УДК 519.6

*В.Т. БОРУХОВ**

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В статье рассматривается задача восстановления временных компонент функции источника для квазилинейного уравнения теплопроводности гиперболического типа. Эта задача интерпретируется как задача обращения гиперболических динамических систем вход-состояние-выход. Описаны два типа обратных динамических систем.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача идентификации входного сигнала (временных компонент источника) квазилинейной динамической системы (ДС) гиперболического типа по данным выходного сигнала. Для решения данной задачи примененяется метод обратных динамических систем [1-5]. Построение ДС обратных исходным ДС основано на применении аддитивного сдвига (калибровки) состояния ДС относительно источника. Подход обратных ДС к задачам идентификации позволяет ответить на ряд вопросов качественного характера: указать минимальную информацию о начальном состоянии ДС, достаточную в случае обратимости ДС для восстановления входных сигналов [1-3], разделить обратную систему на корректную и некорректную в смысле Адамара части [2], описать степень некорректности задачи [2]. Численная реализация подхода обратных ДС приводит, как правило, к классу экономичных численных алгоритмов решения [4]. Вместе с тем имеется ряд

* Выпускник физико-математического факультета 1970 г.

открытых вопросов, связанных с применением метода обратных динамических систем для восстановления источников переноса, описываемых квазилинейными уравнениями гиперболического и параболического типов [5]. В частности, открыты вопросы единственности и непрерывной зависимости от параметров решения нестандартной начально-краевой задачи, определяемой обратной ДС.

Работа содержит четыре параграфа. В первом приводится постановка задачи и ее физическая интерпретация. Во втором указана замена переменных (аддитивная калибровка) в пространстве состояний ДС. В третьем и четвертом параграфах построены обратные ДС. Отметим, что задачи, отвечающие обратным ДС, относятся к классу обобщенных нагруженных квазилинейных начально-краевых задач гиперболического типа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу восстановления входных данных для квазилинейной динамической системы вход–состояние–выход (обозначим ее символом Σ_τ) гиперболического типа

$$\tau\big(c(T)T_t\big)_t + c(T)T_t = \big(\lambda(T)T_x\big)_x + \mu_b\, u(t) + \tau\mu_b\, \dot{u}(t), \qquad (1)$$

$$T(0,t) = g_1(t), \quad T(l,t) = g_2(t), \quad T(x,0) = T_0(x), \quad T_t(x,0) = T_1(x), \qquad (2)$$

$$y(t) = \int_0^l T(\xi,t)\,d\mu_p, \ t \in [0,t_f], \qquad (3)$$

где пара $(T(\cdot,t),T_t(\cdot,t))$ – состояние ДС в момент времени t, $u(t) = colon\big(u_1(t),\dots,u_m(t)\big)$ – входной сигнал системы, $y(t) = colon\big(y_1(t),\dots,y_m(t)\big)$ – выходной сигнал, $c(T)$, $\lambda(T)$ – абсолютно непрерывные строго положительные функции, τ – положительный параметр. Компоненты вектор-строки

$$\mu_b = [\mu_{b1},\dots,\mu_{bm}] \qquad (4)$$

и вектор-столбца

$$\mu_p = colon[\mu_{p1},\dots,\mu_{pm}] \qquad (5)$$

являются мерами Стильтьеса на отрезке $[0,l]$ [6]. Таким образом, для произвольной непрерывной функции $g(x)$ определены интегралы

$$\int_0^l g(\xi)d\mu_b := \int_0^l g(\xi)db(\xi), \ \int_0^l g(\xi)d\mu_p := \int_0^l g(\xi)dp(\xi),$$

где $db(\xi) = \big[db_1(\xi),\dots,db_m(\xi)\big]$, $dp(\xi) = colon\big[dp_1(\xi),\dots,dp_m(\xi)\big]$, $b_i(\cdot)$, $p_i(\cdot) \in BV[0,l]$, $i = \overline{1,m}$, ($BV[0,l]$ – пространство вещественных на $[0,l]$ функций с ограниченной вариацией). Отметим, что в работах [7; 8] изучаются абстрактные линейные и квазилинейные задачи параболического типа с неоднородностями в форме мер Радона, частным случаем которых являются меры Стильтьеса.

