УДК 514

Э.Г. КИРЬЯЦКИЙ, В.И. МАТЮХИН

ИЗОБРАЖЕНИЕ ФИГУР В ГЕОМЕТРИИ

Рассматриваются основные правила выполнения чертежей геометрических фигур, расположенных на плоскости и в пространстве. Приведено большое количество упражнений на построение изображений.

В связи с тем, что графические навыки учащихся и преподавателей ухудшились, неточности в чертежах встречаются даже в учебной литературе, возникает необходимость напомнить основные правила, которые при выполнении чертежей необходимо соблюдать.

Совокупность правил, позволяющих построить изображение фигуры, называется методом изображения. К методам изображения предъявляются два основных требования: 1) наглядность, 2) удобоизмеримость.

Первое требование означает, что всякий человек, рассматривающий изображение, должен понимать, что оно отображает. Изображение должно вызывать зрительное впечатление, сходное с тем, какое вызывает оригинал (при этом мы имеем в виду только геометрическую форму). Второе требование означает, что по изображению можно восстановить оригинал.

Изображение не всегда определяет оригинал метрически точно: существуют методы изображения, определяющие оригинал только с точностью до подобия. В таких случаях требуются дополнительные соглашения, чтобы изображение метрически определяло оригинал.

Указанные требования противоречат друг другу, поэтому при выборе метода изображения приходится идти на компромисс между наглядностью и возможностью получить метрически определенное изображение. Таким компромиссом в геометрии является метод параллельного проектирования. При этом процесс построения изображения близок к процессу нашего зрения, что делает изображение наиболее наглядным.

При параллельном проектировании некоторые свойства фигур теряются (не переносятся на изображение), а другие – сохраняются. Эти последние называются инвариантными относительно параллельного проектирования. Например, инвариантными будут: свойство трех точек лежать на одной прямой; свойство двух прямых быть параллельными; отношение длин двух отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

Метод параллельного проектирования на плоскость заключается в том, что точки пространства сначала проектируются параллельно указанному направлению, а затем полученное на плоскости изображение подвергается преобразованию подобия. Поэтому точку M_1 на изображении не следует считать непосредственной проекцией точки M.

Изображения бывают жесткими и свободными. При жестком изображении должны быть известны все параметры, характеризующие метод изображения и положение фигуры. Такие изображения строятся в начертательной геометрии. При использовании изображений с иллюстративной целью пользуются свободным изображением, когда параметры, характеризующие метод изображения и положение оригинала, неизвестны. Когда учитель для иллюстрации теоремы чертит на доске изображение параллелепипеда, то ему безразлично то, как расположен в пространстве оригинал. Ему важно, чтобы изображение было “похоже” на параллелепипед. Владение теорией свободных изображений необходимо каждому учителю математики.

1. В основе правил построения чертежей лежит метод проекций. Чтобы построить изображение предмета (фигуры) по этому методу, необходимо через точки на предмете (фигуре) провести воображаемые лучи до встречи их с плоскостью проекций.

Если проецирующие лучи исходят из одной точки, то проецирование называется центральным, эта точка называется центром проецирования, а полученное изображение – центральной проекцией или перспективой.

Если проецирующие лучи параллельны друг другу, то проецирование называется параллельным, а полученное изображение – параллельной проекцией. Если направление проецирования с плоскостью проекций образует острый угол, то проецирование называется косоугольным. Если же этот угол равен – 90^0, то проецирование называется прямоугольным (ортогональным), а полученное при этом изображение называется прямоугольной (ортогональной) проекцией предмета.

Параллельность прямых, отношение длин отрезков, лежащих на параллельных прямых или на одной прямой – инварианты ортогонального проектирования. Длины отрезков и величины углов при таком проецировании не сохраняются.

Метод прямоугольного проецирования на две взаимно перпендикулярные плоскости был разработан в конце XVIII в. французским математиком Гаспаром Монжем (1746–1818) и носит его имя.

2. Напомним, что в черчении используется проецирование на три попарно перпендикулярные плоскости xOy, xOz, и yOz – вид сверху (горизонтальная проекция), вид спереди (фронтальная проекция) и вид сбоку (профильная проекция). Развертка этих изображений в одной плоскости – эпюра.

Если $\angle\, xOz = 90^0$, $\angle\, xOy = 135^0$, то проекция называется фронтальной диметрической (или кабинетной). При этом размеры по осям Ox и Oz берутся без искажений, а размеры по оси Oy сокращаются вдвое.

Если $\angle\, xOz = \angle\, xOy = 120^0$, то проекция называется изометрической. При этом размеры по всем осям берутся без искажений.

Фронтальная диметрическая и изометрическая проекции называются аксонометрическими проекциями (аксонометрия (греч.) – измерение по осям).

Проекцией квадрата в изометрии является ромб. Окружность, вписанная в квадрат, изображается эллипсом. Эллипс строить трудно, поэтому на практике его заменяют овалом – кривой, состоящей из дуг окружности.

Для упрощения работы по выполнению наглядных изображений часто пользуются техническими рисунками – изображениями, выполненными на глаз и от руки по правилам аксонометрии.

При изображении прямоугольного параллелепипеда в изометрии его измерения располагают параллельно осям Ox, Oy и Oz. При этом грани изображаются параллелограммами.

При построении изометрии призмы чертеж начинают с изображения основания, расположив его параллельно горизонтальной плоскости.

Построение изометрии правильной пирамиды начинают с основания, а затем из центра основания восставляют перпендикуляр.

