УДК 512.542

В.В. ШПАКОВ

ХОЛЛОВСКИ ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА

В настоящей статье исследуются классы Фиттинга, замкнутые относительно холловых π-подгрупп. В частности, изучается вопрос определения посредством решеточных объединений критерия холловской замкнутости для π-разрешимых классов Фиттинга. Доказано, что если $\mathfrak{F}$ – π-разрешимый класс Фиттинга и $\pi \subseteq P$, то $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F})$.

Введение

В теории конечных разрешимых групп ряд глубоких и содержательных результатов связан с изучением классов Фиттинга, определяемых подгруппами Холла. Напомним, что подгруппу G_π группы G называют холловой π-группой, если порядок G_π есть π-число, а индекс G_π в G является π'-числом.

В этом направлении особый интерес представляют классы Фиттинга, замкнутые относительно холловых подгрупп. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют замкнутым относительно холловых π-подгрупп, если для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ ее холлова π-подгруппа также принадлежит $\mathfrak{F}$. Основополагающий результат, связанный с классами, замкнутыми относительно холловых π-подгрупп, был получен Брайсом и Косси [1] в теории нормальных классов Фиттинга. Было установлено, что минимальный нормальный класс Фиттинга $\mathfrak{S}_*$ является замкнутым относительно холловых π-подгрупп для любого множества простых чисел π.

В 1977 г. Хаук определил класс $K_\pi(\mathfrak{F})$ [2] всех тех групп, холловы π-подгруппы которых принадлежат классу Фиттинга $\mathfrak{F}$. В дальнейшем класс $K_\pi(\mathfrak{F})$ нашел широкое применение в решении ряда задач теории классов Фиттинга. В частности, в работе Бризона [3] посредством класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ были описаны $\mathfrak{F}$-радикалы холловых подгрупп.

Впоследствии Кусак [4] посредством решеточных объединений и класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ определил для нормальных классов Фиттинга критерий замкнутости относительно холловых π-подгрупп. Было установлено, что если $\mathfrak{F}$ – нормальный класс Фиттинга и $\pi \subseteq P$, то $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп в точности тогда, когда $\mathfrak{F} = (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{S}_*) \cap \mathfrak{F})$.

Этот результат был расширен Бризоном [5] на случай произвольного разрешимого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

С учетом известной теоремы С.А. Чунихина [6] о том, что холловы π-подгруппы существуют и сопряжены в любой конечной π-разрешимой группе, естественна задача изучения холловской замкнутости класса Фиттинга в классе всех конечных π-разрешимых групп.

Основной результат настоящей работы – доказательство критерия замкнутости π-разрешимого класса Фиттинга относительно холловых π-подгрупп. Доказано, что если $\mathfrak{F}$ – π-разрешимый класс Фиттинга и $\pi \subseteq P$, то $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых подгрупп тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F})$.

1. Предварительные сведения. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга [7], если $\mathfrak{F}$ замкнут относительно взятия нормальных подгрупп и произведения нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, подгруппа $G_\mathfrak{F}$ группы G называется $\mathfrak{F}$-радикалом группы G [7], если она является наибольшей из нормальных подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. Произведением классов Фиттинга [7] $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называют класс всех тех групп G, факторгруппы по $\mathfrak{F}$-радикалу которых являются $\mathfrak{H}$-подгруппами. Хорошо известно, что произведение двух классов Фиттинга снова является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна (см., например, (IX.1.12 [7])).

Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда их решеточным объединением $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ называют [7] класс Фиттинга, порожденный объединением $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$.

Напомним, что группу G называют комонолитической [7], если $G \neq 1$ и в G существует единственная максимальная нормальная подгруппа.

Мы также будем использовать следующее известное свойство комонолитических групп.

Лемма 1.1. (А.14.15 [7]). *Пусть $N \lhd G$ и S – минимальное субнормальное дополнение N в G. Тогда если G/N – комонолитическая группа, то и S – комонолитическая.*

Следующая лемма известна как “Квази-R_0 лемма”.

Лемма 1.2. (IX.1.13 [7]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и N_1 и N_2 – нормальные подгруппы группы G такие, что $N_1 \cap N_2 = 1$ и $G/N_1N_2 \in \mathfrak{N}$. Тогда*

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $G/N_1 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_2 \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что подгруппа N прямого произведения $G \times H$ групп G и H входит подпрямо в $G \times H$, если $N(1 \times H) = G \times H = (G \times 1)N$.

