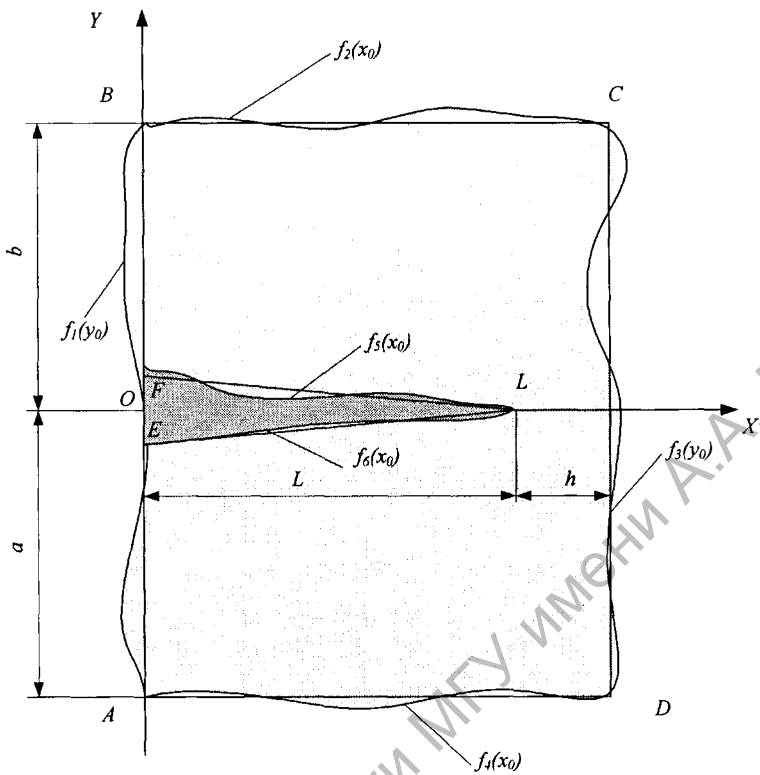

Рисунок 1. Схематическое изображение зерна поликристалла и клиновидного двойника в нем

В теле зерна размещен единичный клиновидный двойник. Такие двойники обычно зарождаются у концентратора напряжений, который в нашем случае находится в точке O (рис. 1). В решении поставленной задачи напряжения, которые создает данный концентратор напряжений, учитывать не будем. Рассмотрим лишь те напряжения, которые создает сам двойник, а также напряжения на границах зерна. Также не будем учитывать напряжения, обусловленные другими зернами поликристалла, так как все это приведет к громоздкости решения.

В общем случае в плоскости XOY форма границ зерна описывается функциями $f_1(y_0), f_2(x_0), f_3(y_0), f_4(x_0)$; а форма границ клиновидного двойника – функциями $f_5(x_0)$ и $f_6(x_0)$ (рис. 1) [2, 3]. Принимаем, что дислокации на каждой из рассматриваемых границ параллельны друг другу и оси OZ, перпендикулярной плоскости рис. 1. Плотность полных дислокаций на границах зерна равна ρ_1, ρ_2, ρ_3 и ρ_4 соответственно. Плотность двойникующих дислокаций на границах клиновидного двойника равна ρ_5, ρ_6. Тогда смещения, создаваемые рассматриваемым клиновидным двойником с учетом смещений на границах зерна, в соответствии с принципом суперпозиции компонент тензора смещений, могут быть определены по формуле:

$$u_i = \sum_{m=1}^{6} u_i^{(m)}(x,y), \qquad (1)$$

где i принимает значения x, y или z; $u_i^{(1)}(x,y)$, $u_i^{(2)}(x,y)$, $u_i^{(3)}(x,y)$, $u_i^{(4)}(x,y)$, $u_i^{(5)}(x,y)$, $u_i^{(6)}(x,y)$ – смещения, создаваемые соответствующими границами (двойниковыми или зеренными). Данные смещения определяются с помощью криволинейного интеграла вдоль профилей соответствующих границ L_{AB}, L_{BC}, L_{CD}, L_{DA}, L_{FH}, L_{EH}:

$$u_i^{(m)}(x,y) = \int \rho_m u_i^{(m,0)} ds. \qquad (2)$$

Здесь $u_i^{(m,0)}$ – смещения, создаваемые отдельными дислокациями на зеренных или двойниковых границах.

Следует отметить, что использованный в данной задаче принцип суперпозиции правомерен, так как в нашем случае источники внутренних напряжений неподвижны [2].