Способы построения изометрии цилиндра и конуса схожи: проводят оси Ox и Oy, на которых строят ромб со стороной, равной диаметру основания, вписывают в него овал и вдоль оси Oz откладывают высоту; для цилиндра и усеченного конуса строят второй овал и проводят касательные к овалам.

На чертежах наносятся габаритные размеры – размеры, определяющие предельные величины внешних или внутренних очертаний фигуры.

Сечение – это изображение фигуры, получающейся при мысленном рассечении предмета плоскостью. На сечении показывают только то, что находится непосредственно в секущей плоскости. Фигуру сечения на чертеже выделяют штриховкой, которую наносят тонкими линиями под углом 45^0. По расположению на чертеже сечения разделяются на вынесенные и наложенные. Вынесенные располагают вне контура изображения фигуры на любом месте листа чертежа, наложенные – непосредственно на чертеже. Контур вынесенного сечения обводят сплошной толстой основной линией, а контур наложенного сечения – сплошной тонкой линией. Сечения выполняют в том же масштабе, что и изображение, к которому оно относится, или указывают масштаб, если он изменен.

3. К чертежам геометрических тел в пространстве не предъявляются требования соблюдения метрических характеристик фигуры. Учитель не связан необходимостью выбирать направления осей, находить коэффициенты искажения. Проекции при этом используются для решения позиционных задач, то есть таких, в которых требуется построить форму сечения тела, линию пересечения поверхностей, определить принадлежность точки к данной плоскости и т. д. Решая такие задачи, не требуется при построении изображения находить длины отрезков, величины углов и т. п. Но не следует думать, что такие чертежи характерны полным произволом в построении изображений. Являясь параллельными проекциями, они строятся с учетом основных свойств параллельного проецирования.

Какие геометрические свойства конкретных фигур не сохраняются при проецировании, а какие сохраняются?

Квадрат, ромб, прямоугольник, параллелограмм после параллельного проецирования сохраняют параллельность противолежащих сторон, свойство диагоналей делиться пополам в точке их пересечения. Но все они утрачивают истинную величину углов, а квадрат и ромб теряют, кроме того, равенство прилежащих сторон. Не сохраняются прямые углы между диагоналями квадрата и ромба, не сохраняется равенство диагоналей квадрата и прямоугольника. Указанные фигуры теряют свои индивидуальные черты, по которым мы их раньше узнавали.

В мире проекций теряют смысл такие термины, как прямоугольный, остроугольный, тупоугольный, равнобедренный, равносторонний треугольники; правильный многоугольник и т. д.

4. Рассмотрим несколько задач, связанных с построением изображений геометрических фигур.

Задача 1. Дана параллельная проекция треугольника. Постройте проекции медиан этого треугольника.

Решение. При параллельном проектировании сохраняется отношение длин отрезков прямой. Поэтому середины сторон треугольника проецируются в середины проекций этих сторон. Следовательно, проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

Задача 2. Дана параллельная проекция треугольника. Чем изобразится проекция средней линии треугольника, если плоскость треугольника не перпендикулярна плоскости проекций?

Ответ. Средней линией проекции треугольника.

Задача 3. Может ли при параллельном проецировании параллелограмма получиться трапеция?

Ответ. Нет.

Задача 4. Может ли проекция параллелограмма при параллельном проецировании быть квадратом.

Ответ. Может.

Задача 5. Докажите, что параллельная проекция центрально симметричной фигуры также является центрально-симметричной фигурой.

Указание. Образы любых двух центрально-симметричных точек этой фигуры будут центрально-симметричными точками изображения.

Задача 6. Дана параллельная проекция окружности и ее диаметра. Как построить проекцию перпендикулярного диаметра?

Указание. Параллельная проекция окружности – эллипс (если плоскость, в которой лежит окружность, не перпендикулярна плоскости проекций). Провести в эллипсе отрезок, параллельный проекции диаметра окружности, и разделить эти два отрезка пополам. Через полученные две точки провести прямую. Отрезок этой прямой, лежащий внутри эллипса, и будет изображением диаметра окружности, перпендикулярного данному диаметру.

Задача 7. Даны три точки. Сколько точек может получиться на плоскости проекций при проецировании данных точек?

Ответ. 3, 2 или 1.

Задача 8. Какой фигурой может быть параллельная проекция: а) плоскости; б) полуплоскости; в) угла, отличного от развернутого?

Ответ. а) Плоскостью или прямой; б) полуплоскостью, прямой или лучом; в) углом, прямой или лучом.

Задача 9. Известно, что отрезок и его проекция имеют равные длины. Как может быть расположен данный отрезок по отношению к плоскости проекций?

Ответ. Параллелен плоскости проекций; лежит в этой плоскости; лежит на прямой, пересекающей плоскость.

Задача 10. Если проекции двух прямых параллельны, то верно ли утверждение, что параллельны и проецируемые прямые.

Ответ. Нет. Они могут скрещиваться.

Задача 11. Даны точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, и их проекции A_1, B_1, C_1 на плоскость α. Плоскости ABC и α не параллельны. Постройте линию пересечения (след) плоскостей ABC и α.

Указание. Так как плоскость ABC не параллельна α, то по крайней мере две стороны треугольника ABC не параллельны плоскости α. Постройте точки пересечения (следы) прямых, на которых лежат эти стороны. Прямая, проходящая через эти следы, и будет искомым следом.

Задача 12. На изображении равностороннего треугольника построить изображение его центра.

Указание. Учесть, что центр правильного треугольника – точка пересечения его медиан.