Рассматриваем следующую задачу идентификации входных сигналов ДС Σ_τ: по данным $y(t), \forall t \in [0,t_f]$, выходного сигнала определить данные $u(t), \forall t \in [0,t_f]$, входного сигнала.

Сформулированная задача относится к классу некорректных обратных задач математической физики [9]. Полагая $\tau = 0$ и исключая из (2) равенство $T_t(x,0) = T_1(x)$, получим задачу идентификации входных сигналов ДС Σ_0 параболического типа, рассмотренную ранее в работе [5].

Коснемся физического содержания рассматриваемого класса задач. Система уравнений (1), (2) описывает процессы теплопереноса с учетом конечной скорости распространения тепла. Поэтому уравнение (1) называют также нелинейным уравнением теплопроводности гиперболического типа. В литературе достаточно широко представлена начально-краевая задача с постоянными параметрами ($\lambda(T) = const$, $c(T) = const$). В этом случае параметр τ можно непосредственно интерпретировать как время релаксации теплового потока [10; 11]. Учет параметра τ важен, например, при описании быстропротекающих тепловых процессов, индуцированных импульсным лазерным излучением [12]. Компоненты вектор-строки (4) можно интерпретировать как пространственные моды, характеризующие плотность источника тепла, а компоненты вектора $u(\cdot)$ – как изменяющиеся во времени амплитуды таких мод.

Типичный пример описания источника – обобщенный закон Бугера

$$\sum_{i=1}^{m}(1-R_i)e^{-k_i x}u_i(t),$$

характеризующий поглощение энергии излучения полупрозрачной средой на заданном спектре пространственных мод. Здесь R_i – коэффициент поверхностного отражения, $u_i(t)$ – интенсивность падающего излучения, k_i – коэффициент поглощения.

Противоположный случай – точечный источник

$$\sum_{i=1}^{m}\delta(x-x_i)u_i(t),$$

где $\delta(x-x_i)$ – сосредоточенная в точке $x = x_i$ функция Дирака. Задачи идентификации мощности точечных источников возникают, например, при мониторинге состояния окружающей среды [13].

Соотношения (3), (5) описывают способ измерения первой компоненты вектора состояний ДС Σ_τ. На практике наиболее распространены так называемые точечные измерения

$$y_i(t) = T(x_i^*,t) \equiv \int_0^l \delta(\xi - x_i^*)T(\xi,t)d\xi, \ i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

где x_i^* $(i = \overline{1,m})$ – заданные точки интервала $(0,l)$.

Известны также методики измерения интегральных характеристик процессов переноса. Набор измерений (6) можно использовать также для аппроксимации данных (3), применяя, например, кубатурные формулы вычисления определенных интегралов (3).

2. Калибровочное преобразование

Построение ДС обратных ДС Σ_τ основано на применении аддитивного сдвига (калибровки) состояния относительно источника. Аддитивная калибровка сохраняет важный параметр – физическую размерность поля $T(x,t)$. Полученную в результате применения этой операции ДС будем называть калибровочной. Дифференциалы db, dp перепишем в "поточечной" форме $db = b'(x)dx$, $dp = p'(x)dx$, где $b'(x) := \dfrac{db}{dx}$, $p'(x) := \dfrac{dp}{dx}$ – обобщенные производные функций $b(x)$, $p(x)$.

Построим калибровочную ДС $\Sigma_{\tau g}$ для квазилинейной системы Σ_τ. С помощью стандартной замены переменных $T = \varphi(S)$, где $\varphi(S)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{c(\varphi)},$$

можно избавиться в уравнении (1) от множителя $c(T)$. Поэтому без ограничения общности положим $c(T) \equiv 1$. Тогда калибровочное преобразование для ДС Σ_τ имеет вид

$$T(x,t) = w(x,t) + b'(x)v(t), \;\; v(t) = \int_0^t (t-s)u(s)ds. \tag{7}$$

Преобразование (7) обобщает калибровочное преобразование для ДС параболического типа [4; 5; 14].