Криволинейные интегралы (2) в соответствии с [3] сводятся к следующим определенным интегралам:

$$u_i^{(1)}(x,y) = \int_{-a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \sqrt{\left(1+f_1'(y_0)\right)^2}\, \rho_1(y_0) u_i^{(1,0)}(x,y,y_0)\, dy_0; \qquad (3)$$

$$u_i^{(2)}(x,y) = \int_{0}^{L+h} \sqrt{\left(1+f_2'(x_0)\right)^2}\, \rho_2(x_0) u_i^{(2,0)}(x,y,x_0)\, dx_0; \qquad (4)$$

$$u_i^{(3)}(x,y) = \int_{-a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} \sqrt{\left(1+f_3'(y_0)\right)^2}\, \rho_3(y_0) u_i^{(3,0)}(x,y,y_0)\, dy_0; \qquad (5)$$

$$u_i^{(4)}(x,y) = \int_{0}^{L+h} \sqrt{\left(1+f_4'(x_0)\right)^2}\, \rho_4(x_0) u_i^{(4,0)}(x,y,x_0)\, dx_0; \qquad (6)$$

$$u_i^{(5)}(x,y) = \int_{0}^{L} \sqrt{\left(1+f_5'(x_0)\right)^2}\, \rho_5(x_0) u_i^{(5,0)}(x,y,x_0)\, dx_0; \qquad (7)$$

$$u_i^{(6)}(x,y) = \int_{0}^{L} \sqrt{\left(1+f_6'(x_0)\right)^2}\, \rho_6(x_0) u_i^{(6,0)}(x,y,x_0)\, dx_0, \qquad (8)$$

где L – длина двойника, равна длине отрезка OL (рис. 1); a, b, h – параметры, определяющие размер зерна; ε – малый параметр порядка межатомного расстояния.

При расчетах будем учитывать представленную на рис. 2 ориентировку винтовой и краевой составляющих векторов Бюргерса. При условии нахождения рассматриваемого зерна вдали от поверхности смещения, создаваемые единичными полными и двойникующими дислокациями, расположенными на соответствующей границе, в соответствии с [3] и [4], могут быть определены из соотношений:

$$u_x^{(1,0)} = \frac{b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-f_1(y_0)} + \frac{(x-f_1(y_0))(y-y_0)}{2(1-\nu)\left((x-f_1(y_0))^2+(y-y_0)^2\right)}\right],$$

$$u_y^{(1,0)} = -\frac{b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi}\left[\frac{1-2\nu}{2\pi}\ln\left((x-f_1(y_0))^2+(y-y_0)^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(x-f_1(y_0))^2+(y-y_0)^2}{4(1-\nu)\left((x-f_1(y_0))^2+(y-y_0)^2\right)}\right],$$

$$u_z^{(1,0)} = \frac{b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-f_1(y_0)}; \tag{9}$$

$$u_x^{(2,0)} = -\frac{b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi}\left[\frac{1-2\nu}{2\pi}\ln\left((y-f_2(x_0))^2+(x-x_0)^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(y-f_2(x_0))^2+(x-x_0)^2}{4(1-\nu)\left((y-f_2(x_0))^2+(x-x_0)^2\right)}\right],$$

$$u_y^{(2,0)} = -\frac{b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{x-x_0}{y-f_2(x_0)}\right) - \frac{(y-f_2(x_0))(x-x_0)}{2(1-\nu)\left((y-f_2(x_0))^2+(x-x_0)^2\right)}\right],$$

$$u_z^{(2,0)} = \frac{b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(-\frac{x-x_0}{y-f_2(x_0)}\right); \tag{10}$$

$$u_x^{(3,0)} = -\frac{b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-f_3(y_0)} + \frac{(x-f_3(y_0))(y-y_0)}{2(1-\nu)\left((x-f_3(y_0))^2+(y-y_0)^2\right)}\right],$$

$$u_y^{(3,0)} = \frac{b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi}\left[\frac{1-2\nu}{2\pi}\ln\left((x-f_3(y_0))^2+(y-y_0)^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{(x-f_3(y_0))^2+(y-y_0)^2}{4(1-\nu)\left((x-f_3(y_0))^2+(y-y_0)^2\right)}\right],$$

$$u_z^{(3,0)} = \frac{b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-f_3(y_0)}; \tag{11}$$

$$u_x^{(4,0)} = \frac{b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi}\left[\frac{1-2\nu}{2\pi}\ln\left(\left(y-f_4(x_0)\right)^2+\left(x-x_0\right)^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(y-f_4(x_0)\right)^2+\left(x-x_0\right)^2}{4(1-\nu)\left(\left(y-f_4(x_0)\right)^2+\left(x-x_0\right)^2\right)}\right],$$

$$u_y^{(4,0)} = \frac{b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{x-x_0}{y-f_4(x_0)}\right)-\frac{\left(y-f_4(x_0)\right)(x-x_0)}{2(1-\nu)\left(\left(y-f_4(x_0)\right)^2+\left(x-x_0\right)^2\right)}\right],$$

$$u_z^{(4,0)} = \frac{b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(-\frac{x-x_0}{y-f_4(x_0)}\right); \qquad (12)$$

$$u_x^{(5,0)} = \frac{b_{\text{кр}}^{(2)}}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{y-f_5(x_0)}{x-x_0}+\frac{\left(y-f_5(x_0)\right)(x-x_0)}{2(1-\nu)\left(\left(y-f_5(x_0)\right)^2+\left(x-x_0\right)^2\right)}\right],$$