Задача 13. На изображении равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) построить изображение ее высоты DE.

Указание. Если M и N – середины оснований трапеции (MN – ее ось симметрии), то $DE \parallel MN$. Так как при параллельном проецировании параллельность прямых сохраняется, то $M_1N_1 \parallel D_1E_1$. Отсюда построение: делим отрезки A_1B_1 и C_1D_1 пополам и через полученные точки M_1 и N_1 проводим прямую. Строим $D_1E_1 \parallel M_1N_1$. D_1E_1 – искомый отрезок.

Задача 14. Дано изображение произвольного треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около этого треугольника.

Указание. Центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам. Два из этих серединных перпендикуляров параллельны высотам треугольника, проведенным из противолежащих сторонам вершин. Отсюда построение: делим изображения сторон, к которым проведены высоты пополам и через полученные точки проводим прямые, параллельные изображениям данных высот. Точка пересечения этих прямых – изображение центра окружности, описанной около данного треугольника.

Задача 15. У треугольника ABC длины сторон AB и BC относятся как 2 : 3. Постройте изображение этого треугольника и изображение биссектрисы BD.

Указание. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону треугольника на отрезки, пропорциональные сторонам, прилежащим этим отрезкам. Поэтому $A_1D_1:D_1C_1 = 2 : 3$. Остается разделить проекцию A_1C_1 на 5 равных частей.

Задача 16. Постройте изображение прямоугольного треугольника ABC, длины катетов которого (AC и BC) относятся как 3 : 4.Постройте изображение центра окружности, вписанной в этот треугольник.

Указание. Если $AC = 3x$, $BC = 4x$, то по теореме Пифагора $AB = 5x$. Центр O вписанной в треугольник окружности – точка пересечения биссектрис этого треугольника. Биссектриса AE делит катет BC в отношении $CE : BE = 3:5$, а биссектриса BF делит катет AC в отношении $CF : AF = 4 : 5$. На изображении точка O_1 – точка пересечения A_1E_1, где $C_1E_1 : B_1E_1 = 3 : 5$, и B_1F_1, где $C_1F_1 : A_1F_1 = 4 : 5$.

Задача 17. Может ли изображением данного четырехугольника служить произвольный четырехугольник?

Ответ. Нет.

Замечание. Для случая треугольника утверждение задачи будет справедливо.

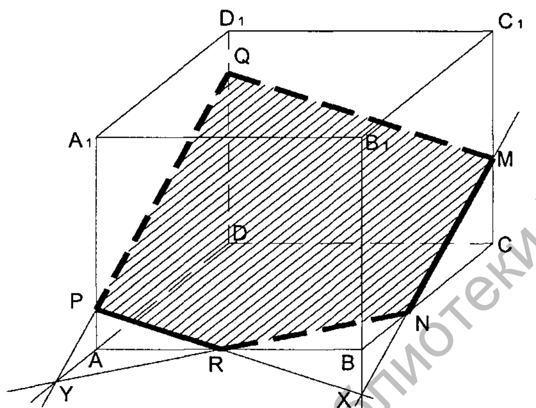
Задача 18. Постройте изображение квадрата, лежащего в плоскости равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90^0$), если сторона квадрата равна: а) катету данного треугольника; б) его гипотенузе.

Указание. а) На изображении $A_1B_1C_1$ данного треугольника провести $A_1D_1 \| B_1C_1$ и $B_1D_1 \| A_1C_1$. Четырехугольник $A_1C_1B_1D_1$ – искомое изображение. б) На луче A_1C_1 отложить $C_1E_1 = A_1C_1$, на луче B_1C_1 отложить $C_1F_1 = B_1C_1$. Четырехугольник $A_1F_1E_1B_1$ – искомое изображение.

Задача 19. Изобразите квадрат $ABCD$ в виде параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$. Постройте изображение равнобедренной трапеции с углом 45^0 так, чтобы отрезок C_1D_1 был изображением одного основания трапеции, а отрезок B_1C_1 – изображением ее высоты.

Указание. Боковые стороны трапеции параллельны диагоналям квадрата. Поэтому через точку D_1 провести прямую, параллельную A_1C_1, а через точку C_1 – прямую, параллельную B_1D_1. Точки пересечения этих прямых с прямой A_1B_1 вместе с точками C_1 и D_1 будут изображениями четырех вершин данной трапеции.

Задача 20. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки на ребрах AA_1, CC_1 и BC.

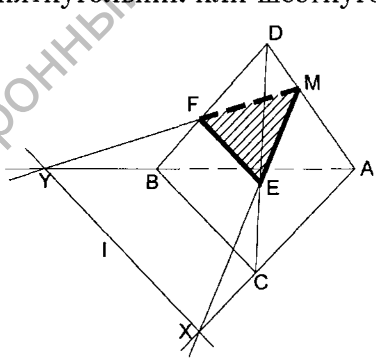


Решение. Пусть M, N, P – данные точки. Точки M и N лежат в одной плоскости B_1BC. Прямая MN пересекает лежащую в этой же плоскости прямую BB_1 в точке X.

Прямая PX пересекает прямую AB в точке R. Отрезки PR, RN, NM принадлежат искомому сечению.