Для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ Локетт [8] определил класс $\mathfrak{F}^*$ как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, и такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$, и класс $\mathfrak{F}_*$ – как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{X}^*$. Используя оператор Локетта “$*$”, на множестве классов Фиттинга можно определить отношение эквивалентности “~”. А именно если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – непустые радикальные классы, то $\mathfrak{F} \sim \mathfrak{H}$ в том и только том случае, если $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{H}^*$. Класс эквивалентности с представителем $\mathfrak{F}$ называют секцией Локетта класса $\mathfrak{F}$ (XI.1.16 [7]) и обозначают $Locsec(\mathfrak{F})$.

Известные свойства операторов Локетта “$*$” и “$_*$” приведены в следующей лемме.

Лемма 1.3 [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F}_* = (\mathfrak{F}_*)_* = (\mathfrak{F}^*)_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^* \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{A}$, где класс всех абелевых групп;

2) если $\mathfrak{H}$ – непустой класс Фиттинга, то $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}^*$;

3) если $G \in \mathfrak{F}$ и H – холлова *π-подгруппа, то*

$$(G \times G)_{\mathfrak{F}_*} = H_{\mathfrak{F}_*} \times H_{\mathfrak{F}_*}\langle (g^{-1}, g) : g \in G \rangle.$$

Лемма 1.4. [8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G' \subseteq G_{\mathfrak{F}_*}$.*

Обозначим через $Hall_\pi(G)$ множество всех холловых π-подгрупп группы G. Мы будем использовать следующие известные свойства холловых π-подгрупп.

Лемма 1.5. (I.3.2 [7]). *Пусть $G_\pi \in Hall_\pi(G)$, $M \subseteq G$ и $N \lhd G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G_\pi \cap N \in Hall(G_\pi)$;

2) $G_\pi \cap MN = (G_\pi \cap M) \cap (G_\pi \cap N) \in Hall(MN)$;

3) $G_\pi N / N \in Hall(G / N)$.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – некоторое множество простых чисел, то через $K_\pi(\mathfrak{F})$ (XI.1.24 [7]) обозначается класс всех тех групп, в которых холлова π-подгруппа является $\mathfrak{F}$-группой, т.е. $K_\pi(\mathfrak{F}) = (G \in \mathfrak{S}^\pi : G_\pi \in \mathfrak{F})$.

Лемма 1.6. [9]. Если G – π-разрешимая группа, то $C_G(F_\pi(G)) \subseteq F_\pi(G)$.

Напомним хорошо известное тождество Дедекинда, которое представляет

Лемма 1.7 (A.1.3 [7]). *Пусть U, V и W подгруппы группы G, причем $V \subseteq U$, тогда $U \cap VW = V(U \cap W)$.*

Следующая лемма представляет известное свойство класса $K_\pi(\mathfrak{F})$.

Лемма 1.8 [3]. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $K_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq K_\pi(\mathfrak{H})$.*

Напомним, что если G и H – некоторые группы, то через $Snemb(S \to G)$ обозначают множество всех субнормальных вложений G в H (т.е. мономорфизмов $\alpha : G \to H$ таких, что $G\alpha$ субнормальна в G).

Мы будем использовать также подгруппу $N(G)$, которая была определена в работе [10]. Напомним, что если G – некоторая группа, то подгруппа $N(G)$ определяется следующим образом $N(G) = \langle x^{-1}x^\alpha : x \in S \lhd\lhd G, \alpha \in Snemb(S \to G) \rangle$.

Приведем теперь в качестве лемм необходимые в дальнейшем свойства подгруппы $N(G)$.

Лемма 1.9 (3.5 [10]). *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Группа $G \in \mathfrak{F}_*$ тогда и только тогда, когда существует группа $H \in \mathfrak{F}$ и отображение $\alpha \in Snemb(G \to H)$ такое, что $G^\alpha \subseteq N(H)$.*

Лемма 1.10 (3.2 [11]). *Пусть $G_\pi \in Hall_\pi(G)$, где $\varnothing \neq \pi \subset P$, и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда $G_\pi \cap N(G) = N(G_\pi G_{\mathfrak{F}})$.*

Лемма 1.11 (3.1 [10]). *Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) $G' \subseteq [G, AutG] \subseteq N(G)$;

2) если $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и $G \in \mathfrak{X}$, то $N(G) \subseteq G_{\mathfrak{X}_*}$.

