УДК 512.542

Н.В. САВЕЛЬЕВА

ЛОКАЛЬНО НОРМАЛЬНЫЕ И МАКСИМАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ФИТТИНГА

В настоящей статье исследуется взаимосвязь между локально нормальными и максимальными классами Фиттинга конечных групп. В частности, изучается вопрос о существовании и единственности максимального класса Фиттинга такого, что в нем заданный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ является нормальным. Доказано, что множество всех локально нормальных классов Фиттинга имеет, по крайней мере, один максимальный элемент. Получены условия единственности максимального класса Фиттинга, в котором $\mathfrak{X}$ нормален, и тем самым описано широкое семейство классов Фиттинга, для которых данная задача решается положительно. Задача решена в классе Фиттинга, факторизуемом в виде $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга конечных групп и $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп.

Введение

В теории классов Фиттинга одним из важнейших объектов исследований являются нормальные классы Фиттинга. Понятие нормального класса Фиттинга было введено Блессенолем и Гашюцем [1] в классе Фиттинга $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп как нетривиального класса $\mathfrak{F}$ с тем свойством, что $\mathfrak{F}$-инъектор в любой группе $G \in \mathfrak{S}$ является нормальной подгруппой G. В дальнейшем это понятие было расширено следующим образом (см. IX.2.13 (b) [2]).

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – нетривиальные классы Фиттинга конечных разрешимых групп таковы, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда класс $\mathfrak{F}$ называется локально нормальным, или $\mathfrak{X}$-нормальным, если $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G для всех $G \in \mathfrak{X}$.

Вместе с тем особый интерес представляет изучение взаимосвязи нормальных и максимальных по включению классов Фиттинга. Это обусловлено, прежде всего, результатом Косси [3] о том, что каждый максимальный подкласс Фиттинга класса $\mathfrak{S}$ является нормальным в $\mathfrak{S}$.

В этом направлении естественна следующая

Проблема (С. Рейффершейд [4, с. 51]). *Всегда ли существует единственный максимальный класс Фиттинга такой, что в нем заданный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ является нормальным?*

В работе [4] на указанный вопрос получен положительный ответ для разрешимых классов Фиттинга. В настоящей работе мы расширяем результаты [4] на случай частично разрешимых групп. Напомним, что произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс всех таких групп G, для которых $G/G_{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{H}$. В частности, $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ есть класс Фиттинга всех таких групп, у которых факторгруппа по $\mathfrak{X}$-радикалу разрешима. В классе $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$, где $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга конечных групп и $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп, для доказательства основного результата нами используется расширение предложенной Хауком [5] конструкции класса $Y(\mathfrak{X})$ всех тех конечных разрешимых групп G, у которых $\mathfrak{X}$-радикал является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой в G.

Основной результат настоящей работы – теорема о том, что верхняя грань класса Фиттинга, порожденного классами Фиттинга $\mathfrak{F}_i \subseteq Y(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ такими, что $\mathfrak{X}$ нормален в $\mathfrak{F}_i$, где $i = 1, 2$, содержится в $Y(\mathfrak{X})$. Тем самым нами описаны условия единственности максимального класса Фиттинга, в котором заданный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ нормален.

Все рассматриваемые группы конечны. В определениях и обозначениях мы следуем [2].

1. Предварительные сведения

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если выполняются следующие два условия:

1) из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$ всегда следует $N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G = N_1N_2$, где $N_i \lhd G$ и $N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Из условия 2) следует, что если $\mathfrak{F}$ – произвольный непустой класс Фиттинга и G – группа, то произведение $G_{\mathfrak{F}}$ всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп из G принадлежит $\mathfrak{F}$. Подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ называют $\mathfrak{F}$-радикалом группы G.

Известное свойство $\mathfrak{F}$-радикала характеризует следующая

Лемма 1.1 (IX.1.1 (a) [2]). *Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга и N – субнормальная подгруппа группы G, то $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.*

Для доказательства основного результата приведем некоторые известные утверждения, которые будем использовать.

Лемма 1.2 [2]. *Пусть U, V и W – подгруппы группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) (A.1.2 [2]) *утверждения $U \cap VW = (U \cap V)(U \cap W)$ и $UV \cap UW = U(V \cap W)$ эквивалентны;*

2) (A.1.3 [2]) *если $V \le U$, то $U \cap VW = V(U \cap W)$ – тождество Дедекинда.*

Лемма 1.3 [2]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) (А.10.3 [2]) *группа G разрешима тогда и только тогда, когда ее композиционные факторы имеют простые порядки;*

2) (А.10.5 (a) [2]) *каждый главный фактор разрешимой группы G является элементарной абелевой p-группой, где p – некоторое простое число.*

Напомним, что произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G обозначают $F(G)$ и называют подгруппой Фиттинга, или $\mathfrak{N}$-радикалом группы G, где $\mathfrak{N}$ обозначает класс Фиттинга всех нильпотентных групп.

Пусть T – непустое подмножество группы G. Совокупность всех элементов группы G, перестановочных с каждым элементом множества T, называется централизатором множества T в группе G и обозначается через $C_G(T)$.

