УДК 372.851:510

Б.Н. ДРОБОТУН

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРИНЦИП АБСТРАКТНОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ ЯЗЫКОВ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

В работе определены алгебраические системы бинарных отношений на n-элементном множестве и характеристических матриц n-го порядка; доказана их изоморфность, приведена характеризация первичных свойств бинарных отношений в понятийно-терминологической базе теории матриц и рассматриваются возможности использования этой характеризации в прикладном аспекте.

Введение

В работе предлагаются методологические подходы к изучению специфики проявления свойств алгебраических систем, выразимых средствами формального языка исчисления предикатов и функций, выявляются и демонстрируются на конкретных примерах возможности использования инвариантности этих свойств относительно изоморфных отображений при решении прикладных задач и в логико-математической практике.

Приведем предварительно ряд понятий и результатов, которые наиболее часто встречаются и используются в дальнейшем [1–3].

В содержательном плане алгебраическую систему $\boldsymbol{M}$ можно рассматривать как некоторую универсальную форму, объединяющую в себе (в качестве основных компонент) непустое множество M и совокупности алгебраических операций $\mathfrak{F}$ и предикатов $\mathfrak{P}$, определенных на этом множестве, в одно целое. Если среди операций системы имеются 0-местные операции, то из них образуют отдельную компоненту $\mathfrak{C}$. Так как каждую 0-местную операцию можно рассматривать, как некоторый (выделенный) элемент множества M, то эта четвертая составляющая алгебраической системы представляет собой множество выделенных из M элементов. Формальным отражением этих представлений является запись $\boldsymbol{M} = \langle\ M; \mathfrak{F}; \mathfrak{P}; \mathfrak{C}\ \rangle$

Так как в математике традиционно рассматриваются алгебраические системы с конечными множествами алгебраических операций, предикатов и выделенных элементов, то в дальнейшем будем полагать, что

$$\mathfrak{F}= \{f_1^{m_1};\ f_2^{m_2}; \dots ; f_k^{m_k}\};\ \mathfrak{P} = \{p_1^{n_1};\ p_2^{n_2}; \dots ; p_k^{n_l}\};\ \mathfrak{C} = \{a_1; a_2; \dots ; a_r\},$$

и систему $\boldsymbol{M}$ будем записывать в виде:

$$\boldsymbol{M} = \langle M; f_1^{m_1};\ f_2^{m_2}; \dots ; f_k^{m_k}; p_1^{n_1};\ p_2^{n_2}; \dots ; p_l^{n_l}; a_1; a_2; \dots ; a_r\rangle.$$

В этой записи для алгебраической системы предполагается, что нижний индекс i и верхний индекс m_i указывают, соответственно, номер и местность (арность) операции $f_i^{m_i}$, $i = 1; 2; \dots ; k)$. Аналогично трактуются и обозначения $p_j^{n_j}$ $(j = 1; 2; \dots ; l)$ для предикатов этой системы. Множество M называется основным множеством или носителем алгебраической системы $\boldsymbol{M}$, а операции $f_i^{m_i}$ и предикаты $p_j^{n_j}$ $(i = 1; 2; \dots ; k;\ i = 1; 2; \dots ; l)$ ее основными операциями и основными предикатами.

С целью обеспечения возможностей сравнения алгебраических систем между собой и изучения семейств алгебраических систем, обладающих теми или иными признаками "внешней похожести", вводятся понятия сигнатуры и алгебраической системы данной сигнатуры.

Под сигнатурой понимается упорядоченный набор $\sigma = \langle \boldsymbol{F}\ ; \boldsymbol{P}\ ; \boldsymbol{C}\rangle$, где:

$\boldsymbol{F}= \{F_1^{m_1};\ F_2^{m_2}; \dots ; F_k^{m_k}\}$ – множество символов (имен) для алгебраических операций или множество функциональных символов;

$\boldsymbol{P}=\{P_1^{n_1};\ P_2^{n_2};\dots;P_k^{n_l}\}$ – множество символов (имен) для предикатов или множество предикатных символов;

$\boldsymbol{C}=\{c_1;c_2;\dots;c_r\}$ – множество имен для выделенных элементов или множество константных символов.

Пусть M – произвольное непустое множество.

Через $\boldsymbol{F}^{(m)}(M)$ будем обозначать далее множество всех m-местных алгебраических операций, которые могут быть определены на множестве M. Положим $\boldsymbol{F}(M)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\ \boldsymbol{F}^{(m)}(M)$.

Аналогично, через $\boldsymbol{P}^{(n)}(M)$ обозначим множество всех n-местных предикатов, которые могут быть заданы на этом множестве, и будем полагать, что $\boldsymbol{P}(M)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\ \boldsymbol{P}^{(n)}(M)$. Заметим, что $\boldsymbol{P}^{(0)}(M)=\{0;1\}$.

Определение 1. Интерпретацией сигнатуры σ на множестве M называется отображение

$$\varphi:\{F_i^{m_i}/i=1;2;\dots;k\}\cup\left\{P_j^{n_j}/j=1;2;\dots;l\right\}\cup\{c_s/s=1;2;\dots;r\}\to\boldsymbol{F}(M)\cup\boldsymbol{P}(M)\cup M$$

такое, что

$$\varphi(F_i^{m_i})={}^{\varphi}F_i^{m_i}\in\boldsymbol{F}^{(m_i)}(M);\quad \varphi(P_j^{n_j})={}^{\varphi}P_j^{n_j}\in\boldsymbol{P}^{(n_j)}(M);\quad \varphi(c_s)={}^{\varphi}c_s\in M$$
$$i=1;2;\dots;k,\ \ j=1;2;\dots;l,\ \ s=1;2;\dots;r.$$

Положим:

$${}^{\varphi}\sigma=\langle{}^{\varphi}F_1^{m_1};\ {}^{\varphi}F_2^{m_2};\dots;\ {}^{\varphi}F_k^{m_k};\ {}^{\varphi}P_1^{n_1};\ {}^{\varphi}P_2^{n_2};\dots;\ {}^{\varphi}P_l^{n_l};\ {}^{\varphi}c_1;\ {}^{\varphi}c_2;\dots;\ {}^{\varphi}c_r\rangle.$$

Определение 2. Алгебраической системой сигнатуры σ называется упорядоченная пара $\langle M;\ {}^{\varphi}\sigma\rangle$, где M – непустое множество и φ – интерпретация сигнатуры σ на этом множестве.

Заметим, что

$${}^{\varphi}\boldsymbol{F}=\{{}^{\varphi}F_i^{m_i}/i=1;2;\dots;k\};\quad {}^{\varphi}\boldsymbol{P}=\left\{{}^{\varphi}P_j^{n_j}/j=1;2;\dots;l\right\};\quad {}^{\varphi}\boldsymbol{C}=\{{}^{\varphi}c_s/s=1;2;\dots;r\}$$

– совокупности алгебраических операций и предикатов, определенных на множестве M, и выделенных элементов этого множества, соответственно, т. е. определение 2 вполне согласуется с вышеприведенными содержательными представлениями об алгебраических системах.