2. О некоторых свойствах решеточного объединения. В данном разделе рассматриваются конечные группы. Напомним, что если $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга, то $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, порожденный объединением $\mathfrak{F} \cup \mathfrak{H}$.

Следующая теорема описывает структуру классов Фиттинга вида $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ и представляет самостоятельный результат.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \{G \mid G = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}}\}$ в точности тогда, когда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{E}_\pi$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$.*

Доказательство. Пусть $\pi \subseteq P$, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{E}_{\pi}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{E}_{\pi}$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{E}_{\pi}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{E}_{\pi}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} \subseteq (\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{E}_{\pi}) \vee (\mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{E}_{\pi})$. Пусть теперь $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'} \cap \mathfrak{H}\mathfrak{E}_{\pi}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$ и $G \in \mathfrak{H}\mathfrak{E}_{\pi}$. По определению произведения классов Фиттинга получаем, что $G / G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$ и $G / G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{E}_{\pi}$. Следовательно,

$$G / G_{\mathfrak{F}} / G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}} / G_{\mathfrak{F}} \cong G / G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{E}_{\pi'}$$

и $$G / G_{\mathfrak{H}} / G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}} / G_{\mathfrak{H}} \cong G / G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{E}_{\pi}.$$

Получаем, что $G / G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{E}_{\pi} \cap \mathfrak{E}_{\pi'} = (1)$. Это означает, что $G = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}}$. Пусть теперь $G = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}}$. Заметим, что $G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ и $G_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, то $G \in \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$. Окончательно получаем, что $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \{G \mid G = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}}\}$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \{G \mid G = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}}\}$. Покажем, что существует некоторое непустое множество простых чисел π такое, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{E}_{\pi}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$. Определим множество π следующим образом: число p принадлежит π, если существует группа $G \in \mathfrak{F}$ такая, что индекс $\mathfrak{H}$-радикала в G делится на p. Если предположить, что $\pi = \varnothing$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \mathfrak{H}$.

Рассмотрим случай, когда $\pi \neq \varnothing$. Будем считать, что для любого $p \in \pi$ существуют группы $G \in \mathfrak{H}$ такие, что индекс $\mathfrak{F}$-радикала в G делится на p. Для некоторого произвольного p выберем группу L минимального порядка, удовлетворяющую указанным выше требованиям. Пусть $N \lhd L$. Получим $N / N_{\mathfrak{F}} = N / N \cap L_{\mathfrak{F}}$. Тогда $N / N \cap L_{\mathfrak{F}} \cong NL_{\mathfrak{F}} / L_{\mathfrak{F}}$. Так как L – минимального порядка, то $NL_{\mathfrak{F}} / L_{\mathfrak{F}} \cong N / N_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{E}_{p'}$. Следовательно, $(L / L_{\mathfrak{F}})_{\mathfrak{E}_{p'}}$ – единственная максимальная нормальная подгруппа группы $L / L_{\mathfrak{F}}$. Пусть теперь подгруппа K является минимальным субнормальным дополнением $L_{\mathfrak{F}}$ в L. По лемме 1.1 K является комонолитической и $K / K_{\mathfrak{F}} = L / L_{\mathfrak{F}}$. Это противоречит тому, что L – группа минимального порядка, значит $L = K$. Следовательно, L – комонолитическая группа и если M – единственная максимальная подгруппа группы L, то $|K / M| = p$. Выберем $H \in \mathfrak{F}$ такую, что $H^{\mathfrak{E}_p} \subset H$ и $H_{\mathfrak{H}} \subset H$. Используя конструкцию, описанную в A.14.17 [7], построим комонолитическую группу G с нормальными подгруппами N_1 и N_2 такими, что $N_1 \cap N_2 = 1$, $|G / N_1 N_2| = p$, $G / N_1 \cong L$ и $G / N_2 \cong H$. Так как $G / N_1 \cong L \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ и $G / N_2 \cong H \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$, то по лемме 1.2 получим, что $G \in \mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$. Если $G = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}}$ и G – комонолитическая, то $G \in \mathfrak{F}$ или $G \in \mathfrak{H}$. Но если $G \in \mathfrak{F}$, то по лемме 1.2 $L \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $|L / L_{\mathfrak{F}}| = 1$ и $|L : L_{\mathfrak{F}}|$ не делится на p. Получаем противоречие. Случай, когда $G \in \mathfrak{H}$, рассматривается аналогично. Получаем, что для любого $p \in \pi$ не существует группы $G \in \mathfrak{H}$ такой, что индекс $\mathfrak{F}$-радикала в G делится на p. Это означает, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{E}_{\pi'}$. Включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{E}_{\pi}$ следует непосредственно из построения множества π.

