УДК 535.361:535.317.1

М.С. НОСКОВА

ОЦЕНКА МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО ТОЧНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ПРОПУСКАНИЯ БИНАРНОЙ МАРКОВСКОЙ СМЕСИ

На основе метода Монте-Карло разработан алгоритм имитационного моделирования переноса излучения с малоугловым рассеянием в бинарной марковской смеси и в эквивалентной однородной смеси. Данный алгоритм использован для оценки точности аналитического метода расчета коэффициента пропускания бинарной марковской смеси, основанного на малоугловом приближении.

Результаты расчетов показывают, что для одних и тех же значений оптической глубины слоя погрешность аналитического метода в бинарной марковской смеси меньше, чем погрешность в эквивалентной однородной смеси. Таким образом, критерии, определяющие границы применимости малоуглового приближения в однородной среде, могут быть использованы и для бинарной марковской смеси.

Алгоритм моделирования переноса излучения в бинарной марковской смеси может быть легко адаптирован для моделирования переноса излучения в стохастических средах с произвольной статистикой.

Ключевые слова: стохастический перенос излучения, бинарная марковская смесь, метод Монте-Карло, малоугловое приближение.

Введение

Теорию переноса излучения широко применяют для решения научных и прикладных задач в области астрофизики, переноса нейтронов, оптики атмосферы и гидрооптики, в медицине и биологии.

В классической теории переноса неоднородность распределения рассеивающих частиц вдоль трассы прохождения излучения описывается детерминированными функциями [1; 2]. Однако атмосфера, океан, биоткани и многие другие рассеивающие среды имеют сложную случайно-неоднородную (стохастическую) структуру. Характерный размер неоднородностей в подобных объектах сравним со средней длиной свободного пробега фотонов, что заметно сказывается на их оптических свойствах. Например, интенсивность солнечной радиации, прошедшей разорванную облачность, может в несколько раз превосходить интенсивность солнечной радиации, прошедшей однородную облачность, что оказывает определяющее влияние на тепловой режим атмосферы и подстилающей поверхности. Неоднородности в защите атомных реакторов приводят к увеличению уровня радиации. Неравномерное распределение интенсивности при облучении биотканей может сказаться на результатах лечения.

Поэтому параллельно с развитием детерминированной теории переноса большое внимание уделяется построению теории стохастического переноса излучения, основная цель которой – установить связь между статистическими характеристиками параметров среды и статистическими характеристиками полей излучения [1-10].

Получить точное аналитическое решение подобной задачи в общем случае невозможно. В связи с этим актуальной является разработка простых приближенных методов описания стохастического радиационного переноса, базирующихся на аналитическом усреднении и требующих небольшого количества входных параметров. Приближенные аналитические методы дают возможность быстро рассчитывать характеристики излучения и делают возможным анализ общих закономерностей переноса излучения в стохастических средах. Естественно, точность приближенных методов нуждается в оценке. Наиболее удобным, хорошо разработанным и широко применимым методом оценки точности приближенных решений широкого круга стохастических задач является метод Монте-Карло [11].

Цель настоящей работы – с помощью метода Монте-Карло оценить точность аналитического метода описания переноса излучения, основанного на малоугловом приближении [13-17]. Оценка производится на примере расчета коэффициента пропускания.

Бинарная марковская смесь

Одной из упрощенных моделей стохастической среды с произвольным масштабом неоднородностей является бинарная марковская смесь (БМС) [3-10] – среда, состоящая из двух несмешивающихся компонент, каждая из которых имеет свои оптические характеристики: $f_i(\Omega;\Omega')$ – индикатрису рассеяния[1], σ_i, k_i, $\varepsilon_i = \sigma_i + k_i$ и $\Lambda_i = \sigma_i/\varepsilon_i$ – соответственно, коэффициенты рассеяния[2], поглощения[3], экстинкции[4] и вероятность выживания фотона в i-й компоненте среды. Линейные размеры областей пространства, занимаемых компонентами, – случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону.