$$u_y^{(5,0)} = -\frac{b_{\text{кр}}^{(2)}}{2\pi}\left[\frac{1-2\nu}{2\pi}\ln\left(\left(y-f_5(x_0)\right)^2+\left(x-x_0\right)^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(x-x_0\right)^2-\left(y-f_5(x_0)\right)^2}{4(1-\nu)\left(\left(y-f_5(x_0)\right)^2+\left(x-x_0\right)^2\right)}\right],$$

$$u_z^{(5,0)} = \frac{b_{\text{в}}^{(2)}}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-f_5(x_0)}{x-x_0}; \qquad (13)$$

$$u_x^{(6,0)} = \frac{b_{\text{кр}}^{(2)}}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{y-f_6(x_0)}{x-x_0}+\frac{\left(y-f_6(x_0)\right)(x-x_0)}{2(1-\nu)\left(\left(y-f_6(x_0)\right)^2+\left(x-x_0\right)^2\right)}\right],$$

$$u_y^{(6,0)} = -\frac{b_{\text{кр}}^{(2)}}{2\pi}\left[\frac{1-2\nu}{2\pi}\ln\left(\left(y-f_6(x_0)\right)^2+\left(x-x_0\right)^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(x-x_0\right)^2-\left(y-f_6(x_0)\right)^2}{4(1-\nu)\left(\left(y-f_6(x_0)\right)^2+\left(x-x_0\right)^2\right)}\right],$$

$$u_z^{(6,0)} = \frac{b_{\text{в}}^{(2)}}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y-f_6(x_0)}{x-x_0}; \qquad (14)$$

где ν – коэффициент Пуассона, $b_{кр}^{(1)}$ – вектор Бюргерса полной краевой дислокации; $b_{в}^{(1)}$ – вектора Бюргерса полной винтовой дислокации; $b_{кр}^{(2)}$ – краевая составляющая вектора Бюргерса двойникующей дислокации; $b_{в}^{(2)}$ – винтовая составляющая вектора Бюргерса двойникующей дислокации.

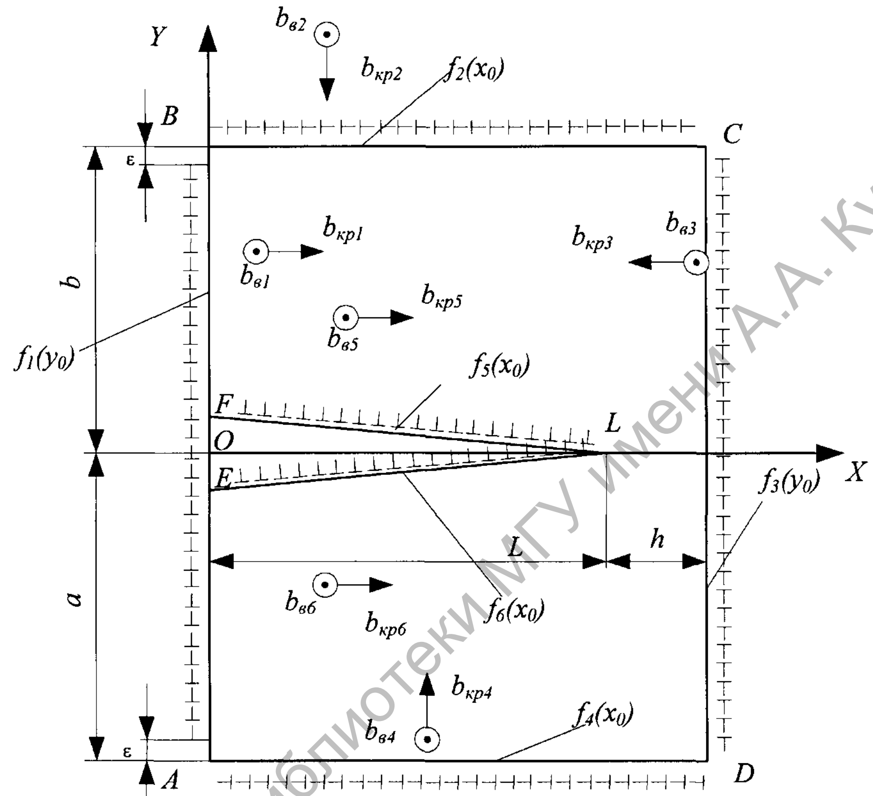

Рисунок 2. Схема взаимного расположения дислокаций, их компонент вектора Бюргерса и декартовой системы координат для расчета полей напряжений и смещений у клиновидного двойника в теле зерна

Поля напряжений, аналогично (1), могут быть определены из соотношения:

$$\sigma_{ij} = \sum_{m=1}^{6} \sigma_{ij}^{(m)}(x,y), \tag{15}$$

где $\sigma_{ij}^{(m)}(x,y) = \int \rho_m \sigma_{ij}^{(m,0)} ds$.

