УДК 535.51

В.М. РЕДЬКОВ, Е.М. ОВСИЮК

ОПТИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ: О ФОРМУЛИРОВКЕ ЗАКОНА ОТРАЖЕНИЯ СВЕТА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Исследуется влияние релятивистского движения системы отсчета на форму закона отражения света Снеллиуса-Декарта. Для этого закон отражения в неподвижной системе отсчета записывается в векторной форме с применением тройки световых сигналов, соответствующих падающему, отраженному и нормальному к поверхности лучу; последний можно ввести двумя способами: луч, нормально падающий к поверхности, и луч, нормально уходящий от поверхности. На основе использования релятивистских формул аберрации света для каждого из лучей, получена явная форма закона отражения света в системе отсчета движущегося наблюдателя, куда явным образом входит вектор скорости относительного движения систем отсчета. В общем случае тройка световых векторов не лежит в одной плоскости для движущегося наблюдателя, описаны геометрические характеристики возникающей 3-мерной конфигурации.

Введение

Основная цель настоящей работы – исследовать роль релятивистского эффекта аберрации света на явную формулировку закона отражения света Снеллиуса-Декарта. По-другому вопрос может быть поставлен так: как зависит форма закона отражения света от состояния движения релятивистского инерциального наблюдателя. Эта задача обсуждается в литературе уже много лет [1-18]. В целом применяемый в работе подход совпадает с использованным Эйнштейном [1]. Отличие состоит в том, что ниже анализируется самая общая ситуация взаимного расположения скорости относительного движения наблюдателя к плоскости падающего и отраженного лучей света.

При работе с произвольными преобразованиями из группы Лоренца используем изложенные в [19] факты из теории этой группы. Используем 3-скорости световых лучей, чтобы представлять направления падающего и отраженного лучей света, нормаль к отражающей поверхности также представляется посредством нормального луча света (падающего либо отраженного). Задача ставится так: как релятивистская аберрация света влияет на взаимное расположение трех световых лучей: падающего, отраженного и нормального.

Релятивистская форма правила отражения Снеллиуса-Декарта

Введем сначала удобные обозначения. Падающий и отраженный свет в неподвижной системе отсчета K' будем описывать векторами скорости, нормированными на вакуумную скорость

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{W}'_{in}}{c}, \ \mathbf{a}'^2 = 1, \qquad \mathbf{b}' = \frac{\mathbf{W}'_{out}}{c}, \ \mathbf{b}'^2 = 1; \qquad (1)$$

нормали к поверхности можно также сопоставить вектор скорости, перпендикулярный к поверхности

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{W}'_{norm}}{c}, \qquad \mathbf{n}'^2 = 1. \tag{2}$$

Отражение света от плоскости в неподвижной системе отсчета K' можно представить векторной формулой (учитываем, что все три вектора имеют единичную длину – см. рисунок)

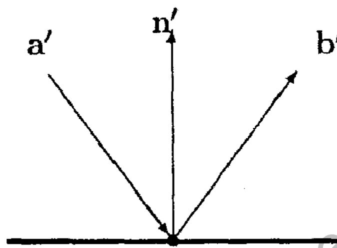

Рис. 1. Отражение в неподвижной системе K'

$$\mathbf{a}' \times \mathbf{n}' = \mathbf{b}' \times \mathbf{n}'. \tag{3}$$

Эта формула включает в себя: 1) равенство углов падения и отражения; 2) условие, что все три вектора лежат в одной плоскости. Равенство косинусов углов падения и отражения можно представить в виде соотношения

$$\mathbf{a}'\,\mathbf{n}' + \mathbf{b}'\,\mathbf{n}' = 0. \tag{4}$$

Перейти к описанию закона отражения в движущейся системе отсчета K – значит пересчитать его с помощью преобразований Лоренца.

Преобразование Лоренца с произвольной скоростью V. Нам потребуется явный вид преобразования Лоренца с любой скоростью **V**, здесь воспользуемся известными результатами из теории группы Лоренца (см. Федоров [19]). Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{V} = \mathbf{e}\,\mathrm{th}\,\beta,\ \mathbf{e}^2 = 1,\ \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} = \mathrm{ch}\,\beta,\ \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} = \mathrm{sh}\,\beta, \tag{5}$$

Преобразование Лоренца действует на координаты $(t, \mathbf{x})$ согласно

$$t' = \mathrm{ch}\,\beta\, t + \mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{e}\,\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{e}\,\mathrm{sh}\,\beta\, t + \mathbf{x} + (\mathrm{ch}\,\beta - 1)\,\mathbf{e}\,(\mathbf{e}\mathbf{x}). \tag{6}$$

Обратное преобразование выглядит как

$$t = \mathrm{ch}\,\beta\, t' - \mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{e}\,\mathbf{x}', \qquad \mathbf{x} = -\mathbf{e}\,\mathrm{sh}\,\beta\, t + \mathbf{x}' + (\mathrm{ch}\,\beta - 1)\,\mathbf{e}\,(\mathbf{e}\mathbf{x}'). \tag{7}$$