Лемма 1.4 (А.10.6 (a) [2]). *Если $G \in \mathfrak{S}$, то $C_G(F(G)) \leq F(G)$.*

Коммутатором элементов a и b называют элемент $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$. Подгруппу $[A,B] = \langle [a,b] \mid a \in A, b \in B \rangle$ называют взаимным коммутантом подгрупп A и B группы G.

Свойство взаимных коммутантов характеризует следующая

Лемма 1.5 (III.1.6 (f) [6]). *Если A и B – нормальные подгруппы группы G, то $[A,B] \leq A \cap B$.*

Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то подгруппу V группы G называют $\mathfrak{X}$-инъектором G, если $V \cap N$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G.

Лемма 1.6 (VIII.2.6 [2]). *Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Если H – $\mathfrak{X}$-инъектор группы $\mathfrak{X}$ и $K \lhd\lhd G$, то $H \cap K$ – $\mathfrak{X}$-инъектор подгруппы K.*

Если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга, то, как установлено Гашюцем, Фишером и Хартли [7], в любой разрешимой группе $\mathfrak{X}$-инъекторы существуют и сопряжены. Позднее В.Г. Сементовским [8] было получено расширение указанного результата Гашюца-Фишера-Хартли на случай частично разрешимых групп. А именно доказана

Лемма 1.7 [8]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Если $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и $G \in \mathfrak{X}\mathfrak{S}$, то G имеет единственный класс сопряженных $\mathfrak{X}$-инъекторов.*

2) *Пусть $\mathfrak{X}$ – класс Фиттинга и группа $G \in \mathfrak{X}\mathfrak{S}$. Тогда если V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и $V \subseteq H \subseteq G$, то V является $\mathfrak{F}$-инъектором группы H.*

Напомним, что подгруппа H группы G называется характеристической подгруппой группы G и обозначается $H\ char\ G$, если $\alpha(H) = H$ для всех автоморфизмов $\alpha \in Aut(G)$. В частности, если $H\ char\ G$, то $H \lhd G$.

Известное свойство характеристических подгрупп приведем в виде следующей леммы.

Лемма 1.8 (VIII.2.3. (b) [2]). *Если $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то $G_{\mathfrak{F}}$ char G.*

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $H/A \in \mathfrak{F}$ и $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Хорошо известно, что классы $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп и $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп являются одновременно формациями и классами Фиттинга.

Напомним также обозначения и определения некоторых известных операторов замыкания (см. II.1.5 [2]). Всякое отображение множества всех классов групп в себя называется операцией на классах групп. Результат операции U, примененной к классу $\mathfrak{X}$, обозначается через $U\mathfrak{X}$.

1) $G \in S_n\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда G вложена в качестве нормальной подгруппы в некоторую $\mathfrak{X}$-группу;

2) $G \in N_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда из того, что G имеет нормальные $\mathfrak{X}$-подгруппы N_1 и N_2, следует, что $N_1N_2 \in \mathfrak{X}$;

3) $G \in Q\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда G является гомоморфным (эпиморфным) образом некоторой $\mathfrak{X}$-группы.

Классом Фишера называется (см. например, IX.3.3 (а) [2]) N_0-замкнутый класс групп такой, что из $K \lhd G \in \mathfrak{F}$ и того, что H/K – нильпотентная подгруппа группы G/K, следует $H \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ – нетривиальные классы Фиттинга такие, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то класс $\mathfrak{F}$ называется локально нормальным, или $\mathfrak{X}$-нормальным, если $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G для всех $G \in \mathfrak{X}$.

Аналогично определяется (см. IX.2.13 (b) [2]) понятие $\mathfrak{X}$-нормального класса Фиттинга для произвольного класса групп $\mathfrak{X}$.

Для доказательства основного результата мы будем использовать конструкцию Хаука (см. IX.2.A [2] или 1.2.19 [4]).

Пусть $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ – классы Фиттинга, множества σ, τ и π определяются следующим образом:

$$\sigma = \{p \in \boldsymbol{P} \mid p \mid |G/G_{\mathfrak{F}_2}|, G \in \mathfrak{F}_1\},$$

$$\tau = \{p \in \boldsymbol{P} \mid p \mid |G/G_{\mathfrak{F}_1}|, G \in \mathfrak{F}_2\}$$

и $\pi \supseteq \sigma \cap \tau$. Обозначим $N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) = (G \in \mathfrak{E} : G/G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{N}_\pi)$, где $\mathfrak{E}$ – класс всех групп.

Из определения следует, что $N_\varnothing(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) = (G \in \mathfrak{E} : G = G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})$.

Как установлено Хауком (см. IX.2.1 [2]), $N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ является классом Фиттинга.

Покажем, что $N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \supseteq \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$. Действительно, если $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G_{\mathfrak{F}_1} = G$, и тогда $G/G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} = G/GG_{\mathfrak{F}_2} = G/G = (1) \in \mathfrak{N}_\pi$. Поэтому $G \in N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$. Аналогично, если $G \in \mathfrak{F}_2$, то $G \in N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$.

Наименьший класс Фиттинга, содержащий классы Фиттинга $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, называется классом Фиттинга, порожденным классами $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$, и обозначается через $\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2$ или $Fit(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$.