Определим множество групп $\mathfrak{M}$ следующим образом:

1) $\mathfrak{M} \neq \varnothing$;

2) если $G \in \mathfrak{M}$ и $N \; char \; G$, то $N \in \mathfrak{M}$;

3) если $M, N \in \mathfrak{M}$, то существует $H \in \mathfrak{M}$ такая, что $M, N \lhd H = MN \in \mathfrak{M}$.

Построим теперь класс групп

$\mathfrak{X} = (G : \textit{существует группа } M \in \mathfrak{M} \textit{ такая, что } (G \times M)_{\mathfrak{F}} \textit{ входит подпрямо в } (G \times M))$.

Важные свойства класса $\mathfrak{X}$ описывает следующая

Теорема 2.2. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга;

2) $\mathfrak{X} = \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}^*) \in Locsec(\mathfrak{F})$.

Доказательство. 1) Пусть $G \in \mathfrak{X}$ и $N \lhd G$. Тогда существует группа $M \in \mathfrak{M}$ такая, что $(G \times M)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $(G \times M)$. Определим множество H следующим образом: $H = \{m \in M : \exists n \in N, (n,m) \in (G \times M)_{\mathfrak{F}}\}$. Пусть $m_1, m_2 \in H$. Тогда существует $n_1, n_2 \in N$ такие, что $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in (G \times M)_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $(n_1 n_2^{-1}, m_1 m_2^{-1}) \in (G \times M)_{\mathfrak{F}}$ и $m_1 m_2^{-1} \in H$. Значит, H – подгруппа группы M. Пусть $\varphi \in AutM$. Обозначим через $\overline{\varphi}$ элемент $(1, \varphi)$ из $AutG \times AutM$. Заметим, что $\overline{\varphi} \in Aut(G \times M)$. Если $n \in N$, $m \in M$ и $(n,m) \in (G \times M)_{\mathfrak{F}}$, то $(n,m)^{\varphi} = (n,m)^{\overline{\varphi}} \in (G \times M)_{\mathfrak{F}}^{\overline{\varphi}}$. Так как $(G \times M)_{\mathfrak{F}}$ $char$ $(G \times M)$, то $(G \times M)_{\mathfrak{F}}^{\overline{\varphi}} = G \times M$. Следовательно, если $m \in H$, то $m^{\varphi} \in H$ и H $char$ M. Ввиду построения множества $\mathfrak{M}$ получаем, что $H \in \mathfrak{M}$. Так как $(G \times M)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $(G \times M)$, то для каждого $n \in N$ существует такое $m \in M$, что $(n,m) \in (G \times M)_{\mathfrak{F}}$. Заметим также, что для каждого $m \in H$ существует $n \in N$ такое, что $(n,m) \in (G \times M)_{\mathfrak{F}}$. Учитывая построение подгруппы H, получаем, что $(N \times H)_{\mathfrak{F}} = (N \times H) \cap (G \times M)_{\mathfrak{F}}$. Это означает, что $(N \times H)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $(N \times H)$. Следовательно, $N \in \mathfrak{X}$.