Типичным примером (БМС) является разорванная облачность [7-10]: пересекающий ее фотон (рис. 1, кривая АБ) проходит сквозь чередующиеся участки облаков ($i = 1$) и межоблачного пространства ($i = 2$). Размеры этих участков являются случайными величинами, распределенными по экспоненциальному закону [3]. Внутренняя структура каждой из компонент считается однородной. Стохастичность задачи проявляется только в статистике распределения облачного поля, то есть в вероятности присутствия в точке $\mathbf{r}$ облака или ясного неба.

---

[1] Функция плотности вероятности рассеяния фотона из направления Ω' в направление Ω.

[2] Величина, характеризующая рассеяние света элементарным объемом среды.

[3] Величина, характеризующая поглощение света элементарным объемом среды.

[4] Величина, характеризующая ослабление света элементарным объемом среды.

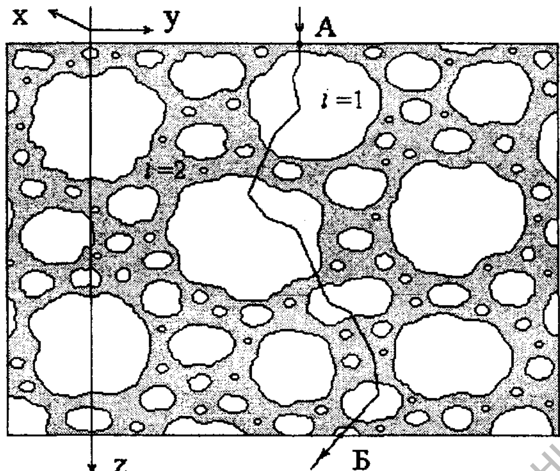

Рис. 1. Схематическое изображение пространственного распределения компонент бинарной марковской смеси и траектории пролетающего сквозь нее фотона

В качестве других примеров БМС можно рассматривать:

1) мелкие кровеносные сосуды и окружающую их ткань;

2) легочную ткань, которая состоит из большого количества альвеол, имеющих фрактальную структуру и заполненных воздухом;

3) защиту ядерных реакторов, состоящую из бетонных конструкций с гравием;

4) ядерные реакторы с кипящей водой, в которых возникает турбулентная смесь жидкости и пара;

5) неоднородности, возникающие в результате плазменных неустойчивостей при облучении лазером дейтериево-тритиевых таблеток в реакторах с инерционным удержанием плазмы.

Если распространение излучения в БМС можно представить как марковский случайный процесс, удовлетворяющий условию причинности[5] [12], интенсивность описывается системой двух связанных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\Omega \cdot \nabla p_1 I_1(\mathbf{r},\Omega)+\varepsilon_1 p_1 I_1(\mathbf{r},\Omega)=\frac{\sigma_1}{4\pi}\int_{4\pi} p_1 I_1(\mathbf{r},\Omega')f_1(\Omega\cdot\Omega')d\Omega'-\frac{p_1 I_1(\mathbf{r},\Omega)}{l_1}+\frac{p_2 I_2(\mathbf{r},\Omega)}{l_2},$$

(1)

$$\Omega \cdot \nabla p_2 I_2(\mathbf{r},\Omega)+\varepsilon_2 p_2 I_2(\mathbf{r},\Omega)=\frac{\sigma_2}{4\pi}\int_{4\pi} p_2 I_2(\mathbf{r},\Omega')f_2(\Omega\cdot\Omega')d\Omega'-\frac{p_2 I_2(\mathbf{r},\Omega)}{l_2}+\frac{p_1 I_1(\mathbf{r},\Omega)}{l_1},$$

[5] Если ось z декартовой системы координат совпадает с направлением распространения излучения, то световое поле в плоскости $z_0 = const$ зависит только от параметров среды в области $z \le z_0$.