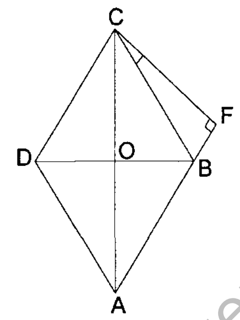
Прямая NR пересекает лежащую с ней в плоскости основания куба прямую AD в точке Y. Прямая RY – след секущей плоскости, т. е. линия пересечения секущей плоскости с плоскостью основания куба. Прямая PY пересекает DD_1 в точке Q. $MNRPQ$ – искомое сечение.

Замечание. Вид сечения определяется расположением данных точек. Сечением куба плоскостью может быть треугольник, четырехугольник, пятиугольник или шестиугольник.



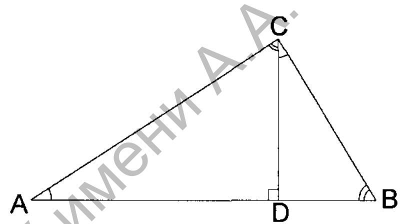
Задача 21. Плоскость α пересекает ребро AD пирамиды $ABCD$ в точке M, плоскость грани ABC по прямой ℓ. Постройте сечение пирамиды плоскостью α.

Решение. Прямые AB и AC с прямой ℓ лежат в одной плоскости и пересекают ее в точках X и Y (XY – след секущей плоскости). Прямая YM пересекает BD в точке F. Точки E и F лежат в секущей плоскости α. Треугольник MEF – искомое сечение.



Задача 22. На изображении ромба с углом 60^0 постройте изображение его высоты, проведенной из вершины: а) тупого угла, б) острого угла.

Указание. Докажите что основание высоты делит сторону ромба пополам. Если CF – высота ромба, проведенная из вершины острого угла ромба, то $\angle BCF = 30^0$ (т. к. $CD \parallel AF$ и $\angle BCD = 60^0$) и потому $BF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$. Чтобы построить изображение CF, нужно на прямой A_1B_1 отложить отрезок $B_1F_1 = \frac{1}{2}A_1B_1$ и соединить точки C_1 и F_1.



Задача 23. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. На изображении этого треугольника постройте изображение его высоты CD, если: а) $AC : BC = 2$; б) $\angle A = 60^0$.

Указание. а) Пусть $BC = x$. Тогда $AC = 2x$ и по теореме Пифагора $AB = \sqrt{5}\,x$. Треугольники ABC и ACD подобны, поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$. Отсюда $AD = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot x$, $BD = AB - AD = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot x$.

Следовательно, $\frac{AD}{BD} = 4 : 1$ и для построения изображения высоты C_1D_1 нужно разделить отрезок A_1B_1 на пять равных частей, и взять $A_1D_1 = \frac{4}{5}A_1B_1$; $A_1D_1 : B_1D_1 = 4 : 1$.

б) $\angle ABC = \angle ACD = 30^0$. Обозначим $BC = x$. Тогда $CD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}x$.

Так как $AD = \frac{1}{2}AC$ и $CD = \frac{1}{2}x$, то из треугольника ACD находим: $AD = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot x$.

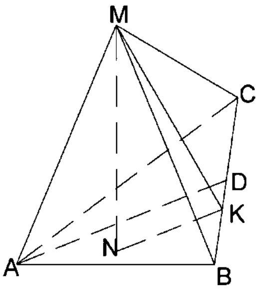
Из треугольника BCD: $BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x$. Поэтому $AD : BD = 1 : 3$. Следовательно, для построения изображения высоты C_1D_1 нужно взять $A_1D_1 = \frac{1}{4} \cdot A_1B_1$.

Замечание. Можно было воспользоваться тем фактом, что отрезки гипотенузы, на которые она делится высотой, относятся как квадраты катетов.

Задача 24. На изображении треугольника, длины сторон которого пропорциональны числам 2, 3, и 4, постройте изображение центра окружности, вписанной в этот треугольник.

Указание. Центр вписанной в треугольник окружности – точка пересечения биссектрис углов этого треугольника. Воспользуйтесь тем свойством, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Задача 25. Основание пирамиды $MABC$ – правильный треугольник ABC; MN – высота пирамиды. Постройте высоты боковых граней пирамиды, проведенные из ее вершины M.



Решение. Так как треугольник ABC правильный, то его высота AD является и медианой, $CD = BD$. Если MK – высота боковой грани MBC, то $MK \perp BC$. $MN \perp ABC$, $MN \perp NK$, NK – проекция MK на плоскость ABC. Поэтому $NK \perp BC$. Отсюда следует такой порядок построения высоты боковой грани: делим ребро BC пополам, проводим отрезок AD, проводим $NK \parallel AD$, соединяем точки M и K.

Аналогично строятся высоты двух других граней пирамиды.

Задача 26. Через середины двух смежных сторон основания правильной четырехугольной призмы проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол φ и пересекающая три боковых ребра призмы. Найдите сторону основания, если площадь сечения равна Q.

Ответ. $\frac{2}{7} \cdot \sqrt{14Q \cdot \cos\varphi}$

Задача 27. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскости BDA_1 и B_1D_1C разбивают диагональ AC_1 на три равные части.

Замечание. Приняв ребро куба за a, найдите расстояние между скрещивающимися прямыми AC_1 и B_1C.

Задача 28. Начертите сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N, P, являющиеся внутренними точками граней $ABCD$, ABB_1A_1, ADD_1A_1 соответственно.

Указание. Спроектировав точки N и P параллельно AA_1 на плоскость $ABCD$, получим точки N_1 и P_1. Точка $NP \cap N_1P_1 = X$ принадлежит плоскости сечения. Проведя прямую XM, получим точки $XM \cap AD = K$, $XM \cap CD = L$ и т. д.