Отметим также, что любая алгебраическая система

$$\boldsymbol{M}=\langle M;f_1^{m_1};\ f_2^{m_2};\dots;f_k^{m_k};p_1^{n_1};\ p_2^{n_2};\dots;p_l^{n_l};a_1;a_2;\dots;a_r\rangle$$

может рассматриваться как алгебраическая система сигнатуры σ, если интерпретацию φ определить по правилам:

$${}^{\varphi}F_i^{m_i}=f_i^{m_i};\quad {}^{\varphi}P_j^{n_j}=p_j^{n_j};\quad {}^{\varphi}c_s=a_s,\ (i=1;2;\dots;k,\ \ j=1;2;\dots;l,s=1;2;\dots;r).$$

Если $t=t(x_1;\ x_2;\dots;x_n)$ и $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(x_1;\ x_2;\dots;x_n)$ – терм и формула сигнатуры σ, то через ${}^{\varphi}t={}^{\varphi}t(x_1;\ x_2;\dots;x_n)$ и ${}^{\varphi}\boldsymbol{A}={}^{\varphi}\boldsymbol{A}(x_1;\ x_2;\dots;x_n)$ будем обозначать, соответственно, термальную операцию и формульный предикат, полученные из t и $\boldsymbol{A}$ при интерпретации φ.

Формула $\boldsymbol{A}$ сигнатуры σ, не содержащая свободных предметных переменных, называется замкнутой формулой или предложением этой сигнатуры. Таким образом, формульный предикат ${}^{\varphi}\boldsymbol{A}$ является в этом случае истинным или ложным высказыванием о свойствах алгебраической системы $\boldsymbol{M} = \langle M;\ {}^{\varphi}\sigma\rangle$.

Под сложностью $S(t)$ терма t будем понимать номер наименьшего шага, на котором этот терм впервые появляется в процессе индуктивного определения множества термов сигнатуры σ.

Пусть $a_1; a_2; \dots; a_n \in M$. Запись $\boldsymbol{M} \models {}^{\varphi}\boldsymbol{A}(a_1;\ a_2; \dots; a_n)$ будет означать, что формульный предикат ${}^{\varphi}\boldsymbol{A}(x_1;\ x_2; \dots; x_n)$ при значениях переменных $x_1;\ x_2; \dots; x_n$, равных, соответственно, $a_1;\ a_2; \dots; a_n$, принимает на алгебраической системе $\boldsymbol{M} = \langle M;\ {}^{\varphi}\sigma\rangle$ истинное значение.

Определение 3. Пусть $\boldsymbol{M}_1 = \langle M_1;\ {}^{\varphi}\sigma\rangle$ и $\boldsymbol{M}_2 = \langle M_2;\ {}^{\psi}\sigma\rangle$ – алгебраические системы сигнатуры σ и $\Phi\colon M_1 \to M_2$ – биективное отображение основного множества M_1 системы $\boldsymbol{M}_1$ на основное множество M_2 системы $\boldsymbol{M}_2$. Отображение Φ называется изоморфным отображением алгебраической системы $\boldsymbol{M}_1$ на алгебраическую систему $\boldsymbol{M}_2$, если выполняются следующие условия:

1) $\Phi({}^{\varphi}F_i^{m_i}(a_1;\ a_2; \dots; a_{m_i})) = {}^{\psi}F_i^{m_i}(\Phi(a_1);\ \Phi(a_2); \dots; \Phi(a_{m_i}))$;

2) $((b_1;\ b_2; \dots; b_{n_j}) \in {}^{\varphi}P_j^{n_j}) \Leftrightarrow ((\Phi(b_1);\ \Phi(b_2); \dots; \Phi(b_{n_j})) \in {}^{\psi}P_j^{n_j})$;

3) $\Phi({}^{\varphi}c_s) = {}^{\psi}c_s$

для любых $F_i^{m_i}; P_j^{n_j}; c_s \in \sigma$, любых $(a_1;\ a_2; \dots; a_{m_i}) \in M_1$ и любых $(b_1;\ b_2; \dots; b_{n_j}) \in M_1$, $(i = 1; 2; \dots; k,\ j = 1; 2; \dots; l, \quad s = 1; 2; \dots; r)$.

Если существует изоморфное отображение системы $\boldsymbol{M}_1$ на систему $\boldsymbol{M}_2$, то эти системы называются изоморфными (символически $\boldsymbol{M}_1 \cong \boldsymbol{M}_2$).

Как отмечается в [1]: "Теория алгебраических систем изучает преимущественно лишь те свойства алгебраических систем, которые сохраняются при изоморфизме и которые, таким образом, одинаковы у всех изоморфных систем. Эти свойства часто называют абстрактными свойствами систем. Считается, что абстрактные свойства системы – это свойства главных операций и предикатов системы, не зависящие от природы элементов, слагающих систему" [1, с. 51].

Формальным отражением этого положения является следующее утверждение, играющее в математике концептуальную роль [1–3].

Теорема 1. Пусть Φ – изоморфизм алгебраической системы $\boldsymbol{M}_1 = \langle M_1;\ {}^{\varphi}\sigma\rangle$ на алгебраическую систему $\boldsymbol{M}_2 = \langle M_2;\ {}^{\psi}\sigma\rangle$ и $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x_1;\ x_2; \dots ; x_n)$ – произвольная формула сигнатуры σ.

Тогда

$$(\boldsymbol{M}_1 \vDash {}^{\varphi}\boldsymbol{A}(a_1;\ a_2; \dots ; a_n)) \Leftrightarrow (\boldsymbol{M}_2 \vDash {}^{\psi}\boldsymbol{A}(\Phi(a_1);\ \Phi(a_2); \dots ; \Phi(a_n)))$$

для любых значений $a_1;\ a_2; \dots ; a_n \in M_1$ переменных $x_1;\ x_2; \dots ; x_n$, соответственно. В частности, если $\boldsymbol{A}$ – предложение сигнатуры σ, то

$$(\boldsymbol{M}_1 \vDash {}^{\varphi}\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{M}_2 \vDash {}^{\psi}\boldsymbol{A}).$$

Согласно теореме 1, изоморфным алгебраическим системам данной сигнатуры присущи одни и те же структурные свойства, выразимые синтаксическими средствами формального языка исчисления предикатов и функций этой сигнатуры. Такие свойства, в связи с их инвариантностью относительно изоморфных отображений, были названы (как отмечалось выше) абстрактными, а наличие этой инвариантности, как характеризация особенностей проявления семантических возможностей этого формального языка, может быть названо принципом абстрактности.

Отметим, что теорема 1 сыграла определяющую роль в принятии одной из наиболее фундаментальных концепций современной математики – концепции изучения алгебраических систем с точностью до изоморфизма.