Пусть теперь $G = N_1 N_2$, $N_1, N_2 \in \mathfrak{X}$ и $N_1 N_2 \lhd G$. По определению множества $\mathfrak{M}$ существуют группы $H, M \in \mathfrak{M}$ такие, что $(N_1 \times H)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $N_1 \times H$ и $(N_2 \times M)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $N_2 \times M$. Так же из определения $\mathfrak{M}$ следует, что существует группа $K \in \mathfrak{M}$ такая, что $H, M \lhd K = HM$. Каждый элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = n_1 n_2$, где $n_1 \in N_1$ и $n_2 \in N_2$. Из того, что $(N_1 \times H)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $N_1 \times H$ и $(N_2 \times M)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $N_2 \times M$, следует, что существуют некоторые $h \in H$ и $m \in M$ такие, что $(n_1, h) \in (N_1 \times H)_{\mathfrak{F}}$ и $(n_1, m) \in (N_2 \times M)_{\mathfrak{F}}$. Заметим, что если $k \in K$, то $k = hm$ и $(g,m) = (n_1 n_2, hm) = (n_1, h)(n_2, m)$. Ввиду того что $G = N_1 N_2$ и $K = HM$, получаем, что $(n_1, h)(n_2, m) \in (G \times K)_{\mathfrak{F}}$. Значит, для каждого $k \in K$ существует $g \in G$ такое, что $(g,k) \in (G \times K)_{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $(G \times K)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $G \times K$ и $G \in \mathfrak{X}$. Таким образом, $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга.

2) Предположим, что $M \in \mathfrak{M}$ и для некоторой группы G радикал $(G \times M)_{\mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $(G \times M)$. Из построения класса $\mathfrak{F}^*$ следует, что $(G \times M)_{\mathfrak{F}^*}$ входит подпрямо в $G \times M$. Следовательно, $G, M \in \mathfrak{F}^*$ и $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Учитывая, что $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}^*$ содержатся в $\mathfrak{X}$, получим $\mathfrak{F} \vee Fit(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}^*) \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Значит, ввиду утверждения 1) леммы 1.3 $\mathfrak{X} \subseteq Locsec(\mathfrak{F})$.

Окончательно $G \cong (G \times 1) \lhd (G \times M)_{\mathfrak{F}}(M \times 1)$. Так как $(G \times M) \in \mathfrak{F}$ и $(M,1) \cong M \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}^*$, то $(G \times M)_{\mathfrak{F}}(M \times 1) \in \mathfrak{F} \vee Fit(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}^*)$. Следовательно, $\mathfrak{T} = \mathfrak{F} \vee Fit(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}^*)$.

Следствие 2.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга. Тогда* $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}) = \{G \mid \text{существует } K \in \mathfrak{H} \text{ такая, что } (G \times K)_{\mathfrak{F}} \text{ входит подпрямо в } G \times K\}$ *и* $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{T} \in \mathrm{Locsec}(\mathfrak{F})$, *где* $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. *В частности,* $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = \mathfrak{T}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Действительно, так как $\mathfrak{H}$ – класс Фиттинга, то $\mathfrak{H}$ удовлетворяет требованиям 1-3. Ввиду теоремы 2.2 и равенства $Fit(\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}$ получим, что $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{H}) = \mathfrak{T}$.

Теорема 2.4. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ – классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H} = Sn\{G \mid G = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}}\}$. Если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{F}(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X})$.

Доказательство. Если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F} \vee (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}) \subseteq (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X}$. Пусть теперь $K \in (\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X}$. По условию существует группа $G = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}}$ с изоморфизмом α таким, что $K \cong K\alpha \lhd\lhd G$. Тогда $K \lhd\lhd G_{\mathfrak{X}} = G \cap G_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H}} \cap G_{\mathfrak{X}}$. Ввиду леммы 1.7 $G_{\mathfrak{F}}(G_{\mathfrak{H}} \cap G_{\mathfrak{X}})$. Следовательно, $K \lhd\lhd G_{\mathfrak{F}} G_{\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}}$ и $K \in \mathfrak{F} \vee (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X})$ и $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X})$. Значит, $(\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{F}(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X})$.

3. Критерий холловой замкнутости. Рассматриваются только конечные π-разрешимые группы.

Заметим, что в классе $\mathfrak{S}^{\pi}$ класс $K_{\pi}(\mathfrak{F})$ также является классом Фиттинга, что подтверждает следующая

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Тогда $K_{\pi}(\mathfrak{F})$ – класс Фиттинга для любого $\pi \subseteq P$.*

Доказательство. Пусть $G \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$, $N \lhd G$ и $G_{\pi} \in Hall_{\pi}(G)$. Тогда по определению класса $K_{\pi}(\mathfrak{F})$ имеем $G_{\pi} \in \mathfrak{F}$. По утверждению 1) леммы 1.5 холлова π-подгруппа N_{π} группы N определяется как $N_{\pi} = G_{\pi} \cap N$. Причем $N_{\pi} \lhd G_{\pi}$. Но $G_{\pi} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Значит, $N_{\pi} \in \mathfrak{F}$ и $N \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$.

