УДК 511.36

В.Н. БОРБАТ

СОВМЕСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НУЛЯ ЗНАЧЕНИЯМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ В R^2

Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_o$ многочлен с целыми коэффициентами, H – его высота. В [1] доказана теорема о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах и их производных.

Теорема 1. Пусть $S(\varepsilon)$ – множество $x \in \mathrm{R}$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(x)| < H^{-n} \\ |P^{/}(x)| < H^{1-\varepsilon} \end{cases}, \tag{1}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$. Тогда $\mu S(\varepsilon) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$, где $\mu S(\varepsilon)$ мера Лебега множества $S(\varepsilon)$.

С помощью этой теоремы и ее обобщений доказывается регулярность распределения алгебраических чисел ограниченной степени, что приводит к неулучшаемым оценкам снизу размерности Хаусдорфа [2].

В настоящей работе производится обобщение теоремы 1.

Теорема 2. Система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-w_1}, \\ |P(\omega_2)| < H^{-w_2}, \\ |P\ (\omega_1)| < H^{1-\varepsilon}, \end{cases} \tag{2}$$

где $w_1 + w_2 = n-1$, при любом $\varepsilon > 0$ имеет для почти всех $(\omega_1, \omega_2) \in R^2$ лишь конечное число решений в многочленах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Теорема 2 позволяет построить регулярную систему векторов с действительными алгебраическими координатами и на основании этого получать оценки снизу для размерности Хаусдорфа. Метод, которым производится доказательство теоремы 2, основан на методе существенных и несущественных областей В.Г Спринджука [6] и был впервые использован в работе [9].

Приведем несколько лемм, которые необходимы для дальнейших рассуждений. Обозначения вводятся, как в [3].

Лемма 1. Пусть $G \subset R^2$ некоторая ограниченная область и $B \subset G$ измеримое множество на плоскости, $\mu B > c(n)\mu G$. Пусть далее для всех $(\omega_1, \omega_2) \in B$ верно неравенство $|P(\omega_1)P(\omega_2)| < H^{-w}, \deg P(x) \le n$. Тогда для всех $(\omega_1, \omega_2) \in B$ верно неравенство $|P(\omega_1)P(\omega_2)| < c(n)H^{-w}$.

Лемма 1 представляет собой аналог леммы 10 из [4] и доказана с помощью интерполяционной формулы Лагранжа в [9].

Лемма 2 Неравенство $|P(\omega_1)P(\omega_2)| < H^{-n+2-\delta}$ при любом $\delta > 0$ имеет для почти всех $(\omega_1, \omega_2) \in R^2$ лишь конечное число решений в приводимых целочисленных многочленах степени не выше *n*.

В системе неравенств (2) можно рассматривать лишь неприводимые многочлены *P(x)*, удовлетворяющие условию $a_n = H(P)$. Доказывается это традиционными средствами, как в [1].

Лемма 3. Пусть $\omega_1 \in S(x_{11}), \omega_2 \in S(x_{21}), P(x) \in P_n(H)$ и выполняется система неравенств (2). Тогда выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-w_1}, \\ |P(\omega_2)| < H^{-w_2}, \\ |P'(x_{11})| < c(n)H^{1-\varepsilon}. \end{cases} \qquad (3)$$

Доказательство. Из условия $a_n = H$ получаем $|\omega_1| \le 3$. Далее,

$$P'(\chi_{11}) = P'(\omega_1) + P''(\omega_1 + \theta(\omega_1 - \chi_{11})), |\theta| \le 1.$$

Поскольку $|\omega_1 - \chi_{11}| \le H^{-1-\frac{1}{n}}$, то $|P''(\omega_1 + \theta(\omega_1 - \chi_{11}))| < c(n)H$ и поэтому

$$|P''(\omega_1 + \theta(\omega_1 - \chi_{11}))(\omega_1 - \chi_{11})| < c(n)H^{-\frac{1}{n}}.$$

Понятно, что теперь теорему достаточно доказать для системы неравенств (3).

Лемма 4. Пусть $B(\delta, w_1, w_2)$ – множество вещественных векторов $\varpi = (\omega_1, \omega_2)$ для которых система неравенств (3) имеет бесконечное множество решений в многочленах $P(x) \in P_n(H)$ с условием $|x_i - x_j| > \delta$ для любых *i, j* и некоторого произвольного фиксированного $\delta > 0$. Тогда для любого δ имеем $\mu B(\delta, w_1, w_2) = 0$.

Доказательство. При фиксированном $P(x) \in P_n(H)$ любое $\omega_1 \in S(\chi_{11})$, для которого выполняется первое из неравенств (3) удовлетворяет неравенству

$$|\omega_1 - \chi_{11}| < c(n)\frac{|P(\omega_1)|}{H|\chi_{11} - \chi_{12}|\dots|\chi_{11} - \chi_{1n}|}.$$

Отсюда, используя условия леммы, получаем

$$|\omega_1 - \chi_{11}| < c(n)\delta^{-(n-1)}H^{-w_1-1}.$$

Аналогично для $\omega_2 \in S(\chi_{21})$, удовлетворяющих второму из неравенств системы (3), находим:

$$|\omega_2 - \chi_{21}| < c(n)\delta^{-(n-1)}H^{-w_2-1}.$$

Из двух последних неравенств получаем, что мера тех ϖ, для которых выполняется система неравенств (3), не превосходит $c(n)\delta^{-2(n-1)}H^{-n-1}$

Так как число многочленов $P(x) \in P_n(H)$, удовлетворяющих третьему неравенству (3), не превосходит $c(n)H^{n-\varepsilon}$, то суммарная мера ϖ, для которых (3) выполняется хотя бы для одного многочлена $P(x) \in P_n(H)$, не превосходит $c(n)\delta^{-2(n-1)}H^{-1-\varepsilon}$.

