УДК 512.548

А.М. ГАЛЬМАК

ТОЖДЕСТВА МНОГООБРАЗИЯ $\mathfrak{X}(n)$

Известно [1-3], что класс всех n-арных групп является многообразием, которое можно определить тождествами в сигнатуре $\{ [\ ], {}^{-} \}$, где $[\ ]$ – ассоциативная n-арная операция, ${}^{-}$ – унарная операция взятия косого элемента. В [4] показано, что каждому многообразию групп $\mathfrak{X}$ можно поставить в соответствие многообразие n-арных групп $\mathfrak{X}(n)$. Цель данной работы – определение многообразия $\mathfrak{X}(n)$ с помощью тождеств указанной выше сигнатуры $\{ [\ ], {}^{-} \}$.

Для каждого группового слова

$$t = t(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_m^{\varepsilon_m}, \quad x_i \in X, \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

определим три слова сигнатуры $\{ [\ ], {}^{-} \}$ в том же алфавите X:

1) $t^{(n)} = t^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-2}) = [x_1^{\delta_1} y_1^{n-2} x_2^{\delta_2} y_1^{n-2} \ldots x_m^{\delta_m}]$,

$x_i^{\delta_i} = x_i$ при $\varepsilon_i = 1$, $x_i^{\delta_i} = [c\, \bar{x}_i \underbrace{x_i \ldots x_i}_{n-3} c]$ при $\varepsilon_i = -1$, где

$$c = [\bar{y}_{n-2} \underbrace{y_{n-2} \cdots y_{n-2}}_{n-3} \ldots \bar{y}_1 \underbrace{y_1 \cdots y_1}_{n-3}]; \tag{1}$$

2) $\hat{t}^{(n)} = \hat{t}^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y) = [x_1^{\delta_1} \bar{y} \underbrace{y \ldots y}_{n-3} x_2^{\delta_2} \bar{y} \underbrace{y \ldots y}_{n-3} \ldots x_m^{\delta_m}]$,

$x_i^{\delta_i} = x_i$ при $\varepsilon_i = 1$, $x_i^{\delta_i} = [y \bar{x}_i \underbrace{x_i \ldots x_i}_{n-3} y]$ при $\varepsilon_i = -1$;

3) $\tilde{t}^{(n)} = \tilde{t}^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y) = [x_1^{\delta_1} \underbrace{y \ldots y}_{n-2} x_2^{\delta_2} \underbrace{y \ldots y}_{n-2} \ldots x_m^{\delta_m}]$,

$x_i^{\delta_i} = x_i$ при $\varepsilon_i = 1$, $x_i^{\delta_i} = [\bar{y}\, \bar{x}_i \underbrace{x_i \ldots x_i}_{n-3} \bar{y}]$ при $\varepsilon_i = -1$.

Если $t(x) = x$, то $t^{(n)}(x, y_1, \ldots, y_{n-2}) = \hat{t}^{(n)}(x, y) = \tilde{t}^{(n)}(x, y) = x$.

Напомним, что если $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, $a \in A$, то, как обычно, через $< A, ⓐ, {}^{-1_a} >$ обозначается группа с бинарной операцией $x ⓐ y = [x\alpha y]$, где α – обратная последовательность для a, и унарной операцией ${}^{-1_a}$ – взятия обратного элемента. Если $\mathfrak{X}$ – класс групп, то класс n-арных групп $\mathfrak{X}(n)$ определяется [5] следующим образом:

$$\mathfrak{X}(n) = \{< A, [\ ] > \mid \forall a \in A, < A, ⓐ > \in \mathfrak{X} \}.$$

В следующих двух леммах и теореме все встречающиеся групповые тождества не содержат пустых групповых слов.

Лемма 1. Пусть $< A, [\ ], ^{-} >$ – n-арная группа и для некоторого $a \in A$ в $< A, ⓐ, ^{-1_a} >$ выполняется тождество

$$t(x_1, \ldots, x_m) = s(x_1, \ldots, x_m). \qquad (*)$$

Тогда в $< A, [\ ], ^{-} >$ выполняются следующие тождества:

$$t^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-2}) = s^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-2}); \qquad (**)$$

$$\hat{t}^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y) = \hat{s}^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y); \qquad (***)$$

$$\tilde{t}^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y) = \tilde{s}^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y). \qquad (****)$$

Доказательство. Для произвольных элементов $y_1, \ldots, y_{n-2} \in A$ элемент c из 1) совпадает с обратным элементом для последовательности $y_1 \ldots y_{n-2}$. Так как согласно следствию 8.2 [5], группы $< A, ⓐ, ^{-1_a} >$ и $< A, ©, ^{-1_c} >$ – изоморфны, то группа $< A, ©, ^{-1_c} >$ удовлетворяет тождеству (*). А так как

$$u © v = [uy_1 \ldots y_{n-2}v],\ u^{-1_c} = [c\bar{u}\underbrace{u \ldots u}_{n-3}c],$$

то из (*) получается тождество (**).