Подстановка (7) в (1)-(3) дает систему уравнений, определяющую ДС $\Sigma_{\tau g}$,

$$\tau w_{tt} + w_t = \left(\lambda(w + b'v(t))(w + b'v(t))_x\right)_x, \tag{8}$$

$$w(0,t) + b'(x)v(t)\big|_{x=0} = g_1(t), \tag{9}$$

$$w(l,t) + b'(x)v(t)\big|_{x=l} = g_2(t), \tag{10}$$

$$w(x,0) = T_0(x), \;\; w_t(x,0) = T_1(x), \tag{11}$$

$$y(t) = \int_0^l dp(\xi)(w(\xi,t) + b'(\xi)v(t)). \tag{12}$$

Далее система уравнений (8)-(12) применяется для построения ДС $\Sigma_{\tau g}^{-1}$, поскольку, очевидно, что задача восстановления сигнала $u(\cdot)$ для ДС Σ_τ эквивалентна задаче восстановления сигнала $u(\cdot)$ для ДС $\Sigma_{\tau g}^{-1}$.

3. Обратная ДС $\Sigma_{\tau g}^{-1}$

Предположим, что матрица

$$\mathcal{D} := \int_0^l p'(x)b'(x)dx$$

существует и обратима. Тогда уравнение (12) однозначно разрешимо относительно вектора

$$v(t) = -\mathcal{D}^{-1}\left(\int_0^l p'(x)w(x,t)dx + y(t)\right). \tag{13}$$

Подставим в (8)-(11) выражение для $v(t)$ (13). В результате получим следующее описание обратной ДС $\Sigma_{\tau g}^{-1}$:

$$\begin{gathered}\tau w_{tt} + w_t = \left(\lambda\left(w - b'\mathcal{D}^{-1}\int_0^l p'(x)w(x,t)dx + b'\mathcal{D}^{-1}y(t)\right)\times\right.\\ \left.\times\left(w - b'\mathcal{D}^{-1}\int_0^l p'(x)w(x,t)dx + b'\mathcal{D}^{-1}y(t)\right)_x\right)_x,\end{gathered} \tag{14}$$

$$w(0,t) - b'(x)\mathcal{D}^{-1}\left(\int_0^l p'(x)w(x,t)dx - y(t)\right)\Big|_{x=0} = g_1(t), \tag{15}$$

$$w(l,t) - b'(x)\mathcal{D}^{-1}\left(\int_0^l p'(x)w(x,t)dx - y(t)\right)\Big|_{x=l} = g_2(t), \tag{16}$$

$$w(x,0) = T_0(x), \quad w_t(x,0) = T_1(x), \tag{17}$$

$$u(t) = -\mathcal{D}^{-1}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^l p'(x)w(x,t)dx + y(t)\right). \tag{18}$$

Для ДС $\Sigma_{\tau g}^{-1}$, заданной системой уравнений (14)-(18) выходной сигнал $y(t)$ исходной системы $\Sigma_{\tau g}$ является входным, а входной $u(t)$ – выходным. Система уравнений (14)-(17) представляет собой нестандартную начально-краевую задачу Коши. Действительно, уравнение (14) содержит “сдвинутую” композицию $\lambda(w-f)$, где

$$f(x,t) := b'\mathcal{D}^{-1}\left(\int_0^l p'(x)w(x,t)dx + y(t)\right).$$

Краевые условия (15), (16) также не являются классическими. Несмотря на свой устрашающий вид, начально-краевая задача (14)-(17) вполне поддается численной обработке. Примеры численного моделирования решения задачи идентификации источников для параболической ДС Σ_0 приведены в работе [5].

4. Обратная ДС Σ_τ^{-1}

Представляет интерес еще один вариант обратной ДС Σ_τ^{-1}. Предположим существование первой и второй производной для правой части уравнения (3), справедливость равенств

$$\frac{d}{dt}\int_0^l T(\xi,t)dp(\xi)=\int_0^l T_t(\xi,t)dp(\xi),\ \frac{d^2}{dt^2}\int_0^l T(\xi,t)dp(\xi)=\int_0^l T_{tt}(\xi,t)dp(\xi)$$

и существование матрицы $\mathcal{D}$. Тогда, учитывая (1), получим

$$\tau\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)=\int_0^l\left(\lambda(T)T_x\right)_x dp(x)+\mathcal{D}f(t),\qquad f(t)=\tau\dot{u}(t)+u(t).$$

Отсюда, в случае обратимости матрицы $\mathcal{D}$, следует, что ДС Σ_τ^{-1} задается системой уравнений

$$\tau T_{tt}+T_t=\left(\lambda(T)T_x\right)_x+b'(x)\mathcal{D}^{-1}\left(\tau\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)-\int_0^l\left(\lambda(T)T_x\right)_x dp(x)\right),\quad (19)$$

$$f(t)=\mathcal{D}^{-1}\left(\tau\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)-\int_0^l\left(\lambda(T)T_x\right)_x dp(x)\right),\quad (20)$$

$$u(t)=e^{-\frac{t}{\tau}}u(0)+\int_0^t e^{-\left(\frac{t}{\tau}+s\right)}f(s)ds.\quad (21)$$

с начально-краевыми условиями (2).