Формулы (6) можно переписать в другом виде, выделив продольную и перпендикулярную (относительно **e**) составляющие координатного вектора $\mathbf{x}'$. Действительно, введем обозначения:

$$\mathbf{e}\,(\mathbf{e}\mathbf{x}') = \mathbf{x}'_{\parallel}, \qquad (\mathbf{e}\mathbf{x}') = x'_{\parallel}, \qquad \mathbf{x}' - \mathbf{e}\,(\mathbf{e}\mathbf{x}') = \mathbf{x}'_{\perp} \tag{8}$$

тогда

$$t = \mathrm{ch}\,\beta\, t' + \mathrm{sh}\,\beta\, x'_{\|}, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{e}(\,\mathrm{sh}\,\beta\, t' + \mathrm{ch}\,\beta\, x'_{\|}) + \mathbf{x}'_{\perp}, \tag{9}$$

Преобразование Лоренца (9) можно представить так:

$$t = \mathrm{ch}\,\beta\, t' + \mathrm{sh}\,\beta\, x'_{\|}, \qquad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x}'_{\perp},\ \mathbf{x}_{\|} = \mathbf{e}\,(\mathbf{ex}) = \mathbf{e}(\mathrm{sh}\,\beta\, t' + \mathrm{ch}\,\beta\, x'_{\|})\,. \tag{10}$$

Исходя из полученных выражений для произвольного преобразования Лоренца, получим общую форму релятивистского закона сложения скоростей. Выделяем два события на мировой линии движущейся частицы: $(t_1, \mathbf{x}'_1)$ и $(t_2, \mathbf{x}'_2)$; вектор скорости в системе K' определяется как

$$\mathbf{W}' = \frac{\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1}{t_2 - t_1}\,.$$

В другой системе отсчета K имеем

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1) - \mathbf{e}\,\mathrm{sh}\,\beta\,(t'_2 - t_1) + (\mathrm{ch}\,\beta - 1)\,\mathbf{e}\,[\mathbf{e}(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1)]}{\mathrm{ch}\,\beta\,(t'_2 - t_1) - \mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{e}\,(\mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1)}\,;$$

то есть правило преобразования скорости имеет вид

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{W}' - \mathbf{e}\,\mathrm{sh}\,\beta + (\mathrm{ch}\,\beta - 1)\,\mathbf{e}(\mathbf{e}\,\mathbf{W}')}{\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{e}\,\mathbf{W}'}\,. \tag{11}$$

Эту формулу можно представить иначе:

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{W}' - \mathbf{e}(\mathbf{e}\,\mathbf{W}')}{\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{e}\,\mathbf{W}'} + \frac{\mathrm{ch}\,\beta\,\mathbf{e}(\mathbf{e}\,\mathbf{W}') - \mathbf{e}\,\mathrm{sh}\,\beta}{\mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta\,\mathbf{e}\,\mathbf{W}'}\,. \tag{12}$$

Используя обозначения для продольной и поперечной составляющих скорости $\mathbf{e}(\mathbf{e}\,\mathbf{W}') = \mathbf{W}'_{\|}$, $\mathbf{W}' - \mathbf{e}(\mathbf{e}\,\mathbf{W}') = \mathbf{W}'_{\perp}$ и умножая числитель и знаменатель на $\mathrm{ch}^{-1}\beta = \sqrt{1 - V^2}$, формулу (12) можно записать как

$$\mathbf{W} = \frac{\sqrt{1 - V^2}}{1 - \mathbf{W}'\mathbf{V}}\,\mathbf{W}'_{\perp} + \frac{\mathbf{W}'_{\|} - \mathbf{V}}{1 - \mathbf{W}'\mathbf{V}}\,. \tag{13}$$

Напоминаем, что (13) – это лишь другая форма записи для (11). Форма (13) предпочтительнее по физическим соображениям, но для проведения вычислений удобнее форма (11).

Отражение света в движущейся системе, общий случай. Три вектора из формулы (3) преобразуются по правилу

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{e}\,[\,\mathrm{sh}\,\beta + (\mathrm{ch}\,\beta - 1)\,(\mathbf{ea})\,]}{\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{sh}\,\beta\,(\mathbf{ea})}\,,$$

$$\mathbf{b}' = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{e}\,[\,\mathrm{sh}\,\beta + (\mathrm{ch}\,\beta - 1)\,(\mathbf{eb})\,]}{\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{sh}\,\beta\,(\mathbf{eb})}\,,$$