Если в (**) положить $y_1 = \bar{y}\ y_2 = \ldots = y_{n-2} = y$, то легко проверяется, что $c = y$ и из (**) следует (***).

Если в (**) положить $y_1 = \ldots = y_{n-2} = y$, то легко проверяется, что $c = \bar{y}$ и из (**) следует (****). Лемма доказана.

Лемма 2. Если n-арная группа $< A, [\ ], ^{-} >$ удовлетворяет одному из тождеств (**) - (****) из предыдущей леммы, то для любого $a \in A$ группа $< A, ⓐ, ^{-1_a} >$ удовлетворяет тождеству (*) из той же леммы.

Доказательство. Пусть в $< A, [\ ], ^{-} >$ выполняется тождество (**). Тогда обратный элемент c в $< A, [\ ], ^{-} >$ для последовательности $y_1 \ldots y_{n-2}$ имеет вид (1), а обратный элемент x^{-1_c} в $< A, ©, ^{-1_c} >$ для элемента x имеет вид

$$x^{-1_c} = [c\bar{x}\underbrace{x \ldots x}_{n-3}c].$$

Используя последнее равенство, а также равенство

$$x © y = [xy_1 \ldots y_{n-2}y],$$

получаем из тождества (**) тождество (*), т.е. группа $< A, ©, ^{-1_c} >$ удовлетворяет тождеству (*). Так как для любого $a \in A$ группы $< A, ⓐ, ^{-1_a} >$ и $< A, ©, ^{-1_c} >$ изиморфны, то группа $< A, ⓐ, ^{-1_a} >$ также удовлетворяет тождеству (*).

Для тождеств (***) и (****) доказательство проводится аналогично. Лемма доказана.

Пусть Σ совокупность групповых тождеств t = s. Если в Σ каждое тождество t = s заменить тождеством $t^{(n)} = s^{(n)}$ (соответственно $\hat{t}^{(n)} = \hat{s}^{(n)}$, $\tilde{t}^{(n)} = \tilde{s}^{(n)}$), то получим совокупность $\Sigma(n)$ (соответственно $\hat{\Sigma}(n)$, $\tilde{\Sigma}(n)$) тождеств сигнатуры $\{[\ ], ^{-}\}$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – многообразие групп, определяемое совокупностью тождеств Σ. Тогда $\mathfrak{X}(n)$ – многообразие n-арных групп, определяемое любой из совокупностей тождеств $\Sigma(n)$, $\hat{\Sigma}(n)$, $\tilde{\Sigma}(n)$.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие n-арных групп, выделяемое в многообразии всех n-арных групп совокупностью тождеств $\Sigma(n)$.

Если $< A, [\,], ^{-} > \in \mathfrak{X}(n)$, то $< A, ⓐ, ^{-1_a} > \in \mathfrak{X}$ для любого $a \in A$. Так как $< A, ⓐ, ^{-1_a} >$ удовлетворяет любому тождеству (*) из , то по лемме 1, $< A, [\,], ^{-} >$ удовлетворяет любому тождеству (**) из $\Sigma(n)$, и поэтому $< A, [\,], ^{-} > \in \mathfrak{M}$, откуда $\mathfrak{X}(n) \in \mathfrak{M}$.

Пусть теперь $< A, [\,], ^{-} > \in \mathfrak{M}$, т.е. $< A, [\,], ^{-} >$ удовлетворяет любому тождеству (**) из $\Sigma(n)$. Тогда по лемме 2, для любого $a \in A$ группа $< A, ⓐ, ^{-1_a} >$ удовлетворяет любому тождеству (*) из Σ, т.е. $< A, ⓐ, ^{-1_a} > \in \mathfrak{X}$, откуда $< A, [\,], ^{-} > \in \mathfrak{X}(n)$. Таким образом, доказано включение $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}(n)$, а значит и равенство $\mathfrak{X}(n) = \mathfrak{M}$.