Задача 29. Докажите, что параллельной проекцией данного угла, который меньше развернутого, может быть любой угол (от 0 до 180^0).

Указание. Пусть данный угол AOB равен φ, $0^0 < \varphi < 180^0$. Через OB проведем плоскость α, не совпадающую с плоскостью AOB, и в плоскости α возьмем угол $\angle BOC = \beta$, $0^0 < \beta < 180^0$. При параллельном проектировании, где направление проектирования – прямая AC, угол BOC будет параллельной проекцией угла AOB на плоскость α.

Задача 30. Трапеция $A_1B_1C_1D_1$ ($A_1B_1 \| C_1D_1$) является изображением равнобедренной трапеции $ABCD$ с углом 45^0 при основании. Постройте параллельную проекцию центра O окружности, описанной около трапеции $ABCD$.

Указание. Точка O – точка пересечения оси симметрии трапеции KL и серединного перпендикуляра к стороне BC. Проведя $CN \perp AB$, получим равнобедренный прямоугольный треугольник CNB. Его высота NM делит отрезок BC пополам. $CN \| KL$, $CM=MB$, $MN \cap KL=O$. Значит, $D_1K_1=K_1C_1$, $A_1L_1=L_1B_1$, $C_1N_1 \| K_1L_1$, $C_1M_1=M_1B_1$, $M_1N_1 \cap K_1L_1=O_1$.

Задача 31. Могут ли параллельные проекции вершин тетраэдра на данную плоскость α быть вершинами некоторого параллелограмма? Сколько направлений проектирования удовлетворяют этому условию?

Указание. Условию задачи удовлетворяет проектирование, когда направление задается прямой, проходящей через середины двух противолежащих ребер тетраэдра. Имеется три таких направления проектирования.

Задача 32. Даны параллельные проекции окружности и вписанного в нее треугольника. Постройте изображения высот треугольника.

Указание. Пусть $A_1B_1C_1$ – проекция треугольника ABC, O_1 – проекция центра окружности, описанной около треугольника ABC. Если M – середина отрезка AB, а N – середина отрезка BC, то $OM \perp AB$, $ON \perp BC$; $A_1M_1 = M_1B_1$, $B_1N_1 = N_1C_1$. Если AP и CK – высоты треугольника ABC, то $C_1K_1 \| O_1M_1$ и $A_1P_1 \| O_1N_1$.

5. Остановимся на основных требованиях, предъявляемых к чертежу.

Проблема изображения фигур имеет для геометрии двоякое значение. С одной стороны, чертеж делает изложение материала наглядным, а усвоение – более конкретным (иллюстрирующий чертеж).

С другой стороны – изображения фигур могут применяться как средство решения какой-либо геометрической задачи (решающий чертеж).

Учитель, сопровождающий изложение материала чертежами, не может пользоваться возможностями начертательной геометрии, так как у него для этого нет времени, а у ученика – соответствующих знаний. На практике учитель, выполняя изображение, заботится главным образом о создании наглядности при изучении геометрических закономерностей. Это приводит иногда к ошибкам. Учитель, порой, сам не подозревает, что его чертежи неверны. При пользовании такими чертежами еще слабая интуиция учащихся не только не укрепляется, но и направляется в неправильную сторону.

Наглядные изображения не только облегчают понимание рассуждений и выводов учителя, но и вызывают у учащихся пространственные представления изучаемых соотношений. В такой форме материал запоминается прочнее.

Сформулируем требования, которым должны удовлетворять выполняемые учителем чертежи.

1) Изображение должно быть правильным, т. е. должно представлять собой одну из проекций изображаемой фигуры.

2) Изображение должно быть наглядным, т. е. вызывать пространственное представление оригинала.

3) Изображение должно быть простым для выполнения, т. е. оно не должно содержать каких-либо построений, не имеющих отношения к теме занятия.

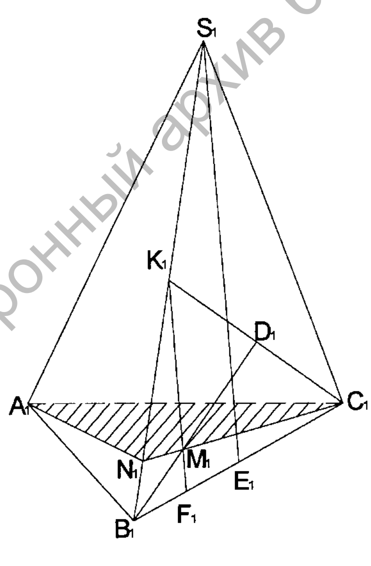
Удовлетворяющее этим требованиям изображение должно быть выполнено по правилам проекции, приближающейся к аппарату зрения. Такой проекцией является центральная проекция.

Однако это требование нельзя реализовать в условиях классного обучения, когда изображение на доске рассматривается учащимися из разных точек. Поэтому следует выбрать точку зрения, не зависящую от расположения учащихся в классе. Для этого подходит параллельная ортогональная проекция. Что касается техники выполнения чертежа, то допускается как чертеж с использованием чертежных инструментов, так и наглядный чертеж – рисунок "от руки". Построения на доске должны следовать именно в том порядке, в котором протекает изложение темы.

В качестве упражнения решим задачу.

Задача. Построить изображение правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой вдвое больше стороны основания, и изобразить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и перпендикулярной противолежащему боковому ребру.