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} + \mathbf{e}\,[\,\mathrm{sh}\,\beta + (\mathrm{ch}\,\beta - 1)\,(\mathbf{en})\,]}{\mathrm{ch}\,\beta + \mathrm{sh}\,\beta\,(\mathbf{en})}\,. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (3), приходим к соотношению

$$\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{n}+(\mathbf{a}\times\mathbf{e}+\mathbf{e}\times\mathbf{n})\,\mathrm{sh}\,\beta+[(\mathbf{a}\times\mathbf{e})\,(\mathbf{en})+(\mathbf{e}\times\mathbf{n})\,(\mathbf{ea})\,](\mathrm{ch}\,\beta-1)}{\mathrm{ch}\,\beta+\mathrm{sh}\,\beta(\mathbf{ea})}=$$

$$=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{n}+(\mathbf{b}\times\mathbf{e}+\mathbf{e}\times\mathbf{n})\,\mathrm{sh}\,\beta+[(\mathbf{b}\times\mathbf{e})\,(\mathbf{en})+(\mathbf{e}\times\mathbf{n})\,(\mathbf{eb})\,](\mathrm{ch}\,\beta-1)}{\mathrm{ch}\,\beta+\mathrm{sh}\,\beta(\mathbf{eb})}. \quad (15)$$

С учетом формул для двойного векторного произведения

$$\mathbf{e}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{a})=\mathbf{n}(\mathbf{ea})-\mathbf{a}(\mathbf{en}), \qquad \mathbf{e}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{b})=\mathbf{n}(\mathbf{eb})-\mathbf{b}(\mathbf{en})$$

полученное соотношение можно преобразовать к другому виду

$$\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{n}+(\mathbf{a}\times\mathbf{e}+\mathbf{e}\times\mathbf{n})\,\mathrm{sh}\,\beta+\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{a}))(\mathrm{ch}\,\beta-1)}{\mathrm{ch}\,\beta+\mathrm{sh}\,\beta\,(\mathbf{ea})}=$$

$$=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{n}+(\mathbf{b}\times\mathbf{e}+\mathbf{e}\times\mathbf{n})\,\mathrm{sh}\,\beta+\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{b}))(\mathrm{ch}\,\beta-1)}{\mathrm{ch}\,\beta+\mathrm{sh}\,\beta\,(\mathbf{eb})}. \quad (16)$$

Еще раз воспользовавшись формулами для двойного векторного произведения

$\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{a}))=\mathbf{e}\,[\,\mathbf{e}(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\,]-(\mathbf{n}\times\mathbf{a})$, $\mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{b}))=\mathbf{e}\,[\,\mathbf{e}(\mathbf{n}\times\mathbf{b})\,]-(\mathbf{n}\times\mathbf{a})$,
предыдущую формулу можем переписать в виде

$$\frac{\mathrm{ch}\,\beta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{n})+\mathrm{sh}\,\beta\,(\mathbf{a}-\mathbf{n})\times\mathbf{e}+(\mathrm{ch}\,\beta-1)\,\mathbf{e}\,[\,\mathbf{e}(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\,]}{\mathrm{ch}\,\beta+\mathrm{sh}\,\beta\,(\mathbf{ea})}=$$

$$=\frac{\mathrm{ch}\,\beta\,(\mathbf{b}\times\mathbf{n})+\mathrm{sh}\,\beta(\mathbf{b}-\mathbf{n})\times\mathbf{e}+(\mathrm{ch}\,\beta-1)\,\mathbf{e}\,[\,\mathbf{e}(\mathbf{n}\times\mathbf{b})\,]}{\mathrm{ch}\,\beta+\mathrm{sh}\,\beta\,(\mathbf{eb})}, \quad (17)$$

или (поделим числитель и знаменатель в обеих частях равенства на $\mathrm{ch}\,\beta$)

$$\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{n}+\mathrm{th}\,\beta\,(\mathbf{a}-\mathbf{n})\times\mathbf{e}+(1-\mathrm{ch}^{-1}\beta)\,\mathbf{e}\,[\,\mathbf{e}(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\,]}{1+\mathrm{th}\,\beta\,(\mathbf{ea})}=$$

$$=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{n}+\mathrm{th}\,\beta(\mathbf{b}-\mathbf{n})\times\mathbf{e}+(1-\mathrm{ch}^{-1}\beta)\,\mathbf{e}\,[\,\mathbf{e}(\mathbf{n}\times\mathbf{b})\,]}{1+\mathrm{th}\,\beta\,(\mathbf{eb})}. \quad (18)$$

Соотношения (17), (18) представляют собой математическую формулировку закона отражения света Снеллиуса-Декарта в движущейся системе отсчета.