Здесь $\sigma_{ij}^{(1)}(x,y)$, $\sigma_{ij}^{(2)}(x,y)$, $\sigma_{ij}^{(3)}(x,y)$, $\sigma_{ij}^{(4)}(x,y)$ – напряжения, создаваемые каждой из границ зерна; $\sigma_{ij}^{(5)}(x,y)$ и $\sigma_{ij}^{(6)}(x,y)$ – напряжения, обусловленные двойниковыми границами. Данные напряжения определяются с помощью криволинейного интеграла вдоль профилей соответствующих границ L_{AB}, L_{BC}, L_{CD}, L_{DA}, L_{FH}, L_{EH}; $\sigma_{ij}^{(m,0)}$ – напряжения, создаваемые отдельными дислокациями на зеренных или двойниковых границах соответственно.

Криволинейные интегралы (16) сводятся к следующим определенным интегралам:

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x,y)=\int\limits_{-a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\sqrt{\left(1+f_1'(y_0)\right)^2}\rho_1(y_0)\sigma_{ij}^{(1,0)}(x,y,y_0)dy_0; \quad (17)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(x,y)=\int\limits_{0}^{L+h}\sqrt{\left(1+f_2'(x_0)\right)^2}\rho_2(x_0)\sigma_{ij}^{(2,0)}(x,y,x_0)dx_0; \quad (18)$$

$$\sigma_{ij}^{(3)}(x,y)=\int\limits_{-a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\sqrt{\left(1+f_3'(y_0)\right)^2}\rho_3(y_0)\sigma_{ij}^{(3,0)}(x,y,y_0)dy_0; \quad (19)$$

$$\sigma_{ij}^{(4)}(x,y)=\int\limits_{0}^{L+h}\sqrt{\left(1+f_4'(x_0)\right)^2}\rho_4(x_0)\sigma_{ij}^{(4,0)}(x,y,x_0)dx_0; \quad (20)$$

$$\sigma_{ij}^{(5)}(x,y)=\int\limits_{0}^{L}\sqrt{\left(1+f_5'(x_0)\right)^2}\rho_5(x_0)\sigma_{ij}^{(5,0)}(x,y,x_0)dx_0; \quad (21)$$

$$\sigma_{ij}^{(6)}(x,y)=\int\limits_{0}^{L}\sqrt{\left(1+f_6'(x_0)\right)^2}\rho_6(x_0)\sigma_{ij}^{(6,0)}(x,y,x_0)dx_0. \quad (22)$$

Напряжения $\sigma_{ij}^{(m,0)}$, создаваемые единичными полными и двойникующими дислокациями, расположенными на соответствующей границе, с учетом принятого направления составляющих вектора Бюргерса и при условии нахождения рассматриваемого зерна вдали от поверхности, определяются следующим образом:

$$\sigma_{xx}^{(1,0)}=-\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)}\frac{(y-y_0)\left[3\left(x-f_1(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2\right]}{\left[\left(x-f_1(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(1,0)}=\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)}\frac{(y-y_0)\left[\left(x-f_1(y_0)\right)^2-(y-y_0)^2\right]}{\left[\left(x-f_1(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{xy}^{(1,0)}=\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)}\frac{\left(x-f_1(y_0)\right)\left[\left(x-f_1(y_0)\right)^2-(y-y_0)^2\right]}{\left[\left(x-f_1(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(1,0)} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}\nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y-y_0}{\left(x-f_1(y_0)\right)^2+\left(y-y_0\right)^2},$$

$$\sigma_{xz}^{(1,0)} = -\frac{\mu b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi} \frac{y-y_0}{\left(x-f_1(y_0)\right)^2+\left(y-y_0\right)^2},$$

$$\sigma_{yz}^{(1,0)} = \frac{\mu b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi} \frac{x-f_1(y_0)}{\left(x-f_1(y_0)\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}; \qquad (23)$$

$$\sigma_{xx}^{(2,0)} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0)\left[\left(y-f_2(x_0)\right)^2-(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_2(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(2,0)} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0)\left[3\left(y-f_2(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_2(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{xy}^{(2,0)} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{\left(y-f_2(x_0)\right)\left[\left(y-f_2(x_0)\right)^2-(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_2(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(2,0)} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}\nu}{\pi(1-\nu)} \frac{x-x_0}{\left(y-f_2(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2},$$

$$\sigma_{xz}^{(2,0)} = -\frac{\mu b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi} \frac{y-f_2(x_0)}{\left(y-f_2(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2},$$

$$\sigma_{yz}^{(2,0)} = \frac{\mu b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi} \frac{x-x_0}{\left(y-f_2(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2}; \qquad (24)$$