В данной работе: определяются алгебраические системы бинарных отношений, заданных на конечном n-элементном множестве, и характеристических матриц n-го порядка; доказывается, что эти системы являются изоморфными и на основе этого изоморфизма выявляется содержательная сущность принципа абстрактности формального языка исчисления предикатов и функций данной сигнатуры; приводится, в частности, характеризация первичных свойств бинарных отношений в понятийно-терминологической базе теории матриц и рассматриваются возможности использования этой характеризации в прикладном аспекте.

2. Характеристические матрицы. Логические операции и отношения на множестве характеристических матриц.

Пусть $E=\{0;1\}$. Под характеристической матрицей n-го порядка будем понимать матрицу $A = \|\alpha_{ij}\|_n$, для которой $\alpha_{ij} \in E$, $i = 1; 2; \dots ; n$, $j = 1; 2; \dots ; n$. К примеру, матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ является характеристической матрицей 3-го порядка.

Множество всех характеристических матриц n-го порядка будем обозначать через $M_n(E)$.

С целью использования характеристических матриц для описания операций над соответствиями (над бинарными отношениями, в частности) определяются различные логические аналоги традиционных операций над числовыми матрицами, в частности, аналоги бинарных операций сложения и умножения квадратных числовых матриц одного и того же порядка.

Рассмотрим сначала операции $\mathbin{\&}$ и $\vee$ – конъюнкции и дизъюнкции характеристических матриц, как логические аналоги операции сложения числовых матриц. Пусть $T; S \in M_n(E)$ и $T = \|\tau_{ij}\|_n$; $S = \|s_{ij}\|_n$. Положим:

1) $T \mathbin{\&} S = \|\tau_{ij} \& s_{ij}\|_n$;

2) $T \vee S = \|\tau_{ij} \vee s_{ij}\|_n$.

Определения 1) и 2) показывают, что операции $\vee$ и $\mathbin{\&}$ над характеристическими матрицами одинаковой размерности выполняются поэлементно, посредством применения к элементам этих матриц, стоящих на одинаковых местах, логических операций $\vee$ и &.

Пусть, к примеру,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \; S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, в соответствии с определением логических операций & и $\vee$, будем иметь:

$$T \mathbin{\&} S = \begin{pmatrix} 1\&1 & 1\&0 & 0\&0 & 0\&1 \\ 0\&1 & 1\&1 & 1\&0 & 0\&1 \\ 1\&0 & 0\&1 & 0\&0 & 1\&1 \\ 0\&1 & 0\&0 & 1\&1 & 1\&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T \vee S = \begin{pmatrix} 1\vee 1 & 1\vee 0 & 0\vee 0 & 0\vee 1 \\ 0\vee 1 & 1\vee 1 & 1\vee 0 & 0\vee 1 \\ 1\vee 0 & 0\vee 1 & 0\vee 0 & 1\vee 1 \\ 0\vee 1 & 0\vee 0 & 1\vee 1 & 1\vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Логическим аналогом бинарной операции умножения квадратных числовых матриц одного и того же порядка является бинарная операция “ • ” – логического умножения характеристических матриц, определяемая на множестве $M_n(E)$ по следующим правилам.

Пусть $T; S \in M_n(E)$ и $T = \|\tau_{ij}\|_n$; $S = \|s_{ij}\|_n$. Тогда

3) $T \bullet S = \|\gamma_{ij}\|_n$, где $\gamma_{ij} = \vee_{k=1}^{n} (\tau_{ik} \& s_{kj})$, $i = 1; 2; \ldots; m$, $j = 1; 2; \ldots; n$.

Таким образом, для нахождения произведения $T \bullet S$ характеристических матриц T и S одного и того же порядка эти матрицы умножаются, следуя обычному правилу умножения числовых матриц, но при этом при нахождении сумм произведений элементов строк матрицы T на соответствующие элементы столбцов матрицы S, арифметические операции сложения и умножения заменяются на их логические аналоги – дизъюнкцию и конъюнкцию, соответственно.

В частности, если

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то, в соответствии с определением 3), получим:

$$T \bullet S = \begin{pmatrix} (0\&1) \vee (1\&0) \vee (1\&1) & (0\&1) \vee (1\&1) \vee (1\&0) & (0\&1) \vee (1\&1) \vee (1\&0) \\ (0\&1) \vee (0\&0) \vee (1\&1) & (0\&1) \vee (0\&1) \vee (1\&0) & (0\&1) \vee (0\&1) \vee (1\&0) \\ (0\&1) \vee (1\&0) \vee (0\&1) & (0\&1) \vee (1\&1) \vee (0\&0) & (0\&1) \vee (1\&1) \vee (0\&0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \vee 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 1 & 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 \vee 0 & 0 \vee 1 \vee 0 & 0 \vee 1 \vee 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что все известные свойства операций сложения и умножения квадратных числовых матриц n-го порядка переносятся на их логические аналоги. В частности: нулевая матрица $0_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(E)$ является нейтральным элементом относительно операции $\vee$; единичная матрица $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(E)$ – нейтральным элементом относительно операции $\bullet$, определенных на множестве $M_n(E)$ по правилам 2) и 3), соответственно.

Нетрудно также проверить, что матрица $1_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(E)$

является нейтральным элементом относительно операции $\&$, определенной на множестве $M_n(E)$ по правилу 1).

Кроме указанных операций, на множестве $M_n(E)$ определяются унарная алгебраическая операция $\neg$, как аналог логической операции отрицания, и бинарное отношение $\preccurlyeq$.

Пусть $T \in M_n(E)$ и $T = \left\|\tau_{ij}\right\|_n$. Тогда

4) $\neg T = \left\|\neg\tau_{ij}'\right\|_n$, $i = 1; 2; \dots; n$, $\quad j = 1; 2; \dots; n$.

Если к примеру, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, то

$$\neg T = \begin{pmatrix} \neg 1 & \neg 0 & \neg 0 & \neg 1 \\ \neg 0 & \neg 1 & \neg 1 & \neg 0 \\ \neg 0 & \neg 1 & \neg 1 & \neg 0 \\ \neg 1 & \neg 1 & \neg 0 & \neg 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэлементный характер выполнения операций $\vee$; $\&$; и $\neg$ над характеристическими матрицами позволяет заключить, что эти операции удовлетворяют свойствам:

4.1) $\neg(\neg A) = A$;

4.2) $\neg(A \& B) = \neg A \vee \neg B$;

4.3) $\neg(A \vee B) = \neg A \& \neg B$,

являющихся для характеристических матриц аналогами закона двойного отрицания и законов де Моргана алгебры высказываний.

Пусть $T; S \in M_n(E)$, $T = \left\|\tau_{ij}\right\|_n$; $S = \left\|s_{ij}\right\|_n$. Тогда

5) $(T \preccurlyeq S) \Leftrightarrow \&_{j=1}^{n}\left(\&_{i=1}^{m}\left(\left(\tau_{ij} \to s_{ij}\right) = 1\right)\right)$.