Для совокупностей $\hat{\Sigma}(n)$ и $\tilde{\Sigma}(n)$ доказательство проводится аналогично. Теорема доказана.

Если $\mathfrak{A}$ – многообразие всех абелевых групп, то $\mathfrak{A}(n)$ – многообразие всех полуабелевых n-арных групп (пример из [4]). А так как многообразие $\mathfrak{A}$ определяется тождеством $xz = zx$, то из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Многообразие $\mathfrak{A}(n)$ всех полуабелевых n-арных групп выделяется в многообразии всех n-арных групп любым из следующих трех тождеств

$$[xy_1 \ldots y_{n-2}z] = [zy_1 \ldots y_{n-2}x],$$

$$[x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}z] = [z\underbrace{y\ldots y}_{n-2}x],\quad [x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}z] = [z\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}x].$$

Заметим, что полуабелевые n-арные группы как раз и определяются с помощью первого тождества.

Следствие 2. Многообразие $\mathfrak{A}(3)$ всех полуабелевых тернарных групп выделяется в многообразии всех тернарных групп любым из следующих двух тождеств

$$[xyz] = [zyx],\quad [x\bar{y}z] = [z\bar{y}x].$$

Пусть $\mathfrak{B}_m$ – бернсайдово многообразие периода m, определяемое тождеством $x^{m+1} = x$. Тогда из теоремы 1 вытекает

Следствие 3. Для любого $n \geq 3$ множество $\mathfrak{B}_m(n)$ является многообразием n-арных групп, которое в многообразии всех n-арных групп выделяется любым из следующих трех тождеств

$$[\underbrace{xy_1\ldots y_{n-2}\ldots xy_1\ldots y_{n-2}}_{m}x] = x,$$

$$[\underbrace{x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}\ldots x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}}_{m}x] = x,\quad [\underbrace{x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}\ldots x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}}_{m}x] = x.$$

Следствие 4. Многообразие $\mathfrak{B}_m(3)$ выделяется в многообразии всех тернарных групп любым из следующих двух тождеств

$$[\underbrace{xy\ldots xy}_{m}x] = x,\quad [\underbrace{x\bar{y}\ldots x\bar{y}}_{m}x] = x.$$

Замечание 1. В любом из тождеств (**) – (****) могут встретиться нейтральные последовательности, которые можно отбросить. Полученное таким образом новое тождество, будет истинным в некоторой n-арной группе тогда и только тогда, когда в этой же n-арной группе истинно соответствующее из тождеств (**) – (****). Таким образом, леммы 1 и 2, а также теорема 1 остаются верными, если в них любое из тождеств (**) – (****) заменить соответствующим эквивалентным тождеством, не содержащим нейтральных последовательностей.

Например, в тождестве (***) можно отбросить последовательности

$$y\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3},\quad \bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}y,$$

а в тождестве (****) можно отбросить последовательности

$$\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-2},\quad \underbrace{y\ldots y}_{n-2}\bar{y}.$$

Пример 1. Если тождество (*) имеет вид $x^{-1}z^{-1} = z^{-1}x^{-1}$, то (***) имеет вид

$$[y\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\,y\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}\,y\bar{z}\underbrace{z\ldots z}_{n-3}\,y] = [y\bar{z}\underbrace{z\ldots z}_{n-3}\,y\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}\,y\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\,y].$$

Последнее тождество можно заменить эквивалентным тождеством

$$[y\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\,y\,\bar{z}\underbrace{z\ldots z}_{n-3}\,y] = [y\bar{z}\underbrace{z\ldots z}_{n-3}\,y\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\,y].$$

Пример 2. Согласно следствию 3, многообразие $\mathfrak{B}_2(n)$ определяется тождеством

$$[x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}\,x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}\,x] = x \qquad (2)$$

Так как многообразие $\mathfrak{B}_2$ может быть определено тождеством $x^{-1} = x$, то по теореме 1, многообразие $\mathfrak{B}_2(n)$ определяется тождеством

$$[y\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\;y] = x. \qquad (3)$$

Покажем, что n-арная группа < A, [ ], ⁻ > удовлетворяет тождеству (2) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождеству (3).

Если в < A, [ ], ⁻ > верно (2), то

$$[y\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\,[x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}\,x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}\,x]\,\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\,y] = [y\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\,x\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\,y], \qquad (4)$$

откуда вытекает (3).

Если же в < A, [ ], ⁻ > верно (3), то верно и (4), откуда в силу однозначной разрешимости уравнений в n-арной группе, получаем (2).