Пусть $G = N_1 N_2$, $N_1, N_2 \lhd G$ и $N_1, N_2 \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$. Покажем, что $G \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$. Так как $N_1, N_2 \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$, то по определению класса $K_{\pi}(\mathfrak{F})$, получаем, что $(N_1)_{\pi}, (N_2)_{\pi} \in \mathfrak{F}$. По утверждению 2) леммы 1.5 $G_{\pi} = (N_1 N_2)_{\pi} = G_{\pi} \cap N_1 N_2 = (G_{\pi} \cap N_1)(G_{\pi} \cap N_2) = (N_1)_{\pi}(N_2)_{\pi}$. Так как $(N_1)_{\pi}, (N_2)_{\pi} \lhd G_{\pi} = (N_1 N_2)_{\pi}$ и $N_1, N_2 \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$, то по определению класса Фиттинга $(N_1 N_2)_{\pi} \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in K_{\pi}(\mathfrak{F})$. Окончательно $K_{\pi}(\mathfrak{F})$ – класс.

Лемма 3.2. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} \subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$ для всех $\pi \subseteq P$.*

Доказательсво. Пусть класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп и $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G_\pi \in \mathfrak{F}$. По определения класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ это означает, что $G \in K_\pi(\mathfrak{F})$. То есть $\mathfrak{F} \subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть теперь имеет место включение $\mathfrak{F} \subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$ и $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in K_\pi(\mathfrak{F})$. По определению класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ это означает, что $G_\pi \in \mathfrak{F}$. Следовательно, класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп.

Важное свойство класса $K_\pi(\mathfrak{F})$, необходимое для доказательства основного результата, выражает

Лемма 3.3. Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга и π – множество простых чисел. Тогда $K_\pi(\mathfrak{F}) = K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\pi'}$.

Доказательство. Включение $K_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\pi'}$ вытекает непосредственно из свойств произведения классов Фиттинга.

Пусть теперь $G \in K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\pi'}$. По определению произведения классов Фиттинга это означает, что $G/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{S}_{\pi'}$. Ввиду того что класс групп $\mathfrak{S}_{\pi'}$ замкнут относительно подгрупп, имеем $G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{S}_{\pi'}$. С другой стороны, $G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ – холлова π-подгруппа группы $G/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ и $G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{S}_\pi$. То есть $G_\pi G_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cong G_\pi/G_\pi \cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{S}_\pi \bigcap \mathfrak{S}_{\pi'} = (1)$. Следовательно, $G_\pi = G_\pi \cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ и $G_\pi \subseteq G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$. Значит, $G_\pi \in K_\pi(\mathfrak{F})$. По определению класса $K_\pi(\mathfrak{F})$ имеем $G_\pi \in \mathfrak{F}$. С учетом того что $(G_\pi)_\pi = G_\pi$, получаем $G_\pi \in \mathfrak{F}$ и $G \in K_\pi(\mathfrak{F})$. Окончательно получаем, что $K_\pi(\mathfrak{F}) = K_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_{\pi'}$.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга замкнут относительно холловых π-подгрупп. Тогда $\mathfrak{F}_*$ также замкнут относительно холловых π-подгрупп.*

Доказательство. Пусть $G_1 \in \mathfrak{F}_*$ и $(G_1)_\pi$ – холлова π-подгруппа группы G_1. По лемме 1.9 существует группа $G_2 \in \mathfrak{F}$ и отображение $\alpha \in Snemb(G_1 \to G_2)$ такие, что $G_1^\alpha \subseteq N(G_2)$. Тогда $G_1^\alpha \subseteq (G_2)_\pi$. Следовательно, по лемме 1.10 $G_1^\alpha \subseteq (G_2)_\pi \cap N(G_2) \subseteq N((G_2)_\pi)$. По условию $(G_2)_\pi \in \mathfrak{F}$, тогда по лемме 1.11 $N((G_2)_\pi) \subseteq ((G_2)_\pi)_{\mathfrak{F}_*}$. Значит, $(G_1)_\pi^\alpha \subseteq ((G_2)_\pi)_{\mathfrak{F}_*}$. С другой стороны, $(G_1)_\pi^\alpha = G_1 \cap (G_1)_\pi^\alpha$. Заметим, что $G_1^\alpha \cap (G_1)_\pi^\alpha$ субнормальна в $(G_2)_\pi$. Следовательно, $((G_1)_\pi)_{\mathfrak{F}_*} = ((G_1)_\pi)^\alpha \cap ((G_2)_\pi)_{\mathfrak{F}_*} \subseteq (G_1)_\pi^\alpha$. Получаем, что $(G_1)_\pi \in \mathfrak{F}_*$.