где $\nabla = \mathbf{i}\,\partial/\partial x + \mathbf{j}\,\partial/\partial y + \mathbf{k}\,\partial/\partial z$ – оператор градиента, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные векторы декартовой системы координат, $I_i(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$ – усредненные значения интенсивности в точке $\mathbf{r}$ в направлении $\mathbf{\Omega}$ при условии, что точка $\mathbf{r}$ находится в компоненте i, $p_i = l_i/(l_1 + l_2)$ – вероятность нахождения компоненты i в произвольной точке смеси, l_1, l_2 – средние хорды компонент (средние размеры участков, занимаемых первой и второй компонентами).

Среднее значение интенсивности определяется формулой

$$\langle I(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})\rangle = p_1 I_1(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) + p_2 I_2(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}). \qquad (2)$$

Данная модель называется в литературе моделью низкого порядка (модель Левермора) [3; 4; 8; 9].

Малоугловое приближение. В случае изотропного рассеяния[6] и большой глубины слоя, излучение, рассеянное в обратном направлении, слишком велико, что нарушает принцип причинности. Система (1) дает большую погрешность, и приходится использовать модели высоких порядков, значительно более громоздкие [3-6; 8; 9].

Большинство же природных сред имеют в своем составе значительный процент частиц, размеры которых велики по сравнению с длинами волн оптического диапазона. Индикатрисы рассеяния подобных частиц сильно вытянуты вперед, и большая часть рассеянных фотонов отклоняется от первоначального направления незначительно.

Таким образом, если обе компоненты БМС состоят из частиц, имеющих сильно вытянутые индикатрисы рассеяния, перенос излучения можно описывать с достаточной точностью в рамках модели низкого порядка. При этом для упрощения системы (1) можно использовать малоугловое приближение и методы преобразования Фурье [1; 2].

Предложенный подход позволяет рассчитывать в аналитическом виде пространственно-угловое распределение интенсивности в БМС и передаточные характеристики БМС, дает возможность исследовать их зависимость от оптических параметров БМС и среднего размера неоднородностей. Результаты, полученные в рамках малоугловой модели БМС, опубликованы в работах [13-17].

Аналитический метод расчета коэффициента пропускания БМС

Коэффициент пропускания бесконечно широкого слоя глубиной H представляет собой отношение интенсивности излучения, падающего на границу среды, к интенсивности излучения, направленной в переднюю полусферу на данной глубине [2]:

$$K(z) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx, dy \int\limits_{+2\pi} I(x,y,z=H,\Omega)\,d\Omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx, dy \int\limits_{+2\pi} I(x,y,z=0,\Omega)\,d\Omega}.$$

[6] В этом случае индикатриса рассеяния является сферической.

В рамках малоугловой модели для среднего значения коэффициента пропускания БМС было получено следующее выражение [13]:

$$K_{БМС}(z) = \frac{\gamma_2 - \langle\tilde{k}\rangle}{\gamma_2 - \gamma_1} exp(-\gamma_1 z) - \frac{\gamma_1 - \langle\tilde{k}\rangle}{\gamma_2 - \gamma_1} exp(-\gamma_2 z), \quad (5)$$

где $\left.\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(\tilde{k}_1 + \frac{1}{l_1} + \tilde{k}_2 + \frac{1}{l_2} \mp \sqrt{\left(\tilde{k}_2 + \frac{1}{l_2} - \tilde{k}_1 - \frac{1}{l_1}\right)^2 + \frac{4}{l_1 l_2}}\right),$

$\tilde{k}_i = k_i(1 - \Lambda_i F_i)$ – эффективное значение показателя поглощения;

$\langle\tilde{k}\rangle = \tilde{k}_1 p_1 + \tilde{k}_2 p_2$ – среднее значение эффективного показателя поглощения;

$Fr_i = \frac{\left((1+\mu_i)\sqrt{1+\mu_i^2} - (1-\mu_i^2)\right)}{\left(2\mu_i\sqrt{1+\mu_i^2}\right)}$ – доля излучения, рассеянного в переднюю полусферу;

$\mu_i = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(cos\beta)cos\beta\, d(cos\beta)$ – средний косинус индикатрисы рассеяния.