Лемма 3. На любой n-арной группе < A, [ ], ⁻ > тождества в каждой из следующих трех пар эквивалентны:

$$[z y_1^{n-2} x] = x,\ \ z = [\bar{y}_{n-2} \underbrace{y_{n-2} \cdots y_{n-2}}_{n-3} \cdots \bar{y}_1 \underbrace{y_1 \cdots y_1}_{n-3}];$$

$$[z \bar{y} \underbrace{y \ldots y}_{n-3} x] = x,\ \ z = y;$$

$$[z \underbrace{y \ldots y}_{n-2} x] = x,\ \ z = \bar{y}.$$

Доказательство. Если верно первое тождество первой пары, то

$$[[z y_1^{n-2} x] \bar{x} \underbrace{x \ldots x}_{n-3} [\bar{y}_{n-2} \underbrace{y_{n-2} \cdots y_{n-2}}_{n-3} \cdots \bar{y}_1 \underbrace{y_1 \cdots y_1}_{n-3}]] =$$

$$= [x \bar{x} \underbrace{x \ldots x}_{n-3} [\bar{y}_{n-2} \underbrace{y_{n-2} \cdots y_{n-2}}_{n-3} \cdots \bar{y}_1 \underbrace{y_1 \cdots y_1}_{n-3}]],$$

откуда следует второе тождество первой пары.

Если верно второе тождество первой пары, то

$$[z y_1^{n-2} x] = [[\bar{y}_{n-2} \underbrace{y_{n-2} \cdots y_{n-2}}_{n-3} \cdots \bar{y}_1 \underbrace{y_1 \cdots y_1}_{n-3}] y_1^{n-2} x],$$

откуда следует первое тождество первой пары.

Эквивалентность тождеств во второй и третьей парах доказывается аналогично. Лемма доказана.

До сих пор мы рассматривали тождества вида t = s, где t и s – непустые групповые слова. Однако, в теории групп часто встречаются тождества вида w = e, где e – символ пустого слова. Ясно, что каждое такое тождество эквивалентно некоторому тождеству вида t = s.

Для каждого группового тождества вида

$$t(x_1, \ldots, x_m) = e,\ \ x_i \in X \qquad \text{(i)}$$

определим три тождества сигнатуры $\{[\ ], ^-\}$ в том же алфавите X:

$$t^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-2}) = c, \qquad \text{(ii)}$$

где c определяется с помощью формулы (1);

$$\hat{t}^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y) = y; \qquad \text{(iii)}$$

$$\tilde{t}^{(n)}(x_1, \ldots, x_m, y) = \bar{y}. \qquad \text{(iiii)}$$

Пусть Λ – совокупность групповых тождеств вида (i). Если в Λ каждое тождество вида (i) заменить тождеством вида (ii) (соответственно вида (iii), вида (iiii)), то получим совокупность Λ(n) (соответственно $\hat{\Lambda}$ (n), $\tilde{\Lambda}$ (n)) тождеств сигнатуры $\{[\ ], ^-\}$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{X}$ – многообразие групп, определяемое совокупностью тождеств Λ. Тогда $\mathfrak{X}$(n) – многообразие n-арных групп, определяемое любой из совокупностей тождеств Λ(n), $\hat{\Lambda}$(n), $\tilde{\Lambda}$(n).

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ – многообразие n-арных групп, выделяемое в многообразии всех n-арных групп совокупностью тождеств $\Lambda(n)$.

Если $<A, [\,], ^- > \in \mathfrak{X}(n)$, то $<A, ⓐ, ^{-1_a}> \in \mathfrak{X}$ для любого $a \in A$. Так как $<A, ⓐ, ^{-1_a}>$ удовлетворяет любому тождеству $t = a$ из Λ, то $<A, ⓐ, ^{-1_a}>$ удовлетворяет всем тождествам вида $t ⓐ x = a ⓐ x$ или, что тоже самое $t ⓐ x = x$. Тогда по лемме 1, $<A, [\,], ^- >$ удовлетворяет любому тождеству $[t^{(n)} y_1^{n-2} x] = x$, а по лемме 3 и любому тождеству $t^{(n)} = c$ из $\Lambda(n)$, и поэтому $<A, [\,], ^- > \in \mathfrak{M}$, откуда $\mathfrak{X}(n) \in \mathfrak{M}$.