Решение. Пусть $SABC$ – данная правильная пирамида. Не используя методы начертательной геометрии, а руководствуясь лишь условиями учебного процесса, как основание пирамиды ABC, так и вся пирамида $SABC$ могут быть изображены совершенно произвольно. Правильность такого изображения следует из теоремы Польке-Шварца, которая утверждает, что произвольно выбранная фигура $S_1A_1B_1C_1$ на изображении всегда является проекцией пирамиды $SABC$ заданной формы.



Пусть $S_1A_1B_1C_1$ – изображение данной пирамиды. Это изображение определяет проектирующий аппарат, поэтому все последующие построения на этом изображении уже не могут быть произвольными.

Построим изображение сечения, проходящего через AC и перпендикулярного SB. Построим S_1E_1 – изображение апофемы SE (B_1E_1=E_1C_1). Обозначив через K_1 середину отрезка B_1S_1 и соединив ее с C_1, получим треугольник $B_1C_1K_1$, который будет изображением равнобедренного треугольника BCK (BC= BK). Если C_1D_1 = D_1K_1, то B_1D_1 – изображение высоты, проведенной из вершины B. Проведем $K_1F_1 \| S_1E_1$. Так как $SE \perp BC$, то и $KF \perp BC$, т. е. K_1F_1 – изображение высоты треугольника BCK, проведенной из вершин K. Точка M_1 – изображение ортоцентра M треугольника BCK.

Следовательно, $CN \perp SB$. Аналогично доказывается, что $AN \perp SB$. Поэтому плоскость сечения CAN перпендикулярна ребру SB и $A_1C_1N_1$ – изображение этого сечения.

Замечание. Изображение многогранника представляет собой изображение его сетки, т. е. совокупности вершин и ребер. Можно доказать, что сетка, на которой в каждом узле сходятся три отрезка, является изображением многогранника. Имеет место следующее утверждение: сетки, топологически эквивалентные сеткам тетраэдра, куба или додекаэдра, являются изображениями многогранников. А вот для сеток, топологически эквивалентных сеткам октаэдра или икосаэдра, это утверждение не имеет места.

6. Изображение плоской фигуры будет определено, если наложенные на него условия позволяют определить истинную форму какого-либо треугольника этого изображения. Форма треугольника определяется двумя параметрами, например, двумя отношениями его сторон. Отсюда следует, что изображение плоских фигур в параллельной проекции содержит два параметра, которые могут быть определены условиями, наложенными на оригинал.

Таким образом, учитель, приступая к изображению плоской фигуры, располагает двумя параметрами, которые он может израсходовать, налагая в ходе рассуждений те или иные метрические условия на оригинал. Установление отношения двух отрезков эквивалентно заданию одного параметра, а отношение трех отрезков – заданию двух параметров. Условие ортогональности в оригинале двух отрезков равносильно заданию одного параметра. Условие, что некоторый луч на изображении является изображением биссектрисы угла, равносильно заданию одного параметра. Задание истинной величины какого-либо угла на изображении эквивалентно одному параметру. Изображение будет определено, если на нем задано отношение истинных длин двух каких-либо отрезков (один параметр) и известна истинная величина какого-либо угла (второй параметр). Изображение треугольника будет определено, если на нем дано изображение точки, служащей в оригинале точкой пересечения высот (ортоцентром).

Выбор на изображении треугольника точки, служащей в оригинале центром описанной около треугольника окружности, делает изображение метрически определенным. Аналогичное утверждение получим, взяв в качестве изображения центр вписанной в оригинал окружности. Любой эллипс на изображении можно считать проекцией окружности.

Любой треугольник на плоскости проекций может быть принят за изображение правильного треугольника, но при этом все дальнейшие построения не могут быть произвольными.

Изображение правильного пятиугольника не может быть задано произвольно: можно выбрать произвольный треугольник, как изображение треугольника, образуемого тремя соседними вершинами пятиугольника, и вполне определенным образом достроить пятиугольник (каждая из диагоналей пятиугольника параллельна одной из его сторон, а точка пересечения двух диагоналей делит каждую из них в отношении золотого сечения).

Изображение правильного шестиугольника $ABCDEF$ можно построить в такой последовательности: строим изображение правильного треугольника ACE, проводим медианы, которые пересекаются в точке O_1, откладываем $O_1D_1=O_1A_1$, $O_1F_1=O_1C_1$, $O_1B_1=O_1E_1$.

Изображение правильного восьмиугольника получается из изображения квадрата. (Напомним, что изображение называется метрически определенным, если оно позволяет с точностью до подобия восстановить оригинал.)

В ортогональной проекции (и только в ней) очертание шара есть окружность. Если на чертеже шар изображен в виде круга, то это означает, что все изображение должно выполняться в ортогональной проекции, так как недопустимо одну часть оригинала изображать в одной проекции, а другую часть – в другой.

Изображением четырехугольника может служить любой четырехугольник, у которого диагонали точкой пересечения делятся в тех же отношениях, что и в оригинале.

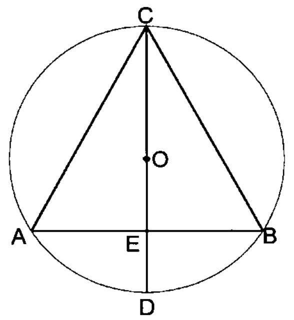
7. Рассмотрим в окружности два взаимно перпендикулярных диаметра. То свойство, что угол между ними равен 90^0, не сохраняется при проектировании (говорят, что оно не инвариантно). Но у них есть свойство, которое инвариантно (сохраняется при проектировании): каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому диаметру. Это свойство называется сопряженностью.