Можно оценить влияние стохастичности среды на перенос излучения, сопоставив средние значения интегральных параметров рассеянного излучения в бинарной марковской смеси и в эквивалентной однородной смеси. Эквивалентная однородная смесь (ЭОС) – среда, состоящая, как и БМС, из частиц двух типов, но в отличие от БМС не разделенных по компонентам, а равномерно перемешанных друг с другом.

Коэффициент пропускания ЭОС имеет вид

$$K_{ЭОС}(z) = exp\left(-\langle\tilde{k}\rangle z\right). \quad (6)$$

Моделирование методом Монте-Карло. В программе, результаты расчетов которой представлены в данной статье, коэффициенты пропускания БМС и ЭОС, рассчитанные методом Монте-Карло, определяются как

$$K_{БМС}^{M-K} = \frac{N}{N_{БМС}}, \quad K_{ЭОС}^{M-K} = \frac{N}{N_{ЭОС}},$$

где N – общее число фотонов, запущенных в БМС или ЭОС:
$N_{БМС}$ и $N_{ЭОС}$ – соответственно, число фотонов, прошедших слой БМС или ЭОС глубиной H.

Излучение падает на плоскую поверхность среды вдоль ее нормали, ось z расположена параллельно направлению распространения излучения. Пучек считается бесконечно узким и мононаправленным, координаты точки входа фотонов в БМС $(0,0,0)$, а начальное значение координат единичного вектора, определяющего направление движения, $(0,0,1)$.

Каждое значение $K^{MK}_{БМС}$ и $K^{MK}_{ЭОС}$ рассчитано для 200000 фотонов.

Моделирование проводилось с использованием методов, приведенных в [18] (индикатрисы рассеяния имеют вид аппроксимации Хеньи-Гринстейна [1, 2]). БМС рассматривается как одномерная стохастическая среда, состоящая из чередующихся плоских слоев случайной толщины, занимаемых первой и второй компонентами. Тем не менее в области применимости малоуглового приближения зависимость переноса излучения от размера неоднородностей в направлении, перпендикулярном оси пучка, минимальна, что и оправдывает переход к одномерной модели.

Порядок чередования компонент и толщина слоев, занимаемых первой и второй компонентами смеси, разыгрывался для каждого фотона отдельно по мере его прохождения сквозь слой среды. Траектории фотонов в горизонтальном направлении ограничены условием $\sqrt{x^2 + y^2} \le 5H$.

Алгоритм и процедура расчета коэффициента пропускания БМС может быть легко адаптирована для расчета коэффициентов пропускания стохастических сред с произвольной статистикой.

Результаты численных расчетов. При расчетах использованы безразмерные оптические параметры:

$$\tau = \langle\varepsilon\rangle z, \quad \tilde{l}_i = \langle\varepsilon\rangle l_i, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i / \langle\varepsilon\rangle.$$

Погрешность аналитического метода расчета коэффициентов пропускания вычисляется следующим образом:

$$Del_{ЭОС} = \frac{K_{ЭОС} - K^{MK}_{ЭОС}}{K^{MK}_{ЭОС}} \cdot 100\%, \quad Del_{БМС} = \frac{K_{БМС} - K^{MK}_{БМС}}{K^{MK}_{БМС}} \cdot 100\%,$$

где $Del_{БМС}$ и $Del_{ЭОС}$ – соответственно, погрешности в БМС и ЭОС,

Расчеты проводились на примере разорванной облачности с параметрами: $\tilde{l}_1 = \tilde{l}_2 = 4$, $\tilde{\varepsilon}_1 = 1{,}95$, $\Lambda_1 = 0{,}9$ – облачная среда, $\tilde{\varepsilon}_2 = 0{,}05$, $\Lambda_2 = 0{,}9$ – межоблачные промежутки для трех значений средних косинусов индикатрис рассеяния μ_i.

Межоблачные промежутки заполнены теми же частицами, что и облака, но со значительно меньшей концентрацией. Оптические параметры разорванной облачности заимствованы из [2].

Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Как видно, значения коэффициентов пропускания БМС и ЭОС, полученные методом Монте-Карло, всегда меньше, чем рассчитанные аналитическим путем согласно (5) и (6). В результате рассеяния траектории фотонов отклоняются от оси пучка, что приводит к возрастанию средней длины их пробега и увеличивает вероятность поглощения.

При $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}975$ погрешность расчета коэффициентов пропускания незначительна даже при $\tau = 10$ как для БМС, так и для ЭОС. Для более широких индикатрис погрешность естественно возрастает.

Таблица 1

**Коэффициенты пропускания
БМС и ЭОС**

Оптич. глубина слоя τ	Коэффициент пропускания в БМС		Погрешность в БМС $Del_{БМС}$ %	Коэффициент пропускания в ЭОС		Погрешность в ЭОС $Del_{ЭОС}$ %
	$K_{БМС}$	$K_{БМС}^{МК}$		$K_{ЭОС}$	$K_{ЭОС}^{МК}$	
$\mu_1 = \mu_2 = 0.975$						
2	0,823	0,816	0,9	0,811	0,805	0,7
4	0,688	0,674	2,1	0,658	0,643	2,3
6	0,578	0,555	4,1	0,533	0,508	4,9
8	0,486	0,454	7,0	0,432	0,401	7,7
10	0,409	0,377	8,5	0,351	0,316	11,1
$\mu_1 = \mu_2 = 0.95$						
2	0,816	0,8	2,0	0,803	0,788	1,9
4	0,677	0,644	5,1	0,645	0,609	5,9
6	0,565	0,519	8,9	0,517	0,464	11,4
8	0,472	0,419	12,6	0,415	0,349	18,9
10	0,395	0,338	16,9	0,334	0,258	29,5
$\mu_1 = \mu_2 = 0.9$						
2	0,801	0,767	4,4	0,786	0,753	4,4
4	0,655	0,594	10,3	0,617	0,547	12,8
6	0,539	0,459	17,4	0,485	0,384	26,3
8	0,445	0,357	24,6	0,381	0,266	43,2
10	0,367	0,275	33,5	0,299	0,18	66,1

Результаты расчетов показывают, что для одних и тех же значений оптической глубины погрешность в БМС $Del_{БМС}$ меньше, чем погрешность $Del_{ЭОС}$ в однородной смеси. Физически это объясняется тем, что для фотона, пролетающего сквозь стохастическую среду, вероятность испытать столкновение с частицей и при этом поглотиться или рассеяться всегда ниже, чем в однородной среде [1-3]. Соответственно, среднее значение коэффициента пропускания стохастической среды больше, чем однородной, а погрешность расчета меньше.

Заключение

Погрешность расчетов коэффициента пропускания БМС аналитическим методом, разработанным в рамках малоуглового приближения, не превышает аналогичную величину в эквивалентной однородной смеси. Соответственно, критерии, определяющие границы применимости малоуглового приближения в однородной среде (например, соотношение $\Lambda(1 - Fr)\tau \le 0{,}2$ [2]), могут применяться и для БМС.

Как известно [1; 2], при использовании малоуглового приближения погрешность расчета коэффициента пропускания среды является также максимальным значением погрешности расчета ее оптической передаточной функции[7].

[7] ОПФ – одна из основных характеристик передачи качества изображения, отображающая степень его искажения в зависимости от глубины слоя рассеивающей среды и размера его деталей (чем меньше детали изображения, тем хуже они видны).