Пусть теперь $<A, [\,], ^- > \in \mathfrak{M}$, т.е. $<A, [\,], ^- >$ удовлетворяет любому тождеству $t^{(n)} = c$ из $\Lambda(n)$. Тогда по лемме 3, в $<A, [\,], ^- >$ выполняются тождества вида $[t^{(n)} y_1^{n-2} x] = x$, а по лемме 2 для любого $a \in A$ группа $<A, ⓐ, ^{-1_a}>$ удовлетворяет любому тождеству $t ⓐ x = x$ или, что тоже самое $t ⓐ x = a ⓐ x$, а значит и всем тождествам $t = a$ из Λ, т.е. $<A, ⓐ, ^{-1_a}> \in \mathfrak{X}$, откуда $<A, [\,], ^- > \in \mathfrak{X}(n)$. Таким образом, доказано включение $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}(n)$, а значит и равенство $\mathfrak{X}(n) = \mathfrak{M}$.

Для совокупностей $\hat{\Lambda}(n)$ и $\tilde{\Lambda}(n)$ доказательство проводится аналогично. Теорема доказана.

Так как многообразие $\mathfrak{A}$ определяется тождеством $x^{-1}z^{-1}xz = 1$, то имеет место

Следствие 5. Многообразие $\mathfrak{A}(n)$ всех полуабелевых n-арных групп выделяется в многообразии всех n-арных групп любым из следующих двух тождеств:

$$[y\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}y\bar{z}\underbrace{z\ldots z}_{n-3}x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}z] = y, \quad [\bar{y}\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}\bar{y}\bar{z}\underbrace{z\ldots z}_{n-3}x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}z] = \bar{y}.$$

Доказательство. По теореме 2, многообразие $\mathfrak{A}(n)$ определяется тождеством

$$[y\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}y\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}y\bar{z}\underbrace{z\ldots z}_{n-3}y\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}z] = y,$$

откуда, учитывая нейтральность последовательности $y\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}$, получаем требуемое первое тождество.

Второе тождество доказывается аналогично. Следствие доказано.

Замечание 2. Если n-арная группа $<A, [\,], ^- >$ удовлетворяет первому тождеству из следствия 5, то

$$[z\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}[y\bar{x}\underbrace{x\ldots x}_{n-3}y\bar{z}\underbrace{z\ldots z}_{n-3}x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}z]] =$$

$$= [z\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}y], \tag{5}$$

откуда получается уже известное тождество

$$[x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}z] = [z\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}x] \tag{6}$$

из следствия 1, определяющее многообразие $\mathfrak{A}(n)$.

Ясно, что из тождества (6) следует тождество (5), а из него в свою очередь следует первое тождество из следствия 5.

Таким образом, непосредственно доказана эквивалентность первого тождества из следствия 5 и тождества (6).

Так как многообразие $\mathfrak{B}_m(n)$ определяется тождеством $x^m = e$, то имеет место

Следствие 6. Многообразие $\mathfrak{B}_m(n)$ определяется любым из следующих двух тождеств:

$$[\underbrace{x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}\ldots x\bar{y}\underbrace{y\ldots y}_{n-3}}_{m-1}x] = y. \quad [\underbrace{x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}\ldots x\underbrace{y\ldots y}_{n-2}}_{m-1}x] = \bar{y}.$$

Следствие 7. Многообразие $\mathfrak{A}_m(n)$ определяется первыми (вторыми) тождествами из следствий 5 и 6.

Следствие 8. Если $\mathfrak{X}$ – конечно базируемое многообразие групп, то $\mathfrak{X}(n)$ – конечно базируемое многообразие n-арных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Gleichgewicht B., Glazek K.*** Remarks of n-groups as abstract algebras // Collg Math. 1967. Vol. 17, №2. S. 691-693.
2. ***Русаков С.А.*** Алгебраические n-арные системы. – Мн.: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
3. ***Dudek W.A.*** Varieties of poliadic groups // Filomat. 1995. 9:3. S. 657-674.
4. ***Гальмак А.М.*** Многообразие $\mathfrak{X}(n)$ // Веснік ВДУ імя П.М. Машэрава. – 2000. – №1(15). – С. 64-68.
5. ***Гальмак А.М.*** К определению класса $\mathfrak{X}(n)$ // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2000. – №2-3 (6). – С. 74-78.
6. ***Гальмак А.М.*** Теоремы Поста и Глускина-Хоссу. – Гомель, 1997. – 85 с.

SUMMARY

The systems of identities defining variety $\mathfrak{X}(n)$ of n-ary groups are given in the article.