Таким образом, ввиду $N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \supseteq \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ класс Фиттинга $N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ является верхней гранью для класса Фиттинга $Fit(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$.

Следуя Хауку [5], для произвольного класса Фиттинга определим класс групп $Y(\mathfrak{X}) = (G \in \mathfrak{X}\mathfrak{S} : G_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой группы $G)$.

Заметим, что в любой группе из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}$ ввиду утверждения 1) леммы 1.7 инъекторы существуют и сопряжены.

Покажем, что класс групп $Y(\mathfrak{X})$ является S_n-замкнутым. Пусть $G \in Y(\mathfrak{X})$ и $N \lhd G$. Докажем, что $N \in Y(\mathfrak{X})$, т.е. $N_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой группы N. Так как $G \in Y(\mathfrak{X})$ и $Y(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$, то $G_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{X}$-инъектором группы G. Значит, ввиду $N \lhd G$ по определению инъектора $N \cap G_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой в N. Но из $N \lhd G$ по лемме 1.1 имеем $N_{\mathfrak{X}} = N \cap G_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, $N_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой в N и поэтому $N \in Y(\mathfrak{X})$. Итак, класс групп $Y(\mathfrak{X})$ является S_n-замкнутым.

Заметим также, что если $\mathfrak{X}$ – произвольный класс Фиттинга и $\mathfrak{F}$ – произвольный класс групп такой, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq Y(\mathfrak{X})$, то $\mathfrak{X} \lhd \mathfrak{F}$.

Теорема 1.9 (Куратовского-Цорна [9, с. 29]). *Если любая цепь частично упорядоченного множества M обладает верхней гранью, то любой элемент из M не превосходит некоторого максимального элемента множества M.*

Обозначим $\mathfrak{Y} = Y(\mathfrak{X})$. Для доказательства основного результата вначале опишем свойства групп минимального порядка из класса $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{Y}$.

Напомним, что комонолитической называется неединичная группа, имеющая в точности одну максимальную нормальную подгруппу.

Лемма 1.10. *Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ – класс групп такой, что $S_n\mathfrak{F} = \mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{Y}$. Если G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{Y}$ и V – $\mathfrak{X}$-инъектор группы G, то справедливы следующие утверждения:*

1) в группе G существует единственная максимальная нормальная подгруппа N, причем $V \cap N = G_\mathfrak{X}$, $V / G_\mathfrak{X} \cong Z_p$, и если $G / N \in \mathfrak{N}$, то $VN = G$;

2) если $\mathfrak{F}$ – класс Фишера и в G существует нормальная подгруппа K такая, что $G_\mathfrak{X} \le K \le N$, то $K \le N_G(V)$, $N / G_\mathfrak{X} = F(G / G_\mathfrak{X})$ – q-группа и $V = PG_\mathfrak{X}$, где $P = Syl_p(G)$ для некоторого простого числа p.

Доказательство. 1) Заметим, что если $H \in \mathfrak{Y}$, то $H_\mathfrak{X}$ является единственным $\mathfrak{X}$-инъектором группы H. Действительно, по определению класса $\mathfrak{Y}$ группа $H_\mathfrak{X}$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой группы H. Но ввиду $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ по утверждению 1) леммы 1.7 в любой $\mathfrak{Y}$-группе существует единственный класс сопряженных $\mathfrak{X}$-инъекторов. Тогда $H_\mathfrak{X} \in Inj_\mathfrak{X}(H)$ по определению инъектора. Более того, ввиду $H_\mathfrak{X} \lhd H$ все сопряженные с $H_\mathfrak{X}$ подгруппы совпадут с $H_\mathfrak{X}$. Таким образом, $H_\mathfrak{X}$ является единственным $\mathfrak{X}$-инъектором группы H для любой группы $H \in \mathfrak{Y}$.

Пусть N – максимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $|N| < |G|$, то из выбора группы G получаем $N \in \mathfrak{Y}$. Следовательно, $N_\mathfrak{X}$ является единственным $\mathfrak{X}$-инъектором в N.

По лемме 1.6 имеем $N \cap V \in Inj_\mathfrak{X}(N)$. Следовательно, ввиду единственности $\mathfrak{X}$-инъектора в группе N заключаем, что $N \cap V = N_\mathfrak{X}$. Но $N_\mathfrak{X}\ char\ N$ по лемме 1.8.

Таким образом,

$$N \cap V = N_\mathfrak{X}\ char\ N \lhd G\ . \tag{1.10.1}$$

Покажем теперь, что V не содержится ни в какой субнормальной подгруппе группы G. Пусть $H \lhd\lhd G$. Если $V \subseteq H$, то V является $\mathfrak{X}$-инъектором группы H по утверждению 2) леммы 1.7. Ввиду $|H| < |G|$ из выбора группы G имеем $H \in \mathfrak{Y}$. Это по определению класса $\mathfrak{Y}$ означает, что $H_\mathfrak{X}$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой группы H. Более того, $H_\mathfrak{X}$ является единственным $\mathfrak{X}$-инъектором группы H. Итак, $V = H_\mathfrak{X}$. Но тогда ввиду $H_\mathfrak{X} \lhd H \lhd\lhd G$ и $V = H_\mathfrak{X}$ имеем $V \lhd\lhd G$. Отсюда по лемме 1.1 имеем $V_\mathfrak{X} = V \cap G_\mathfrak{X} \subseteq G_\mathfrak{X}$. Но $V_\mathfrak{X} = V$ и тогда $V \subseteq G_\mathfrak{X}$. Поэтому $V = G_\mathfrak{X}$. Таким образом, $G_\mathfrak{X}$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой в G, что по определению класса $\mathfrak{Y}$ означает $G \in \mathfrak{Y}$ – противоречие.