Описание $\mathfrak{F}$-радикалов холловых подгрупп представляет следующая

Лемма 3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и $H \in Hall_\pi(G)$. Тогда $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cap H = H_\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Так как $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \lhd G$, то по утверждению 1) леммы 1.5 $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cap H = Hall_\pi\left(G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\right)$. Также $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cap H \lhd H$. Заметим, что $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \in K_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cap H \in \mathfrak{F}$. Значит, $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cap H \subseteq H_\mathfrak{F}$. Пусть $F/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} = F_\pi\left(G/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\right)$ и $F/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$ – π-подгруппа. Возмем $T/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \neq 1$ холлову p'-подгруппу группы $F/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$. Следовательно, $T \lhd G$. Значит, $H \cap T = G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \cap H \in \mathfrak{F}$. Получаем противоречие с тем, что $T/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \neq 1$. Следовательно, $F/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \subseteq HG_{K_\pi(\mathfrak{F})}/G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \in Hall_\pi\left(G/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\right)$. Очевидно, $H_\mathfrak{F} = Hall_\pi\left(H_\mathfrak{F}G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\right)$. Тогда $H_\mathfrak{F}G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \in K_\pi(\mathfrak{F})$, следовательно, $F \cap H_\mathfrak{F}G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \lhd H_\mathfrak{F}G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \in K_\pi(\mathfrak{F})$. С другой стороны, $F \cap H_\mathfrak{F}G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \lhd\lhd G$. Значит, $F \cap H_\mathfrak{F}G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \subseteq G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$. Следовательно, $\left[F, H_\mathfrak{F}G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\right] \subseteq F \cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \subseteq G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$, поскольку по лемме 1.6 $H_\mathfrak{F}G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \subseteq C_G\left(F/G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\right) \subseteq F$. Получаем $H_\mathfrak{F} \subseteq H \cap F \cap H_\mathfrak{F}G_{K_\pi(\mathfrak{F})} \subseteq H \cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$.

Лемма 3.6. *Пусть $\pi \subseteq P$ и класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп. Тогда если $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{S}_\pi$, то $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} = G_\mathfrak{F}H_\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп, то $G_\mathfrak{F} \subseteq G_{K_\pi(\mathfrak{F})}$. Пусть $G = G_\mathfrak{F}H$. С учетом лемм 2.5 и 1.7 получим $G_{K_\pi(\mathfrak{F})} = G_\mathfrak{F}\left(H \cap G_{K_\pi(\mathfrak{F})}\right) = G_\mathfrak{F}H_\mathfrak{F}$.

Основной результат работы представляет следующая

Теорема 3.7. Пусть π – множество простых чисел. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп в точности тогда, когда $\mathfrak{F} = (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F})$. Ввиду леммы 3.2 справедливо включение $\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F} \subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$. Тогда по утверждению 1) леммы 1.3 $K_\pi(\mathfrak{F}_*) \subseteq K_\pi(\mathfrak{F})$. Получаем $\mathfrak{F} \subseteq K_\pi(\mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F}) = K_\pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, по лемме 3.2 $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга замкнутый относительно холловых π-подгрупп.