Отмечаем, что в случае, если четыре вектора **a**, **b**, **n**, **e** лежат в одной плоскости, выполняются два равенства

$$[\,\mathbf{e}(\mathbf{n}\times\mathbf{a})\,]=0, \qquad [\,\mathbf{e}(\mathbf{n}\times\mathbf{b})\,]=0, \quad (19)$$

при этом соотношение (18) значительно упрощается:

$$\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{n}+\mathrm{th}\,\beta(\mathbf{a}-\mathbf{n})\times\mathbf{e}}{1+\mathrm{th}\,\beta\,(\mathbf{ea})}=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{n}+\mathrm{th}\,\beta\,(\mathbf{b}-\mathbf{n})\times\mathbf{e}}{1+\mathrm{th}\,\beta\,(\mathbf{eb})}, \quad (20)$$

что может быть представлено как

$$\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{n}+(\mathbf{a}-\mathbf{n})\times\mathbf{V}}{1+\mathbf{aV}}=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{n}+(\mathbf{b}-\mathbf{n})\times\mathbf{V}}{1+\mathbf{bV}}. \tag{21}$$

Выведем одно вспомогательное соотношение, оно позволит векторное соотношение (18) – закон Снеллиуса-Декарта в движущейся системе отсчета – разложить на два более простых уравнения. Для этого умножим равенство (18) скалярно на вектор **e**. По существу, при этом мы находим проекцию векторного уравнения (18) на направление **e**:

$$\frac{\mathbf{e}(\mathbf{a}\times\mathbf{n})+\operatorname{th}\beta\,\mathbf{e}[(\mathbf{a}-\mathbf{n})\times\mathbf{e}]+(1-\operatorname{ch}^{-1}\beta)[\mathbf{e}(\mathbf{n}\times\mathbf{a})]}{1+\operatorname{th}\beta\,(\mathbf{ea})}=$$

$$=\frac{\mathbf{e}(\mathbf{b}\times\mathbf{n})+\operatorname{th}\beta\,\mathbf{e}[(\mathbf{b}-\mathbf{n})\times\mathbf{e}]+(1-\operatorname{ch}^{-1}\beta)[\mathbf{e}(\mathbf{n}\times\mathbf{b})]}{1+\operatorname{th}\beta\,(\mathbf{eb})},$$

отсюда следует равенство

$$\frac{\mathbf{V}(\mathbf{n}\times\mathbf{a})}{1+(\mathbf{Va})}=\frac{\mathbf{V}(\mathbf{n}\times\mathbf{b})}{1+(\mathbf{Vb})}. \tag{22}$$

Замечаем, что с учетом этого в равенстве (18) взаимно сокращаются члены, пропорциональные $(1-\operatorname{ch}^{-1}\beta)$; в результате из (18) получаем соотношение (20) и дальше (21).

Большей ясности относительно выполненных преобразований и упрощений можно достичь, записав уравнение (18) в виде векторного соотношения $\mathbf{A}=\mathbf{B}$. Выполненные преобразования в этих обозначениях состоят из двух шагов: сначала вычисляем проекцию равенства на направление **e**: $\mathbf{eA}=\mathbf{eB}$. Затем вычитаем из векторного уравнения его составляющую вдоль направления **e**:

$$\mathbf{A}-\mathbf{e}(\mathbf{eA})=\mathbf{B}-\mathbf{e}(\mathbf{eB}).$$

Таким образом, закон отражения света Снеллиуса-Декарта в движущейся системе отсчета (18) может быть представлен с помощью двух одновременно выполняющихся соотношений

$$\frac{[\mathbf{V}(\mathbf{n}\times\mathbf{a})]}{1+(\mathbf{Va})}=\frac{[\mathbf{V}(\mathbf{n}\times\mathbf{b})]}{1+(\mathbf{Vb})},$$

$$\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{n}+(\mathbf{a}-\mathbf{n})\times\mathbf{V}}{1+\mathbf{aV}}=\frac{\mathbf{b}\times\mathbf{n}+(\mathbf{b}-\mathbf{n})\times\mathbf{V}}{1+\mathbf{bV}}. \tag{23}$$

Теперь рассмотрим преобразование к движущейся системе отсчета скалярного уравнения

$$\mathbf{a}'\mathbf{n}'+\mathbf{b}'\mathbf{n}'=0, \tag{24}$$

из (24), используя (14), получаем

$$\frac{\mathbf{an}(1-V^2)+(\mathbf{a}+\mathbf{n})\mathbf{V}+[V^2+(\mathbf{aV})(\mathbf{nV})]}{1+\mathbf{aV}}+$$

$$+\frac{\mathbf{bn}+(\mathbf{b}+\mathbf{n})\mathbf{V}+[V^2+(\mathbf{bV})(\mathbf{nV})]}{1+\mathbf{bV}}=0. \quad (25)$$

Напоминаем, что (25) – это пересчитанное к движущейся системе отсчета соотношение (24).