Следовательно, V не содержится ни в какой субнормальной подгруппе группы G.

Заметим также, что

$$G = RV \tag{1.10.2}$$

для любой нормальной подгруппы R такой, что G / R – нильпотентная группа.

В качестве подгруппы R можно взять, например, такую максимальную нормальную подгруппу M_0 группы G, что $G_\mathfrak{X} \subseteq M_0$. Тогда $G / G_\mathfrak{X} \subseteq M_0 / G_\mathfrak{X} \cong G / M_0$ – простая группа. Так как $G / G_\mathfrak{X}$ разрешима ввиду $G \in \mathfrak{X}\mathfrak{S}$, то G / M_0 – разрешимая простая группа. Значит G / M_0 является циклической группой простого порядка. Следовательно, G / M_0 – нильпотентная группа.

Если предположить, что $RV \ne G$, то $RV / R \lhd\lhd G / R$. Поэтому $RV \lhd\lhd G$. Следовательно, V содержится в подгруппе $H = RV$ и $H \lhd\lhd G$, что невозможно.

Покажем теперь, что группа G комонолитична. Пусть M – произвольная максимальная нормальная подгруппа группы G. Так как V – $\mathfrak{X}$-инъектор группы G, то подгруппа $V \cap M$ является $\mathfrak{X}$-инъектором группы M. Но $\mathfrak{F}$ является S_n-замкнутым и $M \lhd G \in \mathfrak{F}$. Значит, $M \in \mathfrak{F}$. Следовательно, из (1.10.1) получаем

$V \cap M \triangleleft M$. Отсюда $V \cap M = M_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}} \cap M \subseteq G_{\mathfrak{X}}$. Значит, для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G справедливо включение

$$V \cap M \subseteq G_{\mathfrak{X}}. \qquad (1.10.3)$$

Пусть N_1 и N_2 – различные максимальные нормальные подгруппы группы G. Без ограничения общности мы можем считать, что $N_1 \supseteq G_{\mathfrak{X}}$ и $N_2 \not\supseteq G_{\mathfrak{X}}$. Тогда $G = N_2 G_{\mathfrak{X}}$. Заметим, что из $N_1 \supseteq G_{\mathfrak{X}}$ и $G = N_2 G_{\mathfrak{X}}$ следует $G = VN_2$.

Покажем, что G / N_1 – нильпотентная группа. Действительно, из $G \in \mathfrak{X}\mathfrak{S}$ следует, что $G / G_{\mathfrak{X}}$ разрешима. Но $N_1 \supseteq G_{\mathfrak{X}}$ и поэтому $G / G_{\mathfrak{X}} / N_1 / G_{\mathfrak{X}} \cong G / N_1 \in \mathfrak{S}$ ввиду того, что $G / G_{\mathfrak{X}}$ разрешима и класс $\mathfrak{S}$ является формацией. Заметим, что G / N_1 – главный фактор группы G. Значит, по утверждению 2) леммы 1.3 факторгруппа G / N_1 является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p. Кроме того, G / N_1 – композиционный фактор группы G. Следовательно, по утверждению 1) леммы 1.3 факторгруппа G / N_1 имеет простой порядок. Но абелева группа простого порядка является циклической, т.е. $G / N_1 \cong Z_p$.

Итак, G / N_1 – нильпотентная группа.

Следовательно, по (1.10.2) имеем $G = VN_1$. Значит, ввиду изоморфизмов $G / N_1 = VN_1 / N_1 \cong V / V \cap N_1$ и $G / N_2 = VN_2 / N_2 \cong V / V \cap N_2$ подгруппы $V \cap N_1$ и $V \cap N_2$ являются максимальными нормальными подгруппами группы V.

Предположим, что $V \cap N_1 \neq V \cap N_2$. Тогда $V = (V \cap N_1)(V \cap N_2)$. Следовательно, ввиду (1.10.3) получаем $V \subseteq G_{\mathfrak{X}}$. Значит, $V = G_{\mathfrak{X}}$. Последнее противоречит тому, что подгруппа V не нормальна в G. Итак, $V \cap N_1 = V \cap N_2$. Но тогда

$$G / N_1 \cong V / V \cap N_1 = V / V \cap N_2 \cong G / N_2$$

и поэтому $G / N_1 \cong G / N_2$. Отсюда ввиду $G / N_1 \in \mathfrak{N}$ имеем $G / N_2 \in \mathfrak{N}$. Так как класс $\mathfrak{N}$ является формацией, то группа $G / N_1 \cap N_2$ нильпотентна. Следовательно, из равенства (1.10.2) получаем $G = V(N_1 \cap N_2)$. С другой стороны, $G = VN_1 \cap VN_2$, так как $VN_1 = G = VN_2$. Значит,

$$V(N_1 \cap N_2) = VN_1 \cap VN_2$$

и по утверждению 1) леммы 1.2 справедливо равенство

$$(V \cap N_1)(V \cap N_2) = V \cap N_1 N_2.$$

Так как $N_1 N_2 = G$, то $V \cap N_1 N_2 = V$. Следовательно, $V = (V \cap N_1)(V \cap N_2)$. Но $V \cap N_1 = V \cap N_2$ и поэтому $V = V \cap N_1 \subseteq N_1$ – противоречие с тем, что V не содержится ни в какой субнормальной подгруппе группы G.