Таким образом, ограничения, полученные для коэффициента пропускания, могут применяться и при вычислении оптической передаточной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Зеге, Э.П.*** Перенос изображения в рассеивающей среде / Э.П. Зеге, А.П. Иванов, И.Л. Кацев. – Минск: Наука и техника, 1985. – 327 с.
2. ***Валентюк, А.Н.*** Оптическое изображение при дистанционном наблюдении / А.Н. Валентюк, К.Г. Предко. – Минск: Наука и техника, 1991. – 359 с.
3. ***Pomraning, G.C.*** Linear Kinetic Theory and Particle Transport in Stochastic Mixtures / G.C. Pomraning. – World Scientific Publishing, Singapore, 1991. – 235 p.
4. ***Valentyuk, A.N.*** Stochastic radiative transfer and causality condition / A.N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1995. – Vol. 53. – № 6. – P. 693-704.
5. ***Valentyuk, A.N.*** A functional description of stochastic radiative transfer / A.N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1996. – Vol. 56. – P. 447-464.
6. ***Valentyuk, A.N.*** Stochastic radiative transfer in M-component markovian mixtures / A.N. Valentyuk // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. – 1998. – Vol 60. – № 6. – P. 1069-1086.
7. ***Zuev, V.E.*** Model of Outgoing Long-Wave Radiation in the presence of Broken Clouds / V.E. Zuev, T.B. Zhuravleva, G.A. Titov // J. of Geophys. Res. – 1987. – V. 92. – P. 5533-5539.
8. ***Malvagy, F.*** Stochastic atmospheric radiative transfer / F. Malvagy, G.C. Pomraning // Atmos. Oceanic Opt. – 1993. – V. 6. – № 9. – P. 610-622.
9. ***Помранинг, Г.С.*** Взаимодействия облако – радиация: модель Титова и другие модели / Г.С. Помранинг // Оптика атмосферы и океана. – 1999. – Т. 12. – № 3. – С. 215-221.
10. ***Lane, D.E.*** Radiative transfer through broken clouds: observations and model validation / D.E. Lane, G. Kristen, R.C.J. Somerville // Journal of Climate. – 2002. – V. 15. – P. 2921-2933.
11. ***Каргин, Б.А.*** Имитационное моделирование кучевой облачности для исследования процессов переноса солнечной радиации в атмосфере методом Монте-Карло / Б.А. Каргин, С.М. Пригарин // Оптика атмосферы и океана. – 1994. – Т. 7. – № 9. – С. 1275-1287.
12. ***Тихомиров, В.И.*** Марковские процессы / В.И. Тихомиров, М.А. Миронов. – М.: Сов. Радио, 1977. – 488 с.
13. ***Noskova, M.*** Stochastic laser-beam transfer through a binary markovian mixture / M. Noskova, A. Valentyuk. // J. Appl. Opt. – 1997. – V. 36. – № 30. – P. 325-331.
14. ***Валентюк, А.Н.*** Угловая структура лазерного излучения в бинарной марковской смеси / А.Н. Валентюк, М.С. Носкова // Журн. Прикл. Спектр. – 1999. – Т. 66. – № 1. – С. 36-42.
15. ***Носкова, М.С.*** Оптическая передаточная функция бинарной марковской смеси / М.С. Носкова // Журн. Прикл. Спектр. – 2004. – Т. 71. – № 2. – С. 198-203.
16. ***Носкова, М.С.*** Итерационное решение задачи определения оптической передаточной функции бинарной марковской смеси / М.С. Носкова // Оптический журнал. – 2004. – Т. 71. – № 9. – С. 16-19.
17. ***Noskova, M.S.*** Small angle model of radiative transfer in a binary markovian mixture / M.S. Noskova // Twelfth Joint International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics / Atmospheric Physics, Tomsk, Russia, 27-30 June 2005. / Institute of Atmospheric Optics SB RAS; ed. by G.G. Matvienko, G.A. Zherebtsov, Proc. of SPIE Vol. 6160. – 2006. – P. 616016-1 - 616016-7.
18. ***Букатый, В.И.*** Пространственное и угловое распределение светового поля в ансамбле частиц с сильно вытянутой индикатрисой рассеяния / В.И. Букатый, Т.К. Кронберг, Д.В. Михеев // Оптика атмосферы и океана. – 2001. – Т. 14. – № 3. – С. 230-232.

Поступила в редакцию 15.11.2006 г.