Рассмотрим соответствующий пример. Пусть $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, т. е. $T; S \in M_4(E)$. Нетрудно видеть, что для этих матриц условие правой части эквивалентности в определении 5) выполняется, т. е. $T \preccurlyeq S$.

Нетрудно видеть, что в определении 5) – отношения $\preccurlyeq$, условие $\&_{j=1}^{n}\left(\&_{i=1}^{m}\left((\tau_{ij} \to s_{ij}) = 1\right)\right)$ равносильно условию $\&_{j=1}^{n}\left(\&_{i=1}^{m}(\tau_{ij} \leq s_{ij})\right)$.

Легко проверяется, что бинарное отношение "$\preccurlyeq$" на множестве $M_n(E)$ является отношением частичного порядка, т. е. является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным:

5.1) $A \preccurlyeq A$;

5.2) если $A \preccurlyeq B$ и $B \preccurlyeq A$, то $A = B$;

5.3) если $A \preccurlyeq B$ и $B \preccurlyeq C$, то $A \preccurlyeq C$

для любых характеристических матриц $A; B; C \in M_n(E)$.

Отметим также, что в частично упорядоченном множестве $\langle M_n(E); \preccurlyeq\rangle$ характеристические матрицы 0_n и 1_n являются наименьшим и наибольшим элементами, соответственно.

Как и на множестве числовых матриц, на множестве $M_n(E)$ – характеристических матриц n-го порядка вводится унарная операция "^{T}" - транспонирования.

Пусть, к примеру, $S \in M_4(E)$ и $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, тогда

$$S^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Алгебраическая система характеристических матриц.

Нетрудно видеть, что для любого конкретного $n \in N$ множество $M_n(E)$ замкнуто относительно операций $\vee$; $\&$; $\bullet$; $\neg$; ^{T}.

Замкнутость множества $M_n(E)$ относительно этих операций обуславливает возможность определения алгебраической системы

$$\boldsymbol{M}_n(E) = \left\langle M_n(E); \vee;\ \&;\ \bullet;\ \neg;\ ^T;\ \preccurlyeq;\ 0_n;\ E_n;\ 1_n \right\rangle$$

сигнатуры

$$\sigma = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^2; F_4^1; F_5^1; P_1^2; c_1; c_2; c_3 \rangle,$$

при этом предполагается, что интерпретация сигнатурных символов из σ на множестве $M_n(E)$ осуществляется следующим образом:

– двухместным функциональным символам $F_1^2; F_2^2; F_3^2$ ставятся в соответствие операции $\vee$; $\&$; $\bullet$;

– одноместным функциональным символам $F_4^1; F_5^1$ – операции $\neg$; ^{T};

– одноместному предикатному символу P_1^2 – бинарное отношение $\preccurlyeq$;

– символам $c_1; c_2; c_3$ выделенных элементов – матрицы $0_n; E_n; 1_n$, соответственно.

Для дальнейшего обозначим эту интерпретацию через μ_1.

4. Алгебраическая система бинарных отношений на конечном множестве.

Переходя к построению алгебраической системы бинарных отношений, заданных на непустом множестве M, напомним ряд базовых понятий и конструкций, связанных с понятием бинарного отношения.

Пусть $M = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ – конечное n-элементное множество и $M^2 = M \times M$ декартов квадрат этого множества. Подмножества множества M^2 называются бинарными отношениями на множестве M Таким образом, булеан $B(M^2)$ множества M^2 является множеством всех бинарных отношений, определенных на множестве M. Простейшим примером бинарного отношения на множестве M является отношение

$$\Phi_M = \{\langle x; x\rangle / x \in M\},$$

которое называется “диагональю” множества M.

На булеане $B(M^2)$ обычным образом определяются бинарные теоретико-множественные операции: “$\cup$” – объединения; “$\cap$” – пересечения; “$\setminus$” – разности бинарных отношений и унарная алгебраическая операция “$^-$” – дополнения бинарного отношения во множестве M^2, а также двуместный предикат “$\subseteq$” – теоретико-множественного включения.

Специфика определения бинарных отношений на множестве M, как множеств упорядоченных пар, позволяет ввести на $B(M^2)$: бинарную алгебраическую операцию “*” – композиции (или произведения) бинарных отношений и унарную алгебраическую операцию “$^{-1}$” – взятия обратного отношения (или операцию обращения отношения).

А именно, пусть $P, Q \in B(M^2)$. Тогда:

а) композицией (произведением) бинарных отношений P и Q называется бинарное отношение $P*Q$, определяемое на множестве M по правилу:

$$(\forall\, x, y \in M)((\langle x; y\rangle \in P * Q) \Leftrightarrow (\exists\, z \in M)((\langle x; z\rangle \in P)\&(\langle z; y\rangle \in Q)));$$

б) бинарное отношение P^{-1}, заданное на множестве M по правилу:

$$(\forall\, x, y \in M)\big((\langle x; y\rangle \in P^{-1}) \Leftrightarrow (\langle y; x\rangle \in P)\big),$$

называется обратным к бинарному отношению P.

Нетрудно видеть, что для любого $P \in B(M^2)$ имеют место равенства: $P \cup \emptyset = P$, $P \cap M^2 = P$ и $P * \Phi_M = \Phi_M * P = P$, т. е. бинарные отношения $\emptyset, M^2$ и Φ_M являются нейтральными элементами относительно операций $\cup$; $\cap$ и $*$, соответственно. Очевидно также, что

$$(\forall P, Q \in B(M^2))(P \backslash Q = P \cap \bar{Q}),$$

т. е. операция " \" – разности отношений, как элементов из $B(M^2)$, может быть определена через операции $\cap$ и $^{-}$.

Отмеченная выше универсальная роль бинарных отношений $\emptyset, M^2$ и Φ_M как нейтральных элементов относительно соответствующих операций позволяет считать их выделенными элементами множества $B(M^2)$.

Исходя из вышеизложенного, получаем, что множество $B(M^2)$ вместе с определенными на нем алгебраическими операциями $\cup$; $\cap$ и $*$; $^{-}$; $^{-1}$, отношением $\subseteq$ и выделенными элементами $\emptyset, M^2$ и Φ_M, является алгебраической системой.