Итак, $N_1 = N_2 = N$ и группа G комонолитична.

Так как N – единственная максимальная нормальная подгруппа группы G, то $G_{\mathfrak{X}} \subseteq N$. Отсюда $G_{\mathfrak{X}} \cap N = G_{\mathfrak{X}}$. Но $N_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}} \cap N$ по лемме 1.1. Тогда $N_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}}$ и поэтому с учетом (1.10.1) получаем $N \cap V = G_{\mathfrak{X}}$.

Заметим, что $V / V \cap N \cong VN / N$. Как показано выше, случай $V \subseteq N$ невозможен. Тогда $V \not\subseteq N$. Последнее означает, что $VN = G$. Следовательно, $V / V \cap N \cong G / N \cong Z_p$. Но $N \cap V = G_{\mathfrak{X}}$ и поэтому $V / G_{\mathfrak{X}} \cong Z_p$.

2) Докажем теперь второе утверждение леммы.

Пусть $G_{\mathfrak{X}} \le K < N$. Так как $|K| < |G|$, то $K \in \mathfrak{Y}$. Значит, по определению класса $\mathfrak{Y}$ группа $K_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой в K. Следовательно, $K_{\mathfrak{X}} \in Inj_{\mathfrak{X}}(K)$ и $K_{\mathfrak{X}}$ является единственным $\mathfrak{X}$-инъектором группы K. Отсюда по утверждению 1) данной леммы получаем $V \cap K = K_{\mathfrak{X}}$. Но $G_{\mathfrak{X}} \triangleleft K$ и по лемме 1.1 имеем $G_{\mathfrak{X}} \cap K = K_{\mathfrak{X}}$. Поэтому $G_{\mathfrak{X}} = G_{\mathfrak{X}} \cap K = K_{\mathfrak{X}} = V \cap K$, т.е. $G_{\mathfrak{X}} = V \cap K$.

Следовательно, с учетом утверждения 1) данной леммы получаем $VK / K \cong V / V \cap K = V / G_{\mathfrak{X}} \cong Z_p$ и $G_{\mathfrak{X}} \triangleleft V$.

Так как $\mathfrak{F}$ – класс Фишера, $V \in Inj_{\mathfrak{X}}(VK)$ и $VK/K \cong Z_p$, то по определению класса Фишера $VK \in \mathfrak{F}$.

Как показано в доказательстве утверждения 1) леммы, группа G/N разрешима. По утверждению 1) леммы 1.3 имеем $|G/N| = p$ для некоторого простого числа p.

Покажем, что $VK < G$. Действительно, если предположить $VK = G$, то с учетом $VK/K \cong Z_p$ имеем $G/K \cong Z_p$. Отсюда ввиду $|G/K| > |G/N|$ заключаем, что $|G/N| < p$. Последнее означает $G = N$ – противоречие.

Итак, $VK < G$. Отсюда $VK \in \mathfrak{Y}$. Значит, $(VK)_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой в VK. Более того, $(VK)_{\mathfrak{X}}$ является единственным $\mathfrak{X}$-инъектором группы VK. Следовательно, $V = (VK)_{\mathfrak{X}}$. Значит, $V \triangleleft VK$.

Покажем теперь, что $K \le N_G(V)$. Множество $N_G(V)$ по определению содержит все элементы из G, инвариантные относительно V. Но по определению нормальной подгруппы ввиду $V \triangleleft VK$ и $K \le VK$ имеем $V^K = V$. Значит, $K \le N_G(V)$.

Заметим, что $F(G/G_{\mathfrak{X}}) < G/G_{\mathfrak{X}}$. Действительно, если $F(G/G_{\mathfrak{X}}) = G/G_{\mathfrak{X}}$, то $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ – класс Фиттинга всех нильпотентных групп. Но $V/G_{\mathfrak{X}} \cong Z_p$ и $V/G_{\mathfrak{X}} \le G/G_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, $V/G_{\mathfrak{X}} \triangleleft\triangleleft G/G_{\mathfrak{X}}$. Отсюда $V \triangleleft\triangleleft G$ – получаем противоречие с тем, что $\mathfrak{X}$-инъектор группы G не содержится ни в какой субнормальной подгруппе группы G.

Обозначим $M/G_{\mathfrak{X}} = F(G/G_{\mathfrak{X}}) < G/G_{\mathfrak{X}}$. По свойству подгруппы Фиттинга имеем $M/G_{\mathfrak{X}} \triangleleft G/G_{\mathfrak{X}}$ и поэтому $M \triangleleft G$. Так как по утверждению 1) данной леммы в G существует единственная максимальная нормальная подгруппа N, то $M < N$. Значит, $M/G_{\mathfrak{X}} < N/G_{\mathfrak{X}}$.