Дополнительно проанализируем еще один аспект преобразования закона отражения света к движущейся системе отсчета. В покоящейся системе отсчета три вектора единичной длины **a**, **n**, **b** лежат в одной плоскости – легко можно получить выражение для вектора **b** в виде линейного разложения по двум остальным (рисунок 2):

$$\mathbf{b}'=\alpha\,\mathbf{a}'+\nu\,\mathbf{n}',$$

$$\mathbf{a}'\times\mathbf{n}'=(\alpha\,\mathbf{a}'+\nu\,\mathbf{n}')\times\mathbf{n}', \qquad \Rightarrow \qquad \alpha=+1,\ \mathbf{b}'=\mathbf{a}'+\nu\,\mathbf{n}'.$$

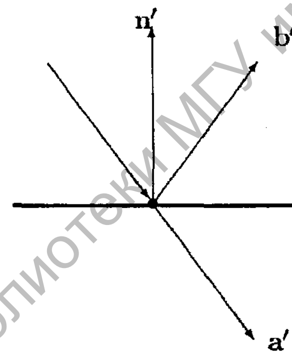

Рис. 2. Плоскость падения-отражения

Учтем равенства

$$\mathbf{a}'\mathbf{n}'=-\cos\phi, \qquad \mathbf{b}'\mathbf{n}'=+\cos\phi, \qquad (\mathbf{a}'+\mathbf{b})'\mathbf{n}'=0,$$

$$(2\mathbf{a}'+\nu\mathbf{n}')\,\mathbf{n}'=0, \qquad \nu=-2(\mathbf{a}'\mathbf{n}')=-2\cos\phi.$$

Таким образом, справедливо разложение (по существу, это еще одна формулировка закона отражения света Снеллиуса-Декарта в неподвижной системе отсчета)

$$\mathbf{b}'=\mathbf{a}'-2(\mathbf{a}'\mathbf{n}')\,\mathbf{n}'. \quad (26)$$

Преобразуем это уравнение к движущейся системе отсчета K'. Для этого подставим в формулу (24) соотношения (14):

$$\frac{\mathbf{b}+\mathbf{e}[\operatorname{sh}\beta+(\operatorname{ch}\beta-1)(\mathbf{eb})]}{\operatorname{ch}\beta+\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{eb})}=$$

$$=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{e}[\operatorname{sh}\beta+(\operatorname{ch}\beta-1)(\mathbf{ea})]}{\operatorname{ch}\beta+\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{ea})}+\nu\,\frac{\mathbf{n}+\mathbf{e}[\operatorname{sh}\beta+(\operatorname{ch}\beta-1)(\mathbf{en})]}{\operatorname{ch}\beta+\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{en})}. \quad (27)$$

Отмечаем, что структура соотношения такова: вектор **b** в общем случае не лежит в плоскости векторов **a** и **n**, появляется составляющая вдоль направляющего вектора скорости **e**:

$$\mathbf{b} = A\,\mathbf{a} + B\,\mathbf{n} + C\,\mathbf{e}.$$

Соотношение (27) может быть разрешено относительно **b**. Действительно, умножив (27) скалярно на вектор **e**, получим

$$\frac{\operatorname{sh}\beta + \operatorname{ch}\beta(\mathbf{eb})}{\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{eb})} = \frac{\operatorname{sh}\beta + \operatorname{ch}\beta(\mathbf{ea})}{\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{ea})} + \nu\,\frac{\operatorname{sh}\beta + \operatorname{ch}\beta(\mathbf{en})\,]}{\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta(\mathbf{en})} \equiv B; \quad (28)$$

для сокращения записи правую часть уравнения (28) обозначили буквой B. Из уравнения (28) легко выражается величина (**eb**):

$$\mathbf{eb} = \frac{B - \operatorname{th}\beta}{1 - B\operatorname{th}\beta}. \quad (29)$$

Полученное равенство не удивительно, поскольку $B \equiv \mathbf{b}'\mathbf{e}$. Замечаем, что с учетом (28) в соотношении (27) взаимно сокращается часть членов слева и справа, выпишем их:

$$\frac{\mathbf{e}[\operatorname{sh}\beta + \operatorname{ch}\beta\,(\mathbf{eb})\,]}{\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{eb})} = \frac{\mathbf{e}[\operatorname{sh}\beta + \operatorname{ch}\beta\,(\mathbf{ea})\,]}{\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{ea})} + \nu\,\frac{\mathbf{e}[\operatorname{sh}\beta + \operatorname{ch}\beta\,(\mathbf{en})\,]}{\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{en})}, \quad (30)$$

в результате из (27) следует более простое уравнение:

$$\frac{\mathbf{b} - \mathbf{e}\,(\mathbf{eb})}{\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{eb})} = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{e}\,(\mathbf{ea})}{\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{ea})} + \nu\,\frac{\mathbf{n} - \mathbf{e}\,(\mathbf{en})\,]}{\operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{en})}. \quad (31)$$

Понятно, что (30) и (31) – это проекции уравнения (18) на направление вектора **e** и ортогональную ему плоскость. Уравнение (31) можно записать также и так:

$$\frac{\mathbf{b}_\perp}{1 + \mathbf{bV}} = \frac{\mathbf{a}_\perp}{1 + \mathbf{aV}} + \nu\,\frac{\mathbf{n}_\perp}{1 + \mathbf{nV}}. \quad (32)$$

Количественной мерой нарушения закона – *луч падающий, отраженный и нормаль лежат в одной плоскости* – при переходе к общему случаю движущейся системы отсчета K может рассматриваться объем параллелепипеда, построенного на трех векторах **a**, **n**, **b**:

$$\Delta' = \mathbf{n}'\,(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') = 0, \qquad \Delta = \mathbf{n}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (33)$$