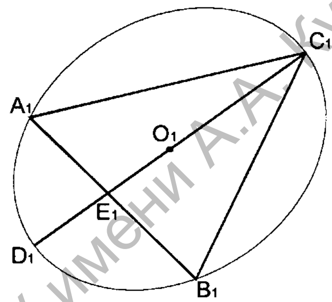
Взаимно перпендикулярные диаметры окружности изображаются сопряженными диаметрами эллипса. Центр окружности изображается центром эллипса. Прямая, касающаяся окружности в точке A, изображается касательной к эллипсу в точке A_1. Эта касательная (на изображении) параллельна тому диаметру эллипса, который сопряжен с диаметром, проходящим через точку касания.

Квадрат, описанный около окружности, изображается параллелограммом, описанным около эллипса, причем стороны этого параллелограмма имеют сопряженные направления; отрезки, соединяющие противолежащие точки касания, – сопряженные диаметры эллипса.

Задача. Изобразите окружность со вписанным в нее правильным треугольником.

Решение. На оригинале: $CE \perp AB$, $OE=ED$. На проекции окружность изобразим произвольным эллипсом; O_1 – центр этого эллипса. Пусть C_1 – произвольная точка эллипса. Тогда C_1D_1 – его диаметр. Разделим D_1O_1 пополам, $D_1E_1=E_1O_1$ и через точку E_1 проведем прямую, направление которой сопряжено C_1D_1. Для этого проведем какую-нибудь хорду, параллельную C_1D_1, разделим ее пополам и через полученную точку и точку O_1 проведем прямую. Эта прямая имеет направление, сопряженное с C_1D_1. Проведенная через точку E_1 прямая, параллельная построенной прямой, пересекает эллипс в точках A_1 и B_1. Треугольник $A_1B_1C_1$ – изображение треугольника ABC.





8. Изображение называется полным, если всякий элемент (точка, прямая, их комбинации), связанный с оригиналом, однозначно определен и на изображении.

Изображение одной, двух, трех, четырех точек общего положения всегда полное. Если фигура содержит и другие элементы, то их изображение можно построить на проекции, если их положение на оригинале задано. Если уже известно некоторое количество заданных точек, прямых, плоскостей, то новые элементы считаются заданными в следующих случаях.

а) Точка считается заданной, если дано ее изображение и указана проходящая через нее заданная прямая или плоскость. Точка также считается заданной, если она указана как точка пересечения двух заданных прямых или прямой и плоскости, или трех заданных плоскостей.

б) Прямая считается заданной, если дано ее изображение и указана проходящая через нее заданная плоскость. Прямая также считается заданной, если заданы: две ее точки или одна ее точка и параллельная ее прямая, или две проходящие через нее плоскости и т. д.

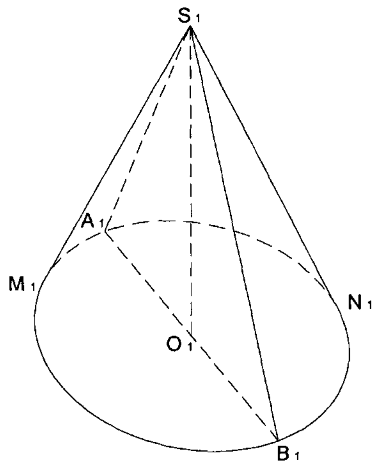
в) Плоскость считается заданной, если указаны три лежащие в ней заданные точки или лежащие в ней заданные точка и прямая, или лежащая в ней заданная точка и параллельная ей заданная плоскость и т. д.

9. Особенно много ошибок встречается в задачах, связанных с проектированием тел вращения.

Любой эллипс можно рассматривать как ортогональную или косоугольную проекции окружности, поэтому и конструктивные свойства эллипса в той и другой проекциях остаются неизменными.

Чтобы получить изображение высоты конуса или цилиндра, нужно провести высоту из центра основания перпендикулярно большой или малой оси эллипса, служащего изображением основания этих тел. Вертикальное изображение высоты на чертеже задает вертикальное положение малой оси эллипса, а потому и горизонтальное положение его большой оси. При таком их расположении достигается большая наглядность чертежа.

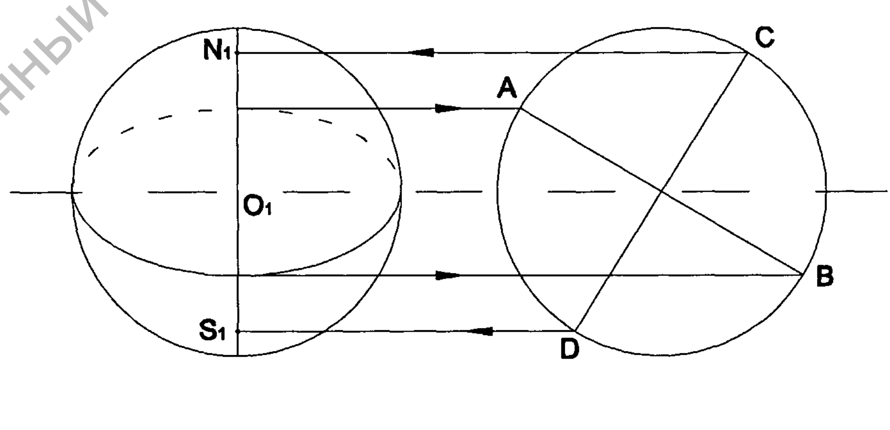
Параллельные касательные к эллипсу проходят через две диаметрально противоположные его точки. Поэтому в изображении цилиндра одно из его осевых сечений содержит обе контурные образующие. Контурные образующие конуса (и усеченного конуса), также являются касательными к эллипсу, служащему изображением основания. Но эти касательные не параллельны и точки касания не принадлежат одному диаметру.