Заметим, что в условии $G_{\mathfrak{X}} \le K < N$ ввиду произвольности группы K можно положить $K = M$. Тогда по доказанному выше получаем $V \triangleleft MV$.

Из $M \le N$ следует $V \cap M \le V \cap N$. Но ввиду утверждения 1) данной леммы имеем $V \cap N = G_{\mathfrak{X}}$. Значит, $V \cap M = G_{\mathfrak{X}}$. Но $G_{\mathfrak{X}} \le V$ и $G_{\mathfrak{X}} \triangleleft M$. Отсюда справедливо и обратное включение $G_{\mathfrak{X}} \le V \cap M$. Итак, $G_{\mathfrak{X}} = V \cap M$.

Так как $M \triangleleft MV$ ввиду $M \triangleleft G$ и $V \triangleleft MV = VM$, то $V/G_{\mathfrak{X}} \triangleleft VM/G_{\mathfrak{X}}$ и $M/G_{\mathfrak{X}} \triangleleft VM/G_{\mathfrak{X}}$. Следовательно, по лемме 1.5 получаем $[V/G_{\mathfrak{X}}, M/G_{\mathfrak{X}}] \le (V/G_{\mathfrak{X}}) \cap (M/G_{\mathfrak{X}})$. Но $(V/G_{\mathfrak{X}}) \cap (M/G_{\mathfrak{X}}) = 1$ ввиду $G_{\mathfrak{X}} = V \cap M$. Тогда $[V/G_{\mathfrak{X}}, M/G_{\mathfrak{X}}] = 1$, т.е. любой элемент из $V/G_{\mathfrak{X}}$ перестановочен с каждым элементом из $M/G_{\mathfrak{X}}$. Поэтому по определению взаимного коммутанта получаем $V/G_{\mathfrak{X}} \le C_{G/G_{\mathfrak{X}}}(M/G_{\mathfrak{X}})$.

С учетом леммы 1.4 ввиду разрешимости группы $G/G_{\mathfrak{X}}$ имеем $C_{G/G_{\mathfrak{X}}}(M/G_{\mathfrak{X}}) \le M/G_{\mathfrak{X}} < N/G_{\mathfrak{X}}$ и тогда $V/G_{\mathfrak{X}} < N/G_{\mathfrak{X}}$. Последнее означает $V < N$ – противоречие с тем, что V не содержится ни в какой субнормальной подгруппе группы G. Следовательно, $M = N$.

Пусть $\{q_1, \dots, q_m\}$ – множество всех простых делителей порядка $|N/G_{\mathfrak{X}}|$. Так как $N/G_{\mathfrak{X}} = F(G/G_{\mathfrak{X}})$, то $N/G_{\mathfrak{X}}$ нильпотентна. Следовательно, все ее силовские q_i-подгруппы нормальны, а значит, единственны для каждого простого числа q_i ($i = 1, \dots, m$). Тогда q_i-подгруппы группы $N/G_{\mathfrak{X}}$ имеют вид $Q_i/G_{\mathfrak{X}}$ для каждого q_i ($i = 1, \dots, m$). Следовательно, $Q_i/G_{\mathfrak{X}} \triangleleft N/G_{\mathfrak{X}}$. Тогда $Q_i \triangleleft N$. Как показано выше, снова получаем $V/G_{\mathfrak{X}} \le C_{G/G_{\mathfrak{X}}}(Q_i/G_{\mathfrak{X}})$ для любого q_i ($i = 1, \dots, m$). Так как последнее включение справедливо для любого простого числа q_i, то ввиду $Q_i/G_{\mathfrak{X}} \triangleleft N/G_{\mathfrak{X}}$ имеем $V/G_{\mathfrak{X}} \le \bigcap_{i=1}^{m} C_{G/G_{\mathfrak{X}}}(Q_i/G_{\mathfrak{X}}) \le C_{G/G_{\mathfrak{X}}}(N/G_{\mathfrak{X}})$. Получаем $V \le N$ – противоречие с тем, что V не содержится ни в какой нормальной подгруппе группы G.

Лемма доказана.

2. Максимальные подклассы

Определим достаточно широкое семейство классов Фиттинга, для которых указанная во введении проблема решается положительно.

Определение 2.1. Для произвольных классов Фиттинга $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ положим $\sigma = \{p \in \mathbf{P} \mid p \,||\, G/G_{\mathfrak{F}_2}|, G \in \mathfrak{F}_1\}$, $\tau = \{p \in \mathbf{P} \mid p \,||\, G/G_{\mathfrak{F}_1}|, G \in \mathfrak{F}_2\}$ и пусть $\pi \supseteq \sigma \cap \tau$. Обозначим $N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) = (G \in \mathfrak{X}\mathfrak{S} : G/G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{N}_\pi)$, где $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга.

Из определения 2.1 с учетом результата Хаука (см. IX.2.1 [2]) следует, что $N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ является классом Фиттинга.