Вычислим его, воспользовавшись преобразованием Лоренца:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}' + \mathbf{e}[-\operatorname{sh}\beta + (\operatorname{ch}\beta - 1)\,(\mathbf{ea}')\,]}{\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{ea}'},$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}' + \mathbf{e}[-\operatorname{sh}\beta + (\operatorname{ch}\beta - 1)\,(\mathbf{eb}')\,]}{\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{eb}'},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n} + \mathbf{e}[-\operatorname{sh}\beta + (\operatorname{ch}\beta - 1)\,(\mathbf{en}')\,]}{\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{en}'}.$$

Получаем

$$\Delta = \frac{1}{(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{en}')(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{ea}')(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{eb}')}\times$$
$$\times\{\ [\,\mathbf{n}'(\mathbf{a}'\times\mathbf{e})\,][\,-\operatorname{sh}\beta + (\operatorname{ch}\beta - 1)\,\mathbf{eb}'\,] +$$
$$+[\,\mathbf{n}'(\mathbf{e}\times\mathbf{b}')\,][\,-\operatorname{sh}\beta + (\operatorname{ch}\beta - 1)\,\mathbf{ea}'\,] +$$
$$+[\,\mathbf{e}(\mathbf{a}'\times\mathbf{b}')\,][-\operatorname{sh}\beta + (\operatorname{ch}\beta - 1)\,\mathbf{en}'\,]\}. \qquad (34)$$

Воспользуемся формулой (см. (26)) $\mathbf{b}' = \mathbf{a}' - 2(\mathbf{a}'\mathbf{n}')\,\mathbf{n}' = \mathbf{a}' + \nu\,\mathbf{n}'$, тогда предыдущее равенство можно переписать как

$$\Delta = \frac{1}{(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{en}')(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{ea}')(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{eb}')}\times$$
$$\times\{\ [\,\mathbf{n}'(\mathbf{a}'\times\mathbf{e})\,][\,-\operatorname{sh}\beta + (\operatorname{ch}\beta - 1)(\mathbf{ea}' + \nu\,\mathbf{en}')\,] +$$
$$+[\,\mathbf{n}'(\mathbf{e}\times\mathbf{a}')\,][\,-\operatorname{sh}\beta + (\operatorname{ch}\beta - 1)(\mathbf{ea}')] +$$
$$+\nu\,[\,\mathbf{e}(\mathbf{a}'\times\mathbf{n}')\,][-\operatorname{sh}\beta + (\operatorname{ch}\beta - 1)(\mathbf{en}')\,]\}, \qquad (35)$$

или

$$\Delta = \frac{[\,\mathbf{e}(\mathbf{n}'\times\mathbf{a}')\,]}{(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{en}')(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{ea}')(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{eb}')}\times$$
$$\times[\,-\operatorname{sh}\beta + (\operatorname{ch}\beta - 1)(\mathbf{ea}' + \nu\,\mathbf{en}') + \operatorname{sh}\beta - (\operatorname{ch}\beta - 1)\,\mathbf{ea}' + \nu\operatorname{sh}\beta - \nu(\operatorname{ch}\beta - 1)\,\mathbf{en}'\,] =$$
$$= \frac{\nu\operatorname{sh}\beta\,[\,\mathbf{e}(\mathbf{n}'\times\mathbf{a}')\,]}{(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{en}')(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{ea}')(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{eb}')}$$

Таким образом, получено соотношение

$$\Delta = \mathbf{n}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = [\,\mathbf{e}(\mathbf{n}'\times\mathbf{a}')\,]\,\frac{-2\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{a}'\mathbf{n}')}{(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{en}')(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{ea}')(\operatorname{ch}\beta - \operatorname{sh}\beta\,\mathbf{eb}')}. \qquad (36)$$

Обсудим еще один аспект проблемы релятивизации закона отражения света. А именно, обратим внимание на то, что полученная форма закона отражения света зависит, вообще говоря, от дополнительного предположения – *нормаль задается уходящим от поверхности ортогональным к поверхности лучом света.* Однако выбор направления движения света по нормали – это, вообще говоря, случайное предположение, мы могли бы выбрать представителем нормали и луч света, падающий на поверхность.