При выполнении ортогональной проекции прямого кругового конуса основание конуса изображается произвольным эллипсом. Вершина конуса S изображается произвольной точкой (но при этом мы руководствуемся соображениями наглядности изображения). Контурные образующие конуса изображаются касательными к эллипсу, проведенными из точки S_1. (Контур изображения называется абрисом.)

Часто осевое сечение конуса изображается в виде треугольника $M_1S_1N_1$, где M_1 и N_1 – проекции точек касания контурных образующих. А это совершенно неправильно: отрезок M_1N_1 не проходит через точку O_1, а потому не является изображением диаметра окружности. Чтобы нарисовать осевое сечение конуса на проекции конуса, нужно провести диаметр эллипса и соединить его концы с точкой S_1.

Самое неблагополучное положение с чертежами, где требуется изобразить шар. При параллельном проектировании шара получается либо окружность, либо эллипс. На ортогональной проекции абрис шара – окружность, а в косоугольной проекции – эллипс. Из соображений большей наглядности шар рекомендуется изображать в ортогональной проекции. Сначала чертим окружность, представляющую абрис. Затем чертим эллипс, изображающий окружность большего круга – сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр. Это сечение называют экваториальным. Перпендикуляр к плоскости большого круга, проходящий через центр сферы, пересекает ее в двух точках, называемых полюсами, соответственно северным (N_1) и южным (S_1).



Распространенная ошибка – помещать изображение полюсов N_1 и S_1 на абрисе. Если экваториальное сечение изображено эллипсом, ближняя к нам часть которого ниже дальней его части, то глаз наблюдателя находится выше плоскости экватора. Поэтому наблюдатель видит точку N_1 ниже абриса, а точку S_1 – выше абриса, она находится на задней, невидимой части шара.

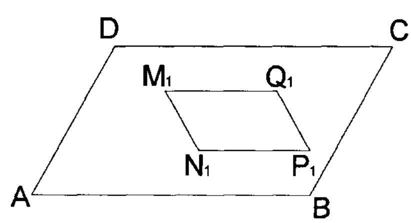
Только в том случае, если бы проектирующие прямые были параллельны плоскости экватора, полюсы находились бы на абрисе. Но в этом случае экватор изображался бы не эллипсом, а отрезком. Чем шире эллипс, изображающий экватор, тем дальше от абриса находятся изображения полюсов. На приведенном здесь рисунке показано, как построить изображения полюсов, если дано изображение экватора: переносим на правую окружность малую ось эллипса; проводим диаметр AB (это – проекция экваториального круга); проводим диаметр $CD \perp AB$ (это – проекция диаметра NS); переносим точки C и D, как показано на рисунке.

10. Коснемся изображения плоскости на чертеже.

Если указаны некоторые метрические условия, касающиеся оригинала, недостаточные для того, чтобы чертеж стал метрически определенным, то требуется осторожность в обращении с ним, потому что на нем кое-что можно изображать произвольно, а кое-что нельзя.

Приведем пример. С давних времен принято изображать плоскость в виде параллелограмма. При этом негласно предполагается, что этот параллелограмм изображает прямоугольный кусок плоскости. Тем самым на рисунке указываются два перпендикулярных направления, на что, как правило, не обращается внимание.

Например, квадрат на плоскости можно изобразить произвольным параллелограммом. Но приведенное здесь изображение квадрата $MNPQ$ неправильное: $N_1P_1 \| AB$, а M_1N_1 и AD не параллельны.



Если мы рисуем на плоскости, изображенной в виде параллелограмма, эллипс, то чертеж тоже может оказаться неправильным: один из сопряженных диаметров может оказаться параллельным стороне параллелограмма, а другой – нет.

Поэтому предпочтительнее изображать плоскость в виде куска с оборванными краями. Но и здесь нас могут подстерегать неприятности. Если мы поместим на одну и ту же плоскость, хотя и с оборванными краями, правильную четырехугольную пирамиду и, например, конус, то каждая из этих фигур определяет свою метрику в плоскости основания, и эти метрики могут не совпадать (сопряженные диаметры эллипса, например, не параллельны сторонам параллелограмма, служащего изображением основания пирамиды).

Овладение приемами построения изображения дается лишь в результате систематических упражнений. Наглядность, правильность и простата изображения – эти три основных требования к чертежам на уроках геометрии должны быть постоянно в поле зрения учителя.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сборник задач по геометрии для 9-10 классов / И.С. Герасимова [и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 190 с.
2. Геометрия : учебное пособие для 9-10 классов / В.М. Клопский [и др.]. – М. : Просвещение, 1983. – 255 с.
3. ***Лоповок, Л.М.*** Изображение фигур в стереометрии. “Преподавание геометрии в 9-10 классах” / Л.М. Лоповок. – М. : Просвещение, 1980. – С. 158–184.
4. ***Четверухин, Н.Ф.*** Изображение фигур в курсе геометрии / Н.Ф. Четверухин. – М. : Учпедгиз, 1958. – 216 с.
5. Энциклопедия элементарной математики. – Кн. 4 : Геометрия. – М. : Физматгиз, 1963. – 567 с.

Поступила в редакцию 18.02.2014 г.