Теорема 2.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *множество всех локально нормальных классов Фиттинга имеет, по крайней мере, один максимальный элемент;*

2) *если $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{X}$ – классы Фиттинга, причем $\mathfrak{X} \triangleleft \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{S}$, и $\mathfrak{F}_i = \mathfrak{F}_i\mathfrak{N}_p$ ($i = 1, 2$) для всех $p \in \pi$, где множество π удовлетворяет определению 2.1, то существует единственный максимальный класс Фиттинга, в котором заданный класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ нормален.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{X}$ – непустой класс Фиттинга. Возьмем произвольную непустую цепь локально нормальных (в данном случае $\mathfrak{Y}$-нормальных) классов Фиттинга

$$\{\mathfrak{F}_i \mid \mathfrak{F}_i \text{ - локально нормальный класс Фиттинга и } i \in I\}.$$

Рассмотрим $\mathfrak{F} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ – локально нормальный класс Фиттинга.

Выясним вначале, что $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $K \triangleleft G$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_{i_0}$ для некоторого $i_0 \in I$. Так как $\mathfrak{F}_{i_0}$ – класс Фиттинга, то $K \in \mathfrak{F}_{i_0}$ и, значит, $K \in \mathfrak{F}$. Следовательно, класс групп $\mathfrak{F}$ является S_n-замкнутым.

Пусть теперь $L = K_1K_2$, где K_1 и K_2 – нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы L. Но тогда $K_1 \in \mathfrak{F}_{i_k}$ и $K_2 \in \mathfrak{F}_{i_m}$ для некоторых i_k, $i_m \in I$. Так как либо $\mathfrak{F}_{i_k} \subseteq \mathfrak{F}_{i_m}$, либо $\mathfrak{F}_{i_m} \subseteq \mathfrak{F}_{i_k}$, и $\mathfrak{F}_{i_k}$, $\mathfrak{F}_{i_m}$ – классы Фиттинга, то $L = K_1K_2$ является либо $\mathfrak{F}_{i_k}$-группой, либо $\mathfrak{F}_{i_m}$-группой. Но в каждом из этих случаев очевидно, что $L \in \mathfrak{F}$.

Итак, $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга.

Остается показать, что $\mathfrak{F}$ локально нормален.

Пусть L – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{Y}$, содержащая $\mathfrak{F}$-радикал группы G. Тогда $L \in \mathfrak{F}_{i_1}$ для некоторого $i_1 \in I$. Но так как классы $\mathfrak{F}_i$ локально нормальны для любого $i \in I$, то $G_{\mathfrak{F}_{i_1}}$ является $\mathfrak{F}_{i_1}$-максимальной подгруппой в G. Значит, $L = G_{\mathfrak{F}_{i_1}}$. Так как ввиду $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$ имеем $G_{\mathfrak{F}_i} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$ для любого $i \in I$, то $G_{\mathfrak{F}_i} \subseteq G_{\mathfrak{F}}$. Отсюда $L = G_{\mathfrak{F}}$.

Значит, $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G.

Следовательно, по теореме 1.9 Куратовского-Цорна каждый элемент из $\mathfrak{F}$ содержится в некотором максимальном элементе.

2) Так как $\mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2 \subseteq N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$, то для доказательства второго утверждения леммы достаточно показать, что $N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \subseteq \mathfrak{Y}$. Предположим противное, т.е. $N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \setminus \mathfrak{Y} \neq \varnothing$. Пусть G – группа минимального порядка из класса $N_\pi(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) \setminus \mathfrak{Y}$. Тогда по лемме 1.10 группа G имеет единственную максимальную нормальную подгруппу M такую, что $G/M \cong Z_p$, $V \cap M = G_{\mathfrak{X}}$ и $V = PG_{\mathfrak{X}}$, где $V \in Inj_{\mathfrak{X}}(G)$ и $P = Syl_p(G)$ для некоторого простого числа p.

Пусть $G \in \mathfrak{F}_i$. Тогда по определению нормального класса Фиттинга из $\mathfrak{X} \triangleleft \mathfrak{F}_i$ ($i = 1, 2$) следует, что $G_{\mathfrak{X}}$ является $\mathfrak{X}$-максимальной подгруппой в G. Отсюда $G \in \mathfrak{Y}$ – противоречие. Следовательно, $G \notin \mathfrak{F}_i$ ($i = 1, 2$). Тогда $G_{\mathfrak{F}_i} < G$.

Заметим, что $G/G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}/M/G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} \cong G/M \cong Z_p$. Таким образом, p делит $|G/G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}|$. Но $G/G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{N}_\pi$ по определению класса $N_\pi(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$ ввиду $G \in N_\pi(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$. Следовательно, $p \in \pi$.

Убедимся в справедливости равенства $PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} = G$. Предположим обратное, т.е. $PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} < G$. Заметим, что по определению $\mathfrak{F}_i$-радикала $G_{\mathfrak{F}_i}$ является максимальной нормальной $\mathfrak{F}_i$-подгруппой группы G ($i=1,2$). Значит, $(PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})_{\mathfrak{F}_1} = G_{\mathfrak{F}_1}$ и $(PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})_{\mathfrak{F}_2} = G_{\mathfrak{F}_2}$ ввиду $G_{\mathfrak{F}_i} \subseteq PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}$ ($i=1,2$).