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{M}^2) = \langle B(M^2); \cup; \cap; *; {}^{-}; {}^{-1}; \subseteq; \emptyset; M^2; \Phi_M \rangle$$

сигнатуры

$$\sigma = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^2; F_4^1; F_5^1; P_1^2; c_1; c_2; c_3 \rangle,$$

если полагать, что интерпретация μ_2 символов этой сигнатуры задается на множестве $B(M^2)$ по следующим правилам:

– двухместным функциональным символам $F_1^2; F_2^2; F_3^2$ ставятся в соответствие операции $\cup$; $\cap$ и $*$, т. е. ${}^{\mu_2}F_1^2 = \cup$; ${}^{\mu_2}F_2^2 = \cap$; ${}^{\mu_2}F_3^2 = *$;

– одноместным функциональным символам $F_4^1; F_5^1$ – операции $^{-}$; $^{-1}$, соответственно, т. е. ${}^{\mu_2}F_4^1 = {}^{-}$; ${}^{\mu_2}F_5^1 = {}^{-1}$;

– одноместному предикатному символу P_1^2 – бинарное отношение $\subseteq$; т.е ${}^{\mu_2}P_1^2 = \subseteq$;

– константным символам $c_1; c_2; c_3$ – бинарные отношения $\emptyset$; $M^2; \Phi_M$, соответственно, т. е. ${}^{\mu_2}c_1 = \emptyset$; ${}^{\mu_2}c_2 = M^2$; ${}^{\mu_2}c_3 = \Phi_M$.

5. Изоморфизм алгебраических систем $\boldsymbol{B}(M^2)$ и $\boldsymbol{M}_n(E)$.

Теорема 2. Пусть $M = \{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ – произвольное конечное n-элементное множество. Алгебраические системы $\boldsymbol{B}(M^2) = \langle B(M^2); {}^{\mu_2}\sigma \rangle$ и $\boldsymbol{M}_n(E) = \langle M_n(E); {}^{\mu_1}\sigma \rangle$ являются изоморфными.

Доказательство. В соответствии с определением 3 изоморфизма алгебраических систем, для доказательства того, что $\boldsymbol{B}(M^2) \cong \boldsymbol{M}_n(E)$ нужно определить такое биективное отображение $\varphi: B(M^2) \to M_n(E)$ основного множества $B(M^2)$ первой из этих систем на основное множество $M_n(E)$ второй, что:

1. $\left(\forall P;Q \in B\left(M^2\right)\right)\left(\varphi(P \cup Q) = \varphi(P) \vee \varphi(Q)\right)$;
2. $\left(\forall P;Q \in B\left(M^2\right)\right)\left(\varphi(P \cap Q) = \varphi(P) \& \varphi(Q)\right)$;
3. $(\forall P; Q \in B(M^2))\big(\varphi(P * Q) = \varphi(P) \bullet \varphi(Q)\big)$;
4. $(\forall P \in B(M^2))\big(\varphi(\bar{P}) = \neg\varphi(P)\big)$;
5. $(\forall P \in B(M^2))\left(\varphi(P^{-1}) = \left(\varphi(P)\right)^T\right)$;
6. $(\forall P \in B(M^2))\left((P \subseteq Q) \Leftrightarrow \left(\varphi(P) \preccurlyeq \varphi(Q)\right)\right)$;
7. $\varphi(\emptyset) = 0_n$;
8. $\varphi(M^2) = 1_n$;
9. $\varphi(\Phi_M) = E_n$.

Соответствие φ из $B(M^2)$ в $M_n(E)$ определим следующим образом:

$$(\forall P \in B(M^2))\left(\varphi(P) = \left\|\tau_{ij}\right\|_n\right), \tag{1}$$

где $\tau_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } a_i P a_j; \\ 0, \quad \text{в противном случае}, \end{cases} \quad i; j \in \{1; 2; \dots; n\}$.

К примеру, если $n = 4$;

$P = \{(a_1; a_3); (a_1; a_4); (a_2; a_1)(a_2; a_4)(a_3; a_2)(a_4; a_1)(a_4; a_3)(a_4; a_4)\}$,

то $\varphi(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Нетрудно убедиться в том, что соответствие φ является биективным отображением $B(M^2)$ на $M_n(E)$. Осуществляя эту проверку по схеме, предполагающей доказательство того, что соответствие φ является:

1) отображением;
2) сюръективным отображением;
3) инъективным отображением,

покажем, к примеру, что отображение φ – инъективно. Действительно, пусть $P; Q \in B(M^2)$ и $P \neq Q$. Тогда существуют такие $a_r; a_s \in M$, что имеет место одна из возможностей:

3.1) $a_r P a_s$ и $\neg(a_r Q a_s)$;

3.2) $\neg(a_r P a_s)$ и $a_r Q a_s$,

$r; s \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

В силу симметрии этих возможностей, будем считать, что реализуется первая из них. Тогда, полагая, что $\varphi(P) = \|\alpha_{ij}\|_n$ и $\varphi(Q) = \|\beta_{ij}\|_n$, получим, согласно определению (1), что $\alpha_{rs} = 1$ и $\beta_{rs} = 0$, т. е. $\|\alpha_{ij}\|_n \neq \|\beta_{ij}\|_n$ и, следовательно, $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$.

Покажем теперь, что отображение φ "сохраняет" операции. Проверим, к примеру, равенство

$$\varphi(P \cap Q) = \varphi(P) \& \varphi(Q). \qquad (2)$$

Предположим, что $\varphi(P \cap Q) = \|\gamma_{ij}\|_n$; $\varphi(P) = \|p_{ij}\|_n$; $\varphi(Q) = \|q_{ij}\|_n$.

Для доказательства равенства (2) достаточно показать, что

$\gamma_{ij} = p_{ij} \& q_{ij}$ (3)

для любых $i; j \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

Для γ_{ij} из равенства (3) могут иметь место два случая:

а) $\gamma_{ij} = 1$;

б) $\gamma_{ij} = 0$.

Рассмотрим отдельно каждый из них.

а) Если $\gamma_{ij} = 1$, то $a_i(P \cap Q)a_j$, т. е. $(a_i; a_j) \in P \cap Q$. Следовательно $(a_i; a_j) \in P$ и $(a_i; a_j) \in Q$. Отсюда получаем, согласно определению (1) соответствия φ, что $p_{ij} = 1$ и $q_{ij} = 1$, т. е. $p_{ij} \& q_{ij} = 1$. Таким образом, если имеет место случай а), то равенство (3) действительно выполняется.

б) Пусть теперь $\gamma_{ij} = 0$, тогда $\neg\big(a_i(P \cap Q)a_j\big)$, т. е. $(a_i; a_j) \notin P \cap Q$. В соответствии с определением теоретико-множественной операции $\cap$, в этом случае могут иметь место три подслучая:

б.1) $a_i P a_j$ и $\neg(a_i Q a_j)$;

б.2) $\neg(a_i P a_j)$ и $a_i Q a_j$;

б.3) $\neg(a_i P a_j)$ и $\neg(a_i Q a_j)$.

Нетрудно видеть, что в каждом из этих подслучаев будем иметь $p_{ij} \& q_{ij} = 0$, т. е. и в случае б) равенство (3) будет выполняться.

Проверка "сохранности" остальных операций, отношений и выделенных элементов осуществляется аналогично.

Наличие изоморфизма φ между алгебраическими системами $\boldsymbol{B}(M^2)$ и $\boldsymbol{M}_n(E)$ позволяет вместо оперирования с бинарными отношениями

$P \in B(M^2)$ оперировать с соответствующими характеристическими матрицами $\varphi(P) \in M_n(E)$.