Все дело в том, что, если в покоящейся системе отсчета два световых вектора связаны соотношением

$$\mathbf{N}' = -\,\mathbf{n}', \qquad (37)$$

то после перехода к движущейся системе отсчета с помощью преобразования Лоренца мы получаем два вектора, которые в общем случае совсем не параллельны друг другу. Действительно, в движущейся системе отсчета имеем следующие представления для векторов из (40):

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{n}'+\mathbf{e}\,[\,-\operatorname{sh}\beta+(\operatorname{ch}\beta-1)\,(\mathbf{e}\,\mathbf{n}')\,]}{\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{e}\mathbf{n}')}, \tag{38}$$

$$\mathbf{N}=\frac{-\mathbf{n}'+\mathbf{e}\,[\,-\operatorname{sh}\beta-(\operatorname{ch}\beta-1)\,(\mathbf{e}\,\mathbf{n}')\,]}{\operatorname{ch}\beta+\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{e}\mathbf{n}')}. \tag{39}$$

Легко можно вычислить векторное произведение

$$\mathbf{n}\times\mathbf{N}=\frac{2\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}^2\beta-\operatorname{sh}^2\beta\,(\mathbf{e}\mathbf{n}')^2}\,\mathbf{e}\times\mathbf{n}. \tag{40}$$

Аналогично, для скалярного произведения получаем выражение

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}=1-\frac{2}{\operatorname{ch}^2\beta-\operatorname{sh}^2\beta(\mathbf{e}\mathbf{d})^2}. \tag{41}$$

Если бы при формулировке закона отражения света в неподвижной системе отсчета K' вместо вектора $\mathbf{n}$ использовался обратный вектор $\mathbf{N}$

$$\mathbf{a}'\times\mathbf{N}'=\mathbf{b}'\times\mathbf{N}', \qquad \mathbf{a}\mathbf{N}+\mathbf{b}\mathbf{N}=0, \tag{42}$$

то формально в дальнейших вычислениях изменилось бы очень немного: везде вместо $\mathbf{n}$ надо написать символ $\mathbf{N}$. Вместо (17) и (25) будем иметь формулы:

$$\frac{\operatorname{ch}\beta\,(\mathbf{a}\times\mathbf{N})+\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{a}-\mathbf{N})\times\mathbf{e}+(\operatorname{ch}\beta-1)\,\mathbf{e}\,[\,\mathbf{e}(\mathbf{N}\times\mathbf{a})\,]}{\operatorname{ch}\beta+\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{e}\mathbf{a})}=$$

$$=\frac{\operatorname{ch}\beta\,(\mathbf{b}\times\mathbf{N})+\operatorname{sh}\beta(\mathbf{b}-\mathbf{N})\times\mathbf{e}+(\operatorname{ch}\beta-1)\,\mathbf{e}\,[\,\mathbf{e}(\mathbf{N}\times\mathbf{b})\,]}{\operatorname{ch}\beta+\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{e}\mathbf{b})}, \tag{43}$$

$$\frac{\mathbf{a}\mathbf{N}(1-V^2)+(\mathbf{a}+\mathbf{N})\mathbf{V}+[\,V^2+(\mathbf{a}\mathbf{V})(\mathbf{N}\mathbf{V})\,]}{1+\mathbf{a}\mathbf{V}}+$$

$$+\frac{\mathbf{b}\mathbf{N}+(\mathbf{b}+\mathbf{N})\mathbf{V}+[\,V^2+(\mathbf{b}\mathbf{V})(\mathbf{N}\mathbf{V})\,]}{1+\mathbf{b}\mathbf{V}}=0. \tag{44}$$

Эти соотношения представляют математическую запись закона отражения в движущейся системе отсчета, когда вектор нормали задается лучом света, нормально падающим на отражающую поверхность. Преобразованные к движущейся системе отсчета векторы нормально падающего и нормально отраженного лучей света различаются – см (38) и (39). Вместо (36) будем иметь

$$\Delta=[\mathbf{N}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]=[\,\mathbf{e}(\mathbf{N}'\times\mathbf{a}')\,]\,\frac{-2\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{a}'\mathbf{N}')}{(\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\beta\,\mathbf{e}\mathbf{N}')\,(\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\beta\,\mathbf{e}\mathbf{a}')\,(\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\beta\,\mathbf{e}\mathbf{b}')}=$$

$$=[\,\mathbf{e}(\mathbf{n}'\times\mathbf{a}')\,]\,\frac{-2\operatorname{sh}\beta\,(\mathbf{a}'\mathbf{n}')}{(\operatorname{ch}\beta+\operatorname{sh}\beta\,\mathbf{e}\mathbf{n}')\,(\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\beta\,\mathbf{e}\mathbf{a}')\,(\operatorname{ch}\beta-\operatorname{sh}\beta\,\mathbf{e}\mathbf{b}')}= \tag{45}$$