Следовательно,

$$PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}/(PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})_{\mathfrak{F}_1}(PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})_{\mathfrak{F}_2} \le G/(PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})_{\mathfrak{F}_1}(PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})_{\mathfrak{F}_2} = G/G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}.$$

Но $G/G_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{N}_\pi$ ввиду $G \in N_\pi(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$.

Значит, $PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}/(PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})_{\mathfrak{F}_1}(PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})_{\mathfrak{F}_2} \lhd\lhd G/(PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})_{\mathfrak{F}_1}(PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2})_{\mathfrak{F}_2}$. Отсюда $PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} \lhd\lhd G$. Так как $G_{\mathfrak{X}} \le G_{\mathfrak{F}_i}$ ввиду $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_i$ ($i=1,2$), то $PG_{\mathfrak{X}} \le PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2}$. Но $PG_{\mathfrak{X}} = V$. Следовательно, $V \le PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} \lhd\lhd G$ – противоречие с тем, что V не содержится ни в какой субнормальной подгруппе группы G.

Итак, $PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} = G$.

Теперь покажем, что $PG_{\mathfrak{F}_1} = G$ или $PG_{\mathfrak{F}_2} = G$. Предположим, что $PG_{\mathfrak{F}_i} < G$ ($i=1,2$). Так как $P \le PG_{\mathfrak{X}} = V$, то $P \subseteq N_G(V)$. Из условия $\mathfrak{X} \lhd \mathfrak{F}_i$ следует $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_i$ и тогда $G_{\mathfrak{X}} \le G_{\mathfrak{F}_i}$ ($i=1,2$). Кроме того, $G_{\mathfrak{X}} \le V$ ввиду $V \in Inj_{\mathfrak{X}}(G)$. Условия $G_{\mathfrak{X}} \le G_{\mathfrak{F}_i}$ и $G_{\mathfrak{X}} \le V$ в совокупности дают $G_{\mathfrak{F}_i} \cap V \ne \varnothing$. Но $G_{\mathfrak{F}_i} \lhd G$ и поэтому $G_{\mathfrak{F}_i} \subseteq N_G(V)$ по определению нормализатора.

Итак, P, $G_{\mathfrak{F}_1}$, $G_{\mathfrak{F}_2} \subseteq N_G(V)$ и, значит, $PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} \subseteq N_G(V)$. Отсюда $G_{\mathfrak{F}_i} = N_G(V)$.

Но, как показано выше, $PG_{\mathfrak{F}_1}G_{\mathfrak{F}_2} = G$ и тогда $G \subseteq N_G(V)$. Отсюда $G = N_G(V)$, что влечет $V = G$. Последнее равенство означает $G \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $PG_{\mathfrak{F}_i} = G$ ($i=1,2$).

Легко видеть, что $PG_{\mathfrak{F}_i} \in \mathfrak{F}_i\mathfrak{N}_p$ ввиду $G = PG_{\mathfrak{F}_i}$ ($i=1,2$). Но по условию теоремы $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}_i\mathfrak{N}_p$ ($i=1,2$) для всех $p \in \pi$. Значит, $G \in \mathfrak{F}_i$ ($i=1,2$).

Таким образом, $G \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$ – противоречие с доказанным выше.

Следовательно, $N_\pi(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2) \setminus \mathfrak{Y} = \varnothing$. Если $H \in \mathfrak{X}$, то из $\mathfrak{X} \lhd \mathfrak{F}_i$ следует $H \in \mathfrak{Y}$. Отсюда ввиду $\mathfrak{X} \lhd \mathfrak{F}_i$ имеем $H \in \mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2 \subseteq N_\pi(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2)$. Таким образом, найдется группа $H \in N_\pi(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2) \cap \mathfrak{Y}$. Следовательно, $N_\pi(\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2) \subseteq \mathfrak{Y}$.

Теорема доказана.

В случае, когда $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$, из теоремы 2.2 вытекает теорема 3.1.8 [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Blessenohl, D.*** Über normale Schunk- und Fittingklassen / D. Blessenohl, W. Gaschütz // Math. Z. – 1970. – Bd. 148, № 1. – S. 1-8.
2. ***Doerk, K.*** Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.
3. ***Cossey, J.*** Products of Fitting Classes / J. Cossey // Math. Z. – 1975. – 141. – S. 289-295.
4. ***Reifferscheid, S.*** On the theory of Fitting classes of finite soluble groups. Dissertation. Universität Tübingen, 2001.
5. ***Hauck, P.*** Endliche auflösbare Gruppen mit normalem $\mathfrak{F}$ -Injektor / P. Hauck // Arch. Math. (Basel). – 1977. – 28. – S. 117-129.
6. ***Huppert, B.*** Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1967. – 796 s.
7. ***Fischer, B.*** Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschütz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102. – № 5. – S. 337-339.

8. ***Сементовский, В.Г.*** Инъекторы конечных групп / В.Г. Сементовский // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1984. – С. 166-170.
9. ***Курош, А.Г.*** Лекции по общей алгебре / А.Г. Курош. – М.: Наука. – 1973. – 400 с.

Поступила в редакцию 04.12.2008 г.