Второй подход дает решение задачи восстановления интенсивности источника $u(t)$ с точностью до экспоненциально убывающего слагаемого $e^{-\frac{t}{\tau}}u(0)$.

Напомним [15], что уравнения с частными производными, содержащие в коэффициентах функционалы от решения, называются нагруженными. Таким образом, начально-краевые задачи (14)-(17) и (19), (2) можно отнести к классу начально-краевых задач для обобщенных нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа.

Заключение

Для решения задач идентификации временных компонент функции источника в нелинейном уравнении теплопроводности гиперболического типа предложен подход, основанный на построении обратных ДС. Установлено, что при некоторых ограничениях на параметры обратная задача идентификации интенсивности источников тепла сводится к прямой начально-краевой задаче для нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Borukhov, V.T.** Method of inverse dynamic systems and its application for recovering internal heat sources / V.T. Borukhov, P.M. Kolesnikov // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1988. – V. 31. – № 8. – P. 1549–1556.

2. ***Борухов, В.Т.*** Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики / В.Т. Борухов, И.В. Гайшун, В.И. Тимошпольский. – Минск, 2009. – 176 с.
3. ***Борухов, В.Т.*** Восстановление потоков тепла при дифференциальном измерении температуры методом обратных динамических систем / В.Т. Борухов // Инженерно-физический журнал. – 1984. – Т. 47. – № 3. – С. 469–474.
4. ***Borukhov, V.T.*** Numerical solution of the inverse problem of reconstructing distributed right-hand side of parabolic equation / V.T. Borukhov, P.N. Vabishchevich // Computer Physics Communication. – 2000. – V. 126. – № 1-2. – P. 1033–1041.
5. ***Борухов, В.Т.*** Обратимость квазилинейных параболического типа динамических систем вход-состояние-выход / В.Т. Борухов, Г.М. Заяц // Труды 6-й Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" : в 2 т. – Т. 2 : Дифференциальные уравнения. – Минск : Институт математики НАН Беларуси. – 2012. – С. 19–24.
6. ***Колмогоров, А.Н.*** Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1973. – 375 с.
7. ***Amann, H.*** Linear parabolic problems involving measures / H. Amann // Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. – 2001. – V. 95. – № 1. – P. 85–119.
8. ***Аманн, Г.*** Нелокальные квазилинейные параболические уравнения / Г. Аманн // Успехи матем. наук. – 2005. – Т. 60. – Вып. 6. – С. 21–32.
9. ***Леонов, А.С.*** Решение некорректно поставленных обратных задач: Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ / А.С. Леонов. – М. : Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2010. – 320 с.
10. ***Cattaneo, C.*** A form of heat conduction equation which eliminate the paradox of instantaneous propogation / C. Cattaneo // Compte Rendus. – 1958. – V. 247. – P. 431–433.
11. ***Лыков, А.В.*** Некоторые проблемные вопросы теории тепломассопереноса. В сб. "Проблема тепло- и массопереноса" / А.В. Лыков. – Минск : Наука и техника, 1976. – С. 9–82.
12. ***Al-Khairy, R.T.*** Analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for moving semi-infinite medium under the effect of time-dependent laser heat sourse / R.T. Al-Khairy, Z.M. Al-Ofey // Journal of Appl. Mathematics. – 2009, Article ID 604695, 18 pages.
13. ***Марчук, Г.И.*** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г.И. Марчук. – М. : Наука, 1982. – 347 с.
14. Восстановление временной компоненты источника тепла в нелинейном уравнении теплопроводности / В.Т. Борухов [и др.] // Труды 5-й Международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" : в 2 т. – Т. 2 : Дифференциальные уравнения и современные проблемы механики. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 17–22.
15. ***Нахушев, А.М.*** Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. – М. : Высшая школа, 1995. – 352 с.

Поступила в редакцию 26.04.2013 г.