$$\sigma_{xx}^{(3,0)} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-y_0)\left[3\left(x-f_3(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2\right]}{\left[\left(x-f_3(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(3,0)} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(y-y_0)\left[\left(x-f_3(y_0)\right)^2-(y-y_0)^2\right]}{\left[\left(x-f_3(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{xy}^{(3,0)} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{\left(x-f_3(y_0)\right)\left[\left(x-f_3(y_0)\right)^2-(y-y_0)^2\right]}{\left[\left(x-f_3(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(3,0)} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}\nu}{\pi(1-\nu)} \frac{y-y_0}{\left(x-f_3(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2},$$

$$\sigma_{xz}^{(3,0)} = -\frac{\mu b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi} \frac{y-y_0}{\left(x-f_3(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2},$$

$$\sigma_{yz}^{(3,0)} = \frac{\mu b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi} \frac{x-f_3(y_0)}{\left(x-f_3(y_0)\right)^2+(y-y_0)^2}; \tag{25}$$

$$\sigma_{xx}^{(4,0)} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0)\left[\left(y-f_4(x_0)\right)^2-(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_4(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(4,0)} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0)\left[3\left(y-f_4(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_4(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{xy}^{(4,0)} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{\left(y-f_4(x_0)\right)\left[\left(y-f_4(x_0)\right)^2-(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_4(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(4,0)} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^{(1)}\nu}{\pi(1-\nu)} \frac{x-x_0}{\left(y-f_4(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2},$$

$$\sigma_{xz}^{(4,0)} = -\frac{\mu b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi} \frac{y-f_4(x_0)}{\left(y-f_4(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2},$$

$$\sigma_{yz}^{(4,0)} = \frac{\mu b_{\text{в}}^{(1)}}{2\pi} \frac{x-x_0}{\left(y-f_4(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2}; \tag{26}$$

$$\sigma_{xx}^{(5,0)} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0)\left[3\left(y-f_5(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_5(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(5,0)} = \frac{\mu b_{\text{кр}}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)} \frac{(x-x_0)\left[\left(y-f_5(x_0)\right)^2-(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_5(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{xy}^{(5,0)}=\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)}\frac{\left(y-f_5(x_0)\right)\left[\left(y-f_5(x_0)\right)^2-(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_5(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(5,0)}=-\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(2)}\nu}{\pi(1-\nu)}\frac{x-x_0}{\left(y-f_5(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2},$$

$$\sigma_{xz}^{(5,0)}=-\frac{\mu b_{\text{в}}^{(2)}}{2\pi}\frac{x-x_0}{\left(y-f_5(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2},$$

$$\sigma_{yz}^{(5,0)}=\frac{\mu b_{\text{в}}^{(2)}}{2\pi}\frac{y-f_5(x_0)}{\left(y-f_5(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2}; \qquad (27)$$

$$\sigma_{xx}^{(6,0)}=-\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)}\frac{(x-x_0)\left[3\left(y-f_6(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_6(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(6,0)}=\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)}\frac{(x-x_0)\left[\left(y-f_6(x_0)\right)^2-(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_6(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{xy}^{(6,0)}=\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(2)}}{2\pi(1-\nu)}\frac{\left(y-f_6(x_0)\right)\left[\left(y-f_6(x_0)\right)^2-(x-x_0)^2\right]}{\left[\left(y-f_6(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2\right]^2},$$

$$\sigma_{zz}^{(6,0)}=-\frac{\mu b_{\text{кр}}^{(2)}\nu}{\pi(1-\nu)}\frac{x-x_0}{\left(y-f_6(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2},$$

$$\sigma_{xz}^{(6,0)}=-\frac{\mu b_{\text{в}}^{(2)}}{2\pi}\frac{x-x_0}{\left(y-f_6(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2},$$

$$\sigma_{yz}^{(6,0)}=\frac{\mu b_{\text{в}}^{(2)}}{2\pi}\frac{y-f_6(x_0)}{\left(y-f_6(x_0)\right)^2+(x-x_0)^2}. \qquad (28)$$

Здесь μ – модуль сдвига.

Рассмотрим случай, когда $\rho_1=\rho_2=\rho_3=\rho_4=C_1$; $\rho_5=\rho_6=C_2$. Также примем допущение, что границы зерна прямолинейны и параллельны соответствующим осям (*OX* или *OY*). При этом в плоскости *XOY* зерно имеет форму прямоугольника длиной (a+b) и шириной (L+h). Тогда в соответствии с рис. 2 в рассматриваемом случае будем иметь:

$$f_1(y_0)=0, \tag{29}$$

$$f_2(y_0)=b, \tag{30}$$

$$f_3(y_0)=L+h, \tag{31}$$

$$f_4(y_0)=-a. \tag{32}$$

Пусть границы двойника – прямолинейны. При этом двойник имеет форму равнобедренного треугольника EFL (рис. 2) с шириной у устья H. Тогда функции, описывающие форму границ двойника в плоскости XOY, примут вид [3]:

$$f_5(x_0)=\frac{H}{2}\left(1-\frac{x_0}{L}\right), \tag{33}$$

$$f_6(x_0)=-\frac{H}{2}\left(1-\frac{x_0}{L}\right). \tag{34}$$

Результаты расчетов и их обсуждение. Расчеты проводились для железа. При этом принималось: $b_{\text{кр}}^{(1)}=b_{\text{в}}^{(1)}=0,248$ нм; $b_{\text{кр}}^{(2)}=b_{\text{в}}^{(2)}=0,124$ нм [5]; $\mu=81$ ГПа [6]; $\nu=0,29$ [5].