В частности, теорема 1 применительно к алгебраическим системам $\boldsymbol{B}(M^2)$, $\boldsymbol{M}_n(E)$ и изоморфному отображению φ, означает, что если некоторое конкретное свойство S (которым могут обладать бинарные отношения, определенные на множестве M) допускает, как одноместный предикат, запись в виде формулы $S = S(x)$ сигнатуры σ с одной свободной переменной, то эта формула, при интерпретациях μ_2 и μ_1 сигнатуры σ на множествах $B(M^2)$ и $M_n(E)$,, соответственно, будет истинной на системе $\boldsymbol{B}(M^2)$ при $x = P$ тогда и только тогда, когда она будет истинной на системе $\boldsymbol{M}_n(E)$ при $x = \varphi(P)$.

Другими словами, бинарное отношение $P \in B(M^2)$ будет обладать содержательным аналогом свойства S, представленном "на языке" основных операций, отношений и выделенных элементов системы $\boldsymbol{B}(M^2)$ тогда и только тогда, когда характеристическая матрица $\varphi(P) \in M_n(E)$ будет обладать содержательным аналогом этого свойства, представленном в терминах соответствующих операций, отношений и выделенных элементов системы $\boldsymbol{M}_n(E)$.

Следует подчеркнуть, что содержательные истолкования вышеописанных свойств S значительно проще получить в терминах теоретико-множественных операций и отношений. Но подобные истолкования носят характер более теоретический, чем прикладной, так как практическая проверка теоретико-множественных аналогов этих свойств, даже при сравнительно небольших значениях n, сопряжена с определенными затруднениями.

В то же время, алгебраическая система $\boldsymbol{M}_n(E)$ представляет собой "наиболее чистую" (т. е. не зависящую от природы элементов множества M) и наиболее удобную в прикладном аспекте реализацию системы бинарных отношений, заданных на множестве M, и алгоритмов оперирования с ними.

В первую очередь это связано с тем, что строение характеристической матрицы, соответствующей данному бинарному отношению (т. е. особенности расстановки нулей и единиц в ее столбцах и строках), наглядно отражает специфику тех или иных свойств, присущих этому отношению и аккумулирует в себе возможности их эффективного распознавания.

Кроме того, характеристические матрицы и технологии оперирования с ними, полученные в результате матричной реализации бинарных отношений и алгоритмов выполнения операций над этими отношениями, являются наиболее удобным средством для введения их в память компьютера и компьютерной обработки.

Таким образом, алгебраическая система $\boldsymbol{B}(M^2)$ более приемлема в теоретических рассмотрениях, а система $\boldsymbol{M}_n(E)$ – в прикладных.

6. Характеризация первичных свойств бинарных отношений.

Проиллюстрируем вышеприведенные положения пункта **5** на примерах характеризации первичных свойств бинарных отношений. Говоря о первичных свойствах, мы имеем ввиду свойства рефлексивности, симметричности, связности, транзитивности и т. д. бинарных отношений. Эти свойства подобны атомам, различные комбинации которых определяют алгебраические, порядковые и многие другие структурные свойства алгебраических систем.

В частности, присутствие среди основных предикатов алгебраической системы бинарного предиката *P*, обладающего свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности обуславливает разбиение носителя этой системы на непересекающиеся классы и т. п. Напомним определения этих свойств, записав их на языке прикладного исчисление предикатов (смотри, к примеру, [4]).

Бинарное отношение *P*, заданное на непустом множестве *M* называется:

1) рефлексивным, если $(\forall x \in M)(xPx)$;

2) иррефлексивным, если $(\forall x \in M)(\neg(xPx))$;

3) симметричным, если $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(xPy \Rightarrow yPx)$;

4) антисимметричным, если $(\forall x \in M)(\forall y \in M)\big((xPy)\&(yPx) \Rightarrow (x = y)\big)$;

5) транзитивным, если $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(\forall z \in M)((xPy)\&(yPz) \Rightarrow (xPz))$;

6) связным, если $(\forall x \in M)(\forall y \in M)((x \neq y) \Rightarrow (xPy)\vee(yPx))$.

Покажем, что свойства 1) – 6), как, соответственно, формульные одноместные предикаты $\boldsymbol{S}_1(x)$ - $\boldsymbol{S}_6(x)$ сигнатуры $\sigma = \langle F_1^2; F_2^2; F_3^2; F_4^1; F_5^1; P_1^2; c_1; c_2; c_3\rangle$, могут быть выражены следующими формулами этой сигнатуры:

$$\boldsymbol{S}_1(x) = P_1^2(c_3; x);$$
$$\boldsymbol{S}_2(x) = (F_2^2(c_3; x) = c_1);$$
$$\boldsymbol{S}_3(x) = (F_5^1(x) = x);$$
$$\boldsymbol{S}_4(x) = P_1^2(F_2^2(x; F_5^1(x)); c_3);$$
$$\boldsymbol{S}_5(x) = P_1^2(F_3^2(x; x); x);$$
$$\boldsymbol{S}_6(x) = P_1^2(F_2^2(c_2;; F_4^1(c_3)); F_1^2(x; F_5^1(x))).$$

При интерпретации μ_2 формулы $\boldsymbol{S}_1(x) - \boldsymbol{S}_6(x)$ сигнатуры σ становятся производными (формульными) одноместными предикатами ${}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_1(x)$ – ${}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_6(x)$ сигнатуры σ, определенными на носителе $B(M^2)$ системы $\boldsymbol{B}(M^2)$. Определим, для примера, формульные предикаты ${}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_4(x)$ и

${}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_6(x)$. Для этого найдем предварительно термальные операции ${}^{\mu_2}t_1(x)$; ${}^{\mu_2}t_2(x)$ и ${}^{\mu_2}t_3(x)$; ${}^{\mu_2}t_4(x)$, которые соответствуют термам $t_1(x) = F_2^2(x; F_5^1(x))$; $t_2(x) = c_3$ и $t_3(x) = F_2^2(c_2; F_4^1(c_3))$; $t_4(x) = F_1^2(x; F_5^1(x))$, входящим в формулы $\boldsymbol{S}_4(x)$ и $\boldsymbol{S}_6(x)$, соответственно.

Находя сложность $S(t_1)$ терма $t_1(x)$, будем иметь:

$$t_1(x) = \underbrace{F_2^2(\underbrace{x}_{0};\ \underbrace{F_5^1(\underbrace{x}_{0})}_{1})}_{2}$$

т. е. $S(t_1) = 2$. Таким образом, подтермами терма $t_1(x)$ являются:

– подтерм $t_1'(x) = x$, сложности 0;

– подтерм $t_2'(x) = F_5^1(x)$, сложности 1;

– подтерм $t_3'(x) = F_1^2(x; F_5^1(x))$, сложности 2, совпадающий с термом $t_1(x)$.