Предположим теперь, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп. Ввиду лемм 3.1, 3.4 и 3.3 имеет место включение $\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \subseteq K_\pi(\mathfrak{F}_*)\mathfrak{S}_{\pi'} = K_\pi(\mathfrak{F}_*)$. Тогда $\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F} \subseteq K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F}$, G_π – холлова π-подгруппа группы G. Ввиду того что $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп, получим, что $G_\pi \in \mathfrak{F}$. По лемме 3.4 $G_\pi \in \mathfrak{F}_*$. Значит, $G \times G_\pi \in \mathfrak{F}$ и $G \times G_\pi \in \mathfrak{F}_*$. По лемме 3.6 получим, что $(G \times G_\pi)_{K_\pi(\mathfrak{F}_*)} = (G \times G_\pi)_{\mathfrak{F}}(G_\pi \times G_\pi)_{\mathfrak{F}}$. С учетом утверждения 3) леммы 1.3 получим $\left(G_{\mathfrak{F}_*}(G_\pi)_{\mathfrak{F}_*} \times (G_\pi)_{\mathfrak{F}_*}\right)\left\langle(h^{-1}, h) : h \in G_\pi\right\rangle \subseteq (G \times G_\pi)_{\mathfrak{F}}(G_\pi \times G_\pi)_{\mathfrak{F}}$. Учитывая, что $G = G_{\mathfrak{F}^*} G_\pi$, получим, что $(G \times G_\pi)_{K_\pi(\mathfrak{F}_*)}$ входит подпрямо в $G \times G_\pi$. Так как $G \times G_\pi \in \mathfrak{F}$, то $(G \times G_\pi)_{K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F}}$ входит подпрямо в $G \times G_\pi$. Покажем, что имеет место включение $\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F} \subseteq (K_\pi(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{F})^*$. Так как $\mathfrak{F}$ замкнут относительно холловых π-подгрупп, то по лемме 3.4 $\mathfrak{F}_*$ замкнут относительно холловых π-подгрупп. Тогда по лемме 3.2 $\mathfrak{F}_* \subseteq K_\pi(\mathfrak{F}_*)$. С учетом утверждения 1) леммы 1.3 получаем, что $(\mathfrak{F}_*)^* = \mathfrak{F}^* \subseteq (K_\pi(\mathfrak{F}_*))^*$. Следовательно, по утверждению 1) леммы 1.3 $\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* \subseteq (K_\pi(\mathfrak{F}_*))^* \cap \mathfrak{F}_*$. Но по утверждению 1) и 2) леммы 1.3 справедливо включение $(K_\pi(\mathfrak{F}_*))^* \cap \mathfrak{F}_* \subseteq (K_\pi(\mathfrak{F}_*))^* \cap \mathfrak{F}^* = (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F})^*$. Значит, ввиду следствия 2.4 $G \in (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F})$. Это означает $\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F} \subseteq (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F})$. С учетом леммы 1.4 получим, что $\mathfrak{F} = (\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (\mathfrak{F}_*\mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{F})$. Тогда

$$\mathfrak{F} \subseteq (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F}) = (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}) \vee (K_\pi(\mathfrak{F}_*) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$$

Таким образом, исследование классов Фиттинга, насыщенных подгруппами Холла, тесно связано с исследованием решеточных объединений классов Фиттинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Bryce, R.A.*** A problem in theory of normal Fitting classes / R.A. Bryce, J. Cossey // Math. Z. – 1975. – Band 141, N 2. – S. 99-110.
2. ***Hauck, P.*** Dissertation. Mainz: Johannes Gutenberg-Universitat, 1977.
3. ***Brison, O.J.*** Hall operators for Fitting classes / J. Brison // Arch. Math. – 1979. – Bd. 33. – P. 1-9.
4. ***Cusack, E.*** Normall Fitting classes and Hall subgroups / E. Cusack // Bull. Austral. Math. Soc. – 1980. – V. 21, N 2. – P. 229-236.
5. ***Brison, O.J.*** A criterion for the Hall-closure of Fitting classes / Bull. Austr. Math. Soc. – 1981. – V. 3, N. 3. – P. 361-365.
6. ***Чунихин, С.А.*** Подгруппы конечных подгрупп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 168 с.
7. ***Doerk, K.*** Finite soluble Groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York: Walter de Gruyter, 1992.
8. ***Lockett, P.*** Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. – 1974. – Bd.137, N 2. – S. 131-136.
9. ***Шеметков, Л.А.*** Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 256 с.
10. ***Gallego, M.P.*** Fitting pairs from direct limits and the lockett conjecture / M.P. Gallego // Comm. Algebra. – 1996. – 24(6). – P. 2011-2023.
11. ***Шпаков, В.В.*** О гипотезе Локетта для пар классов Фиттинга / В.В. Шпаков, Н.Т. Воробьев // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2008. – № 2(47). – С. 195-203.

Поступила в редакцию 10.02.2009 г.