Результаты расчетов полей напряжений представлены на рис. 3, где четко просматриваются двойниковые границы и границы зерна, являющиеся концентраторами напряжений. Данный факт указывает на правомерность использования предложенной выше модели (23) – (28).

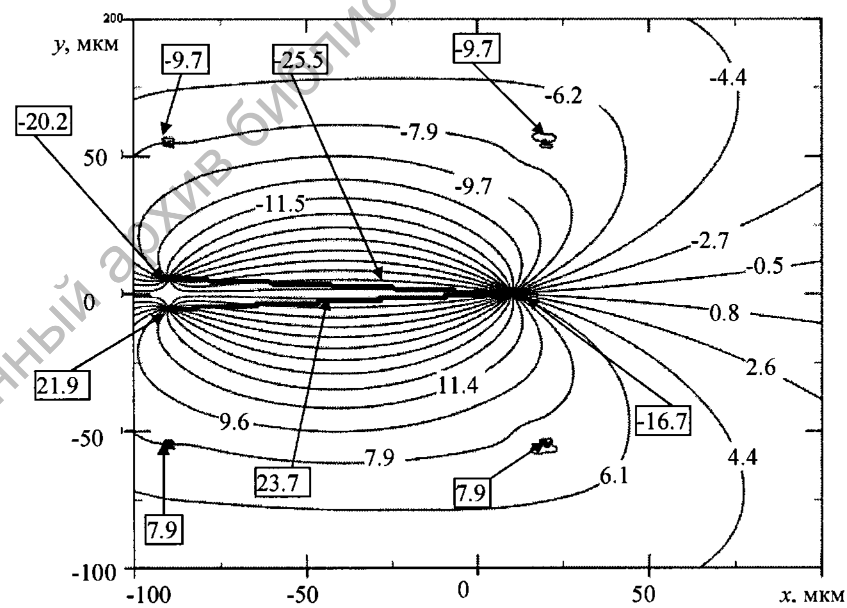

Рисунок 3, а. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{xx}(x,y)$

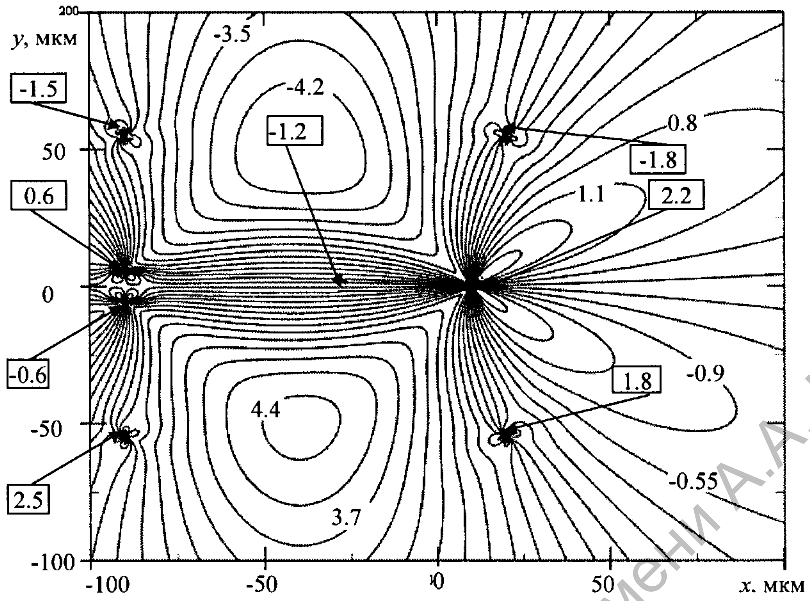

Рисунок 3, б. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{yy}(x,y)$

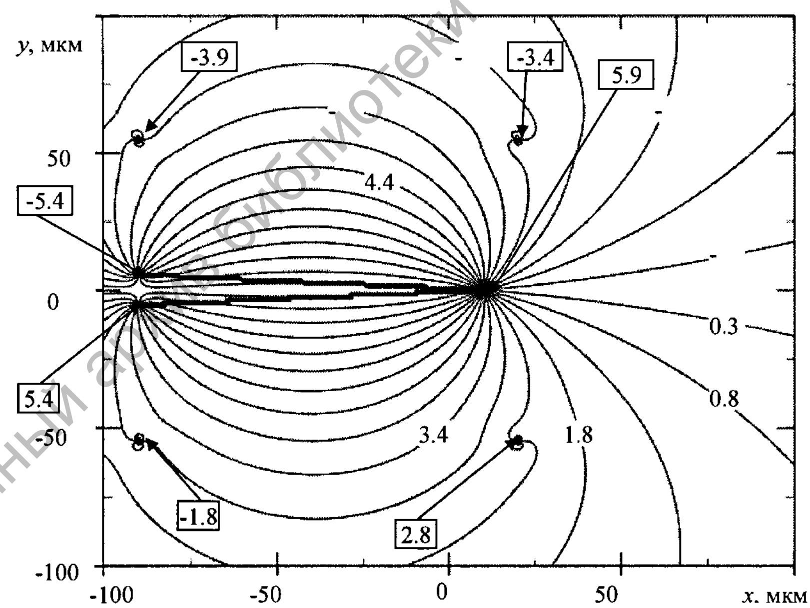

Рисунок 3, в. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{zz}(x,y)$

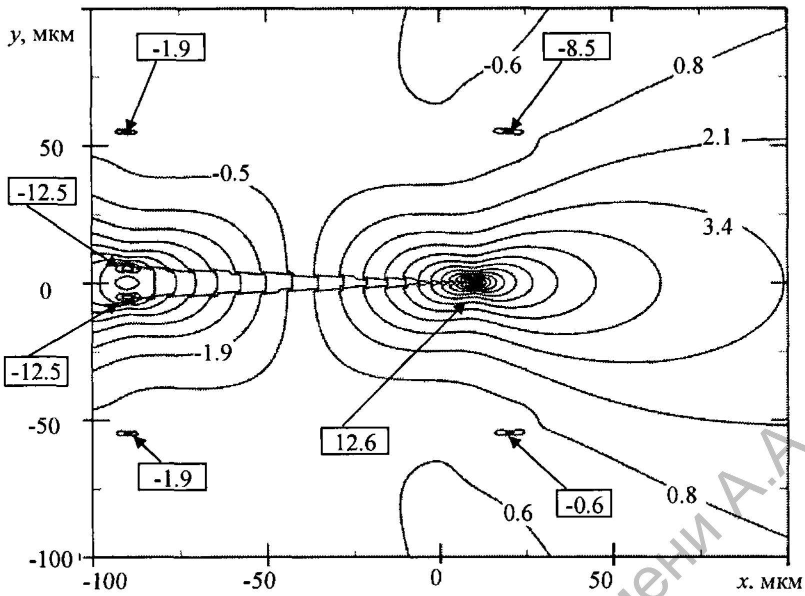

Рисунок 3, г. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{xy}(x,y)$

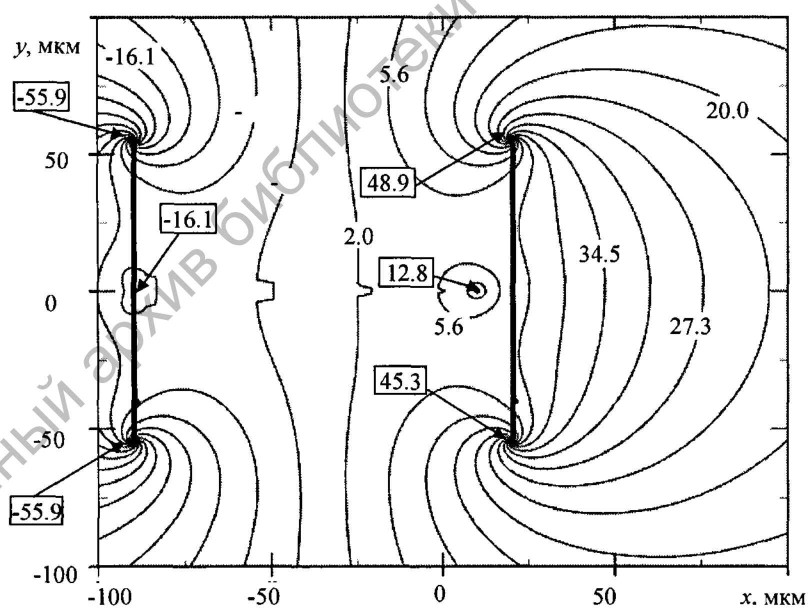

Рисунок 3, д. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{yz}(x,y)$

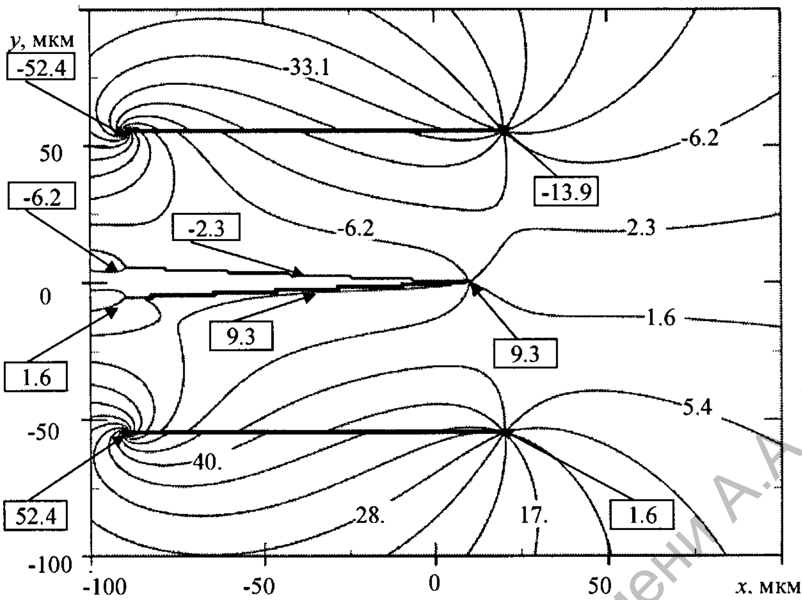

Рисунок 3, е. Распределение напряжений в зерне поликристалла, обусловленных наличием единичного клиновидного двойника: $\sigma_{xz}(x,y)$

Из рис. 3 видно, что максимальные нормальные и скалывающие σ_{xy} напряжения локализованы в узловых точках зерна и на двойниковых границах, скалывающие напряжения σ_{zy} локализованы на вертикальных границах зерна, а σ_{xz} – на горизонтальных границах зерна.

Высокая концентрация напряжений в основном наблюдается в узловых точках зерна (рис. 3, а – 3, г) и у вершины двойника (рис. 3, а; рис. 3, в – 3, е). Численные значения этих напряжений могут быть найдены из (23) – (28) и (15) при соответствующих значениях x и