Отсюда, согласно определению термальных операций [5, 6], последовательно получаем:

${}^{\mu_2}t_1'(x) = x$; ${}^{\mu_2}t_2'(x) = {}^{\mu_2}F_5^1(x) = x^{-1}$;

${}^{\mu_2}t_3'(x) = {}^{\mu_2}F_2\left({}^{\mu_2}t_1'(x); {}^{\mu_2}t_2'(x)\right) = {}^{\mu_2}F_2(x; x^{-1}) = x \cap x^{-1}$.

Так как $t_3'(x) = t_1(x)$, то ${}^{\mu_2}t_1(x) = x \cap x^{-1}$.

Так как $S(t_2(x)) = S(c_3) = 0$, то ${}^{\mu_2}t_2(x) = {}^{\mu_2}c_3 = \Phi_M$.

Отсюда, в соответствии с индуктивным определением формульных предикатов сигнатуры σ [5; 6], следует, что

$${}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_4 = {}^{\mu_2}P_1^2\left({}^{\mu_2}t_1(x); {}^{\mu_2}t_2(x)\right) = ((x_1 \cap x_1^{-1}) \subseteq \Phi_M). \quad (4)$$

Аналогичным образом находим, что $S(t_3(x)) = S(t_4(x)) = 2$ и

$${}^{\mu_2}t_3(x) = (M^2 \cap \bar{\Phi}_M);\ {}^{\mu_2}t_4(x) = (x \cup x^{-1}). \quad (5)$$

Из представления (5) термальных операций ${}^{\mu_2}t_3(x)$ и ${}^{\mu_2}t_4(x)$ получаем:

$${}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_6(x) = {}^{\mu_2}P_1^2\left({}^{\mu_2}t_3(x); {}^{\mu_2}t_4(x)\right) = ((M^2 \cap \bar{\Phi}_M) \subseteq (x \cup x^{-1}). \quad (6)$$

Цепочки равенств (4) и (6) показывают, что

${}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_4(x) = ((x_1 \cap x_1^{-1}) \subseteq \Phi_M)$;

${}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_6(x) = ((M^2 \cap \bar{\Phi}_M) \subseteq (x \cup x^{-1}))$.

Подобным же образом можно получить, что

$^{\mu_2}\boldsymbol{S}_1(x) = (\Phi_M \subseteq x)$;

$^{\mu_2}\boldsymbol{S}_2(x) = ((\Phi_M \cap x) = \emptyset)$;

$^{\mu_2}\boldsymbol{S}_3(x) = (x^{-1} = x)$;

$^{\mu_2}\boldsymbol{S}_5(x) = ((x * x) \subseteq x)$.

Докажем теперь, что формульные предикаты $\boldsymbol{S}_1(x) - \boldsymbol{S}_6(x)$ выражают при $x = P$, $(P \in B(M^2))$ свойства рефлексивности, иррефлексивности, симметричности, транзитивности и связности отношения P, соответственно.

Предложение 1. Пусть P – произвольное бинарное отношение, определенное на непустом множестве M. Тогда

1) (P – рефлексивно);

2) $(B(M^2) \vDash {}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_2(P)) \Leftrightarrow (P$ – иррефлексивно);

3) $(B(M^2) \vDash {}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_3(P)) \Leftrightarrow (P$ – симметрично);

4) $(B(M^2) \vDash {}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_4(P)) \Leftrightarrow (P$ – антисимметрично);

5) $(B(M^2) \vDash {}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_5(P)) \Leftrightarrow (P$ – транзитивно);

6) $(B(M^2) \vDash {}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_6(P)) \Leftrightarrow (P$ – связно).

Доказательство. Проведем доказательства равносильностей 4) и 6).

4) $\Rightarrow$ Пусть $\boldsymbol{B}(M^2) \vDash {}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_4(P)$, т. е. $\boldsymbol{B}(M^2) \vDash ((P \cap P^{-1}) \subseteq \Phi_M)$. Докажем, что P – антисимметричное отношение, т. е. полагая, что $a; b \in M$; $(a; b) \in P$ и $(b; a) \in P$, покажем, что $a = b$. Действительно

$$\big((a;b) \in P\big)\&((b;a) \in P) \Rightarrow \big((a;b) \in P\big)\&((a;b) \in P^{-1}) \Rightarrow \big((a;b) \in (P \cap P^{-1})\big). \quad (7)$$

Из (7), с учетом включения $(P \cap P^{-1}) \subseteq \Phi_M$, получаем, что $(a; b) \in \Phi_M$, т. е. $a = b$, так как $\Phi_M = \{(c; c)/c \in M\}$, в соответствии с определением этого отношения.

$\Leftarrow$ Пусть бинарное отношение P – антисимметрично, т. е. для любых $a; b \in M$ из того, что $(a; b) \in P$; $(b; a) \in P$, следует, что $a = b$. Покажем, что включение $(P \cap P^{-1}) \subseteq \Phi_M$ имеет место. Действительно, пусть $a; b \in M$ и $(a; b) \in (P \cap P^{-1})$. Тогда:

$$((a;b) \in (P \cap P^{-1})) \Rightarrow (((a;b) \in P)\&((a;b) \in P^{-1})) \Rightarrow (((a;b) \in P)\&((b;a) \in P)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a = b) \Rightarrow (a;b) \in \Phi_M .$$

Таким образом, предполагая, что $(a; b) \in (P \cap P^{-1})$, мы показали, что $(a; b) \in \Phi_M$, что и доказывает требуемое включение.

6) $\Rightarrow$ Пусть $\boldsymbol{B}(M^2) \vDash {}^{\mu_2}\boldsymbol{S}_6(P)$, т. е. $\boldsymbol{B}(M^2) \vDash ((M^2 \cap \overline{\Phi}_M) \subseteq (P \cup P^{-1}))$. Докажем, что P – связное бинарное отношение, т. е. для любых $a; b \in M$, таких, что $a \neq b$, имеет место утверждение $(a;b) \in P) \vee ((b;a) \in P)$. Действительно, пусть $(a;b) \in M$ и $a \neq b$. Тогда $(a;b) \notin \Phi_M$, т. е. $(a;b) \in \overline{\Phi}_M$. Так как $(a;b) \in M^2$ и $(a;b) \in \overline{\Phi}_M$, то $(a;b) \in M^2 \cap \overline{\Phi}_M$. Отсюда, с учетом имеющегося (по условию) включения $(M^2 \cap \overline{\Phi}_M) \subseteq (P \cup P^{-1})$, получаем, что $(a;b) \in (P \cup P^{-1})$, т. е. $(a;b) \in P$ или $(a;b) \in P^{-1}$. Так как $((a;b) \in P^{-1}) \Leftrightarrow ((b;a) \in P)$, то требуемое утверждение $(((a;b) \in P) \vee$ $\vee ((b;a) \in P))$ следует из утверждения $(((a;b) \in P) \vee ((a;b) \in P^{-1}))$.