Существование в движущейся системе отсчета двух существенно различающихся направлений нормали к отражающей поверхности указывает на то, что полученные выше формулы в связи с законом отражения света нужно рассматривать скорее как описание релятивистского эффекта аберрации для двух троек векторов: **a, b, n** и **a, b, N**.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Einstein, A.*** Zur Elektrodynamik der bewegten Korper / A. Einstein // Annalen der Physik. – 1905. – Bd. 17. – № 10. – S. 891–921.
2. ***Laub, J.*** On the optics of moving bodies / J. Laub // Annalen der Physik. – 1907. – Bd. 23. – № 9. – S. 738–744.
3. ***Laue, M.*** The entrainment of light through moving bodies according to the relativity principle / M. Laue // Annalen der Physik. – 1907. – Bd. 23. – № 10. – S. 989–990.
4. ***Strasser, B.*** The Fizeau experiment on the alteration of the polarisation azimuth of a refracted ray by the earth's motion / B. Strasser // Annalen der Physik. – 1907. – Bd. 24. – № 11. – S. 137–144.
5. ***Laub, J.*** The optical characteristics of moving bodies / J. Laub // Annalen der Physik. – 1908. – Bd. 25. – № 1. – S. 175–184.
6. ***Runge, J.*** The application of vector calculations on the basis of geometric optics / J. Runge // Annalen der Physik. – 1911. – Bd. 35. – № 7. – S. 277–298.
7. ***Harnack, A.*** The theory of movable mirrors / A. Harnack // Annalen der Physik. – 1912. – Bd. 39, № 15. – S. 1053–1058.
8. ***Harnack, A.*** Regarding the theory of movable mirrors. II / A. Harnack // Annalen dder Physik. – 1914. – Bd. 43, № 2. – S. 295–308.
9. ***Frank, P.*** Use of the vector analysis on the geometrical optics in moving bodies / P. Frank // Annalen der Physik. – 1917. – Bd. 52, № 6. – S. 649–656.
10. ***Kennard, E.H.*** On reflection from a moving mirror and the Michelson-Morley experiment / E.H. Kennard, D.E. Richmond // Phys. Rev. – 1922. – Vol. 19. – P. 572–577.
11. ***Censor, D.*** Scattering of a plane wave at a plane interface separating 2 moving media / D. Censor // Radio Science. – 1969. – Vol. 4. – № 11. – P. 1079.
12. ***Болотовский, Б.*** Отражение волны от движущегося зеркала и связанные проблемы / Б. Болотовский, С.Н. Столяров // УФН. – 1989. – Т. 159. – Вып. 1. – С. 155–180.
13. ***He, Q.C.*** Reflection of plane electromagnetic waves from the surface of a perfect conductor moving in an arbitrary direction / Q.C. He, Y.X. Huang // Chinese Science Bulletin. – 2000. – Vol. 45. – № 17. – P. 1564–1569.
14. ***Puccini, G.D.*** Doppler effect and aberration of light from the point of view of absolute motion / G.D. Puccini, F. Selleri // Nuovo Cimento. B. – 2002. – Vol. 117. – № 3. – P. 283–293.
15. ***Gjurchinovski, A.*** Aberration of light in a uniformly moving optical medium / A. Gjurchinovski // Am. J. Phys. – 2004. – Vol. 72. – № 7. – P. 934–940.
16. ***Gjurchinovski, A.*** Reflection of light from a uniformly moving mirror / A. Gjurchinovski // Am. J. Phys. – 2004. – Vol. 72. – № 10. – P. 1316–1324.
17. ***Gjurchinovski, A.*** Einstein's mirror and Fermat's principle of least time / A. Gjurchinovski // Am. J. Phys. – 2004. – Vol. 72. – № 10. – P. 1325–1327.
18. ***Red'kov, V.M.*** Relativistic aberration effect on the light reflection law, and the form of reflecting surface in a moving reference frame / V.M. Red'kov, Bernhard Rothenstein, George J. Spix // e-Print archive [Electronic resource]. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/physics/0609023.
19. ***Федоров, Ф.И.*** Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

Поступила в редакцию 04.05.2011 г.

13. ***Adams, C.W.*** The pathogenesis of atherosclerosis / C.W. Adams // J. Clin Pathol (Suppl). – 1973. – Vol. 26. – P. 38–42.
14. ***St. Clair, R.W.*** Composition and synthesis of fatty acids in atherosclerotic aortas of the pigeon / R.W. Clair St., H.B. Lofland, T.B. Clarkson // J. Lipid Res. – 1968. – Vol. 9. – P. 739–747.
15. ***Кржечковская, В.В.*** Мембранносвязанный цитохром b_5 и метаболизм липидов (реакции, не связанные с участием цитохрома P-450) / В.В. Кржечковская, А.А. Кубатиев, Ю.И. Наумов // Мембраны, Серия "Критические технологии", ВИНИТИ. – 2004. – № 2(22). – С. 9–21.
16. ***Горяев, М.И.*** Справочник по газожидкостной хроматографии органических кислот / М.И. Горяев, Н.А. Евдакова. – Алма-Ата : Наука, 1977. – 552 с.
17. Липиды и рак. Очерки липидологии онкологического процесса / М.Г. Акимов [и др.] ; под ред. В.В. Безуглова и С.С. Коновалова. – СПб. : Прайм-ЕВРОЗНАК, 2009. – 352 с.
18. ***Назаров, П.Е.*** Полиненасыщенные жирные кислоты как универсальные эндогенные биорегуляторы / П.Е. Назаров, Г.И. Мягкова, Н.В. Гроза // Вестник МИТХТ. – 2009. – Т. 4 – № 5. – С. 3–19.

Поступила в редакцию 30.05.2011 г.