y. Следует отметить, что наиболее высокая концентрация скалывающих напряжений σ_{yz} наблюдается на вертикальных границах зерна (рис 3, д), а σ_{xz} – на горизонтальных (рис. 3, е). Это обусловлено тем, что мощность вектора Бюргерса полной дислокации зерна выше мощности вектора Бюргерса частичной двойникующей дислокации.

Нормальные напряжения σ_{xx} (рис. 3, а) и σ_{zz} (рис. 3, в) знакопеременны относительно оси OX и относительно вершины двойника. Они положительны в первой и третьей четвертях, а отрицательны во второй и четвертой. Таким образом, у одной из границ клиновидного двойника напряжения σ_{xx} сжимающие, а у другой – растягивающие.

Нормальные напряжения σ_{yy} локализованы только в узловых точках зерна, при этом двойниковые напряжения перекрываются напряжениями на границах зерна (рис. 3, б).

Скалывающие напряжения σ_{xy} знакопеременны по отношению к оси, параллельной оси OY и проходящей через середину двойника. У вершины двойника данные напряжения отрицательны, а у устья – положительны. При этом в вершинах зерна данные напряжения отрицательны. Максимальные значения скалывающих напряжений σ_{xy} можно отметить у вершины двойника, а минимальные – в средней части двойника (рис. 3, г).

Напряжения σ_{zy} (рис. 3, д) локализованы на вертикальных границах зерна. При этом на границе, примыкающей к устью двойника они имеют положительный знак, а на параллельной ей границе – отрицательный и вновь на положительный. Максимальные значения напряжений при этом можно отметить в узловых точках зерна.