$\Leftarrow$ Аналогично.

Содержательные аналоги формульных предикатов $\boldsymbol{S}_1(x) - \boldsymbol{S}_6(x)$, при $x = P$, представленные на языке основных операций, основных предикатов и выделенных элементов алгебраических систем $\boldsymbol{M}_n(E)$ и $\boldsymbol{B}(M^2)$, соответственно, приведены в нижеследующей таблице.

Свойства отношений

$\boldsymbol{S}_i(P)$	$\boldsymbol{B}(M^2)$	$\boldsymbol{M}_n(E)$	Свойство отношения P
$\boldsymbol{S}_1(P)$	$\Phi_M \subseteq P$	$E_n \preccurlyeq \varphi(P)$	Рефлексивность
$\boldsymbol{S}_2(P)$	$\Phi_M \cap P = \emptyset$	$E_n \& \varphi(P) = 0_n$	Иррефлексивность
$\boldsymbol{S}_3(P)$	$P^{-1} = P$	$(\varphi(P))^T = \varphi(P)$	Симметричность
$\boldsymbol{S}_4(P)$	$P \cap P^{-1} \subseteq \Phi_M$	$\varphi(P) \& (\varphi(P))^T \preccurlyeq E_n$	Антисимметричность
$\boldsymbol{S}_5(P)$	$P * P \subseteq P$	$\varphi(P) \bullet \varphi(P) \preccurlyeq \varphi(P)$	Транзитивность
$\boldsymbol{S}_6(P)$	$M^2 \cap \overline{\Phi}_M \subseteq P \cup P^{-1}$	$1_n \& E_n \preccurlyeq \varphi(P) \vee (\varphi(P))^T$	Связность

В соответствии с инвариантностью свойств (формульных предикатов) $\boldsymbol{S}_1(x) - \boldsymbol{S}_6(x)$ относительно изоморфных отображений (смотри теорему 1) получаем следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть P – произвольное бинарное отношение, определенное на множестве M, и φ – изоморфное отображение системы $\boldsymbol{B}(M^2)$ на систему $\boldsymbol{M}_n(E)$. Тогда:

1. $(\boldsymbol{B}(M^2) \vDash (\Phi_M \subseteq P)) \Leftrightarrow (\boldsymbol{M}_n(E) \vDash (E_n \preccurlyeq \varphi(P)))$;
2. $(\boldsymbol{B}(M^2) \vDash (\Phi_M \cap P = \emptyset)) \Leftrightarrow (\boldsymbol{M}_n(E) \vDash (E_n \& \varphi(P) = 0_n))$;
3. $(\boldsymbol{B}(M^2) \vDash (P^{-1} = P)) \Leftrightarrow (\boldsymbol{M}_n(E) \vDash ((\varphi(P))^T = \varphi(P))$;
4. $(\boldsymbol{B}(M^2) \vDash (\Phi_M \cap P = \emptyset)) \Leftrightarrow (\boldsymbol{M}_n(E) \vDash (E_n \& \varphi(P) = 0_n))$;
5. $(\boldsymbol{B}(M^2) \vDash (P * P \subseteq P)) \Leftrightarrow (\boldsymbol{M}_n(E) \vDash (\varphi(P) \bullet \varphi(P) \preccurlyeq \varphi(P)))$;

6. $(\boldsymbol{B}(M^2) \models (M^2 \cap \bar{\Phi}_M \subseteq P \cup P^{-1})) \Leftrightarrow (\boldsymbol{M_n}(E) \models (\mathbf{1_n} \& \boldsymbol{E_n} \preccurlyeq \varphi(P) \vee$
$\vee (\varphi(P))^T))$.

Если для отношения $P \in B(M^2)$ имеет место левая часть любой из равносильностей 1–6 предложения 2, то это отношение, согласно предложению 1, обладает соответствующим первичным свойством (смотри таблицу).

Отметим, что левые части этих равносильностей дают характеризацию первичных свойств бинарных отношений "в терминах" основных операций, основных отношений и выделенных элементов системы $\boldsymbol{B}(M^2)$, т. е. на языке теории множеств. Правые же их части дают описание этих свойств "на языке" основных операций, основных предикатов и выделенных элементов системы $\boldsymbol{M}_n(E)$, т. е. в понятийно-терминологической базе теории матриц.

Ранее отмечалось, что первая характеризация более предпочтительна при решении теоретических задач, а вторая – при решении задач прикладного характера.

В частности, согласно предложению 2, получаем следующую характеризацию первичных свойств бинарных отношений "на языке" системы $\boldsymbol{M}_n(E)$. Отношение $P \in B(M^2)$:

– рефлексивно $\Leftrightarrow$ все элементы главной диагонали матрицы $\varphi(P)$ равны 1;

– иррефлексивно $\Leftrightarrow$ все элементы главной диагонали матрицы $\varphi(P)$ равны 0;

– симметрично $\Leftrightarrow$ матрица $\varphi(P)$ является симметричной;

– антисимметрично $\Leftrightarrow$ все элементы матрицы $\varphi(P) \& (\varphi(P))^T$, стоящие вне главной диагонали, равны 0;

– транзитивно $\Leftrightarrow$ $(\varphi(P) \& (\varphi(P) \bullet \varphi(P)) = \varphi(P) \bullet \varphi(P)) \Leftrightarrow$ если для всех $i; j; k \in \{1; 2; \dots; n\}$ элементы матрицы $\varphi(P)$, стоящие на местах с номерами $(i; j)$ и $(j; k)$ равны 1, то и элемент этой матрицы, стоящий на месте с номером $(i; k)$ также равен 1;

– связно $\Leftrightarrow$ все элементы матрицы $\varphi(P) \vee (\varphi(P))^T$, стоящие вне главной диагонали, равны 1.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Мальцев, А.И.*** Алгебраические системы / А.И. Мальцев. – М. : Наука, 1970.
2. ***Ершов, Ю.Л.*** Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. – М. : Наука, 1979.

3. ***Гончаров, С.С.*** Введение в логику и методологию науки / С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, К.Ф. Самохвалов. – М. : Интерпракс, 1994.
4. ***Гончаров, С.С.*** Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении : монография / С.С. Гончаров, Б.Н. Дроботун, А.А. Никитин. – Новосибирск : Изд-во НГУ, 2007.
5. ***Гончаров, С.С.*** Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений : монография : в 2 ч. / С.С. Гончаров, Б.Н. Дроботун, А.А. Никитин. – Новосибирск : Изд-во НГУ, 2008. – Ч. I.
6. ***Гончаров, С.С.*** Алгебраические и алгоритмические свойства логических исчислений : монография : в 2 ч. / С.С. Гончаров, Б.Н. Дроботун, А.А. Никитин. – Новосибирск : Изд-во НГУ. Научное издание, 2008. – Ч. II.

Поступила в редакцию 19.02.2014 г.