Напряжения σ_{zx} (рис. 3, е) локализованы на горизонтальных границах зерна. При этом на верхней границе они максимальны и имеют отрицательный знак, а на параллельной ей границе напряжения – минимальны и имеют отрицательный знак. Максимальные значения напряжений при этом можно отметить в узловых точках границы зерна, прилегающей к устью двойника.

Таким образом, разработан метод расчета полей смещений и напряжений, обусловленных наличием единичного микродвойника в зерне поликристалла. Выявлены узловые точки в зернах поликристалла, имеющие максимальные напряжения и смещения. Метод позволяет изучать влияние зеренных границ на напряженно-деформированное состояние, обусловленное двойникованием.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Немец, Я.*** Жесткость и прочность стальных деталей : сокр. пер. с чеш. / Я. Немец ; под ред. С.В. Серенсена. – М. : Машиностроение, 1970. – 528 с.
2. ***Остриков, О.М.*** Дислокационная макроскопическая модель клиновидного двойника / О.М. Остриков // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. – 2006. – № 2. – С. 10–18.
3. ***Остриков, О.М.*** Механика двойникования твердых тел : монография / О.М. Остриков. – Гомель : ГГТУ им. П.О. Сухого, 2008. – 301 с.
4. ***Хирт, Дж.*** Теория дислокаций / Дж. Хирт, И. Лоте. – М. : Атомиздат, 1972. – 600 с.
5. ***Полухин, П.И.*** Физические основы пластической деформации / П.И. Полухин, С.С. Горелик, В.К. Воронцов. – М. : Металлургия, 1982. – 584 с.
6. ***Китель, Ч.*** Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. – М. : Наука, 1978. – 792 с.

Поступила в редакцию 06.02.2014 г.