Далее применим лемму Бореля-Кантелли.

Лемма 5. Пусть $P(x) \in P_n(H)$, $\omega \in S(\chi_{11})$. Тогда:

$$|\omega - \chi_{11}| \le 2^n\frac{|P(\omega)|}{|P'(\chi_{11})|},$$

$$|\omega - \chi_{11}| \le \min(2^n\frac{|P(\omega)|}{|P'(\chi_{11})|}|\chi_{11} - \chi_{12}|\dots|\chi_{11} - \chi_{1j}|)^{\frac{1}{j}}.$$

Лемма 5 доказана в [6].

Доказательство теоремы разобьем на семь случаев.

Предложение 1. Если

$$l_2T^{-1} + p_1 \le w_1 + 1, \tag{4}$$

$$S_2T^{-1} + q_1 \le w_2 + 1, \tag{5}$$

$$n - 1 + 4n\varepsilon_1 < l_2T^{-1} + p_1 + S_2T^{-1} + q_1, \tag{6}$$

то мера тех (ω_1, ω_2), для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$, равна нулю.

Доказательство. Легко получить, что $|\omega_1| \le 3$, $|\omega_2| \le 3$. Разобьем квадрат [-3; 3]$\times$[-3; 3] на равные прямоугольники *K* со сторонами $H^{-w_1-1+p+\frac{\varepsilon_1}{2}}$ и $H^{-w_2-1-q_1+\frac{\varepsilon_1}{2}}$. Будем говорить, что многочлен *P(x)* принадлежит прямоугольнику *K*, если существует $(\omega_1, \omega_2) \in K$, что

$$|P(\omega_1)| < H^{-w_1}, |P(\omega_2)| < H^{-w_2}, |P'(\chi_{11})| < c(n)H^{1-\varepsilon}.$$

Если каждому прямоугольнику *K* принадлежит не более одного многочлена $P(x) \in P_t(\bar{s})$, то для доказательства предложения 1 достаточно применить лемму 5 и лемму Бореля-Кантелли.

В противном случае, если $P(x)$, $Q(x)$ из $P_t(\bar{s})$, не имеют общих корней, имеем, что модуль их результанта $|R(P,Q)| \geq 1$. Построив оценку сверху для $|R(P,Q)|$, придем к противоречию.

Предложение 2. Если выполнены (4), (5) и

$$3-\frac{\varepsilon}{2} \leq l_2T^{-1}+p_1+S_2T^{-1}+q_1 \leq n-1+4n\varepsilon_1, \tag{7}$$

то мера тех (ω_1, ω_2), для которых система неравенств (3) имеет бесконечное множество решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$, равна нулю.

Доказательство. Положим $k = n+1-l_2T^{-1}-p_1-S_2T^{-1}-q_1$ и предположим, что $\{k\} > \varepsilon$. Разобьем квадрат $[-3;3]\times[-3;3]$ на прямоугольники *K* со сторонами $H^{-l_2T^{-1}-(n+1)\varepsilon_1}$ и $H^{-s_2T^{-1}-(n+1)\varepsilon_1}$. Пусть $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_{Nk}(x)$ – многочлены, принадлежащие *K*. Если $N_k < c(n)H^{k-1-\frac{\varepsilon}{10}}$ для всех *K*, то для завершения доказательства применяем лемму 5 и лемму Бореля-Кантелли. Если существуют также *K*, что $N_k > c(n)H^{k-1-\frac{\varepsilon}{10}}$, то, используя принцип ящиков Дирихле, получим существование не менее $c(n)H^{\{k\}-0,1\varepsilon}$ многочленов $t_i(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$|t_i(\omega_1)| < c(n)H^{1-p_1-l_2T^{-1}-2l_1}, \deg t_i \leq n-[k],$$

$$|t_i(\omega_2)| < c(n)H^{1-q_1-S_2T^{-1}-2l_1}, H(t_i) \leq 2H. \tag{8}$$

Если среди многочленов $t_i(x)$ существуют хотя бы два без общих корней, то используя лемму 2 из [7], приходим к противоречию. Если среди многочленов $t_i(x)$ есть приводимые, то используем лемму 2. В случае, когда все $t_i(x) = a_i t(x), a_i \in Z$ для окончания доказательства достаточно применить метрическую теорему из [3]. Случай $0 \leq \{k\} \leq \varepsilon$ требует незначительных изменений, связанных с выбором параметров.

Предложение 3. Если выполнены (4), (5) и

$$\varepsilon < l_2T^{-1}+p_1+S_2T^{-1}+q_1 < 3-\frac{\varepsilon}{2}, \tag{9}$$

то мера тех (ω_1, ω_2), для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$ равна нулю.

Доказательство. Пусть $\sigma_1(P), \sigma_2(P), \tau_1(P), \tau_2(P)$ – множества вещественных (ω_1, ω_2), удовлетворяющих сооветственно неравенствам

$$|\omega_1 - \chi_{11}| < 2^n H^{-w_1} |P'(\chi_{11})|^{-1},$$

$$|\omega_2 - \chi_{21}| < 2^n H^{-w_2} |P'(\chi_{21})|^{-1},$$

$$|\omega_1 - \chi_{11}| < 2^n H^{-\alpha_1} |P'(\chi_{11})|^{-1},$$

$$|\omega_2 - \chi_{21}| < 2^n H^{-\alpha_2} |P'(\chi_{21})|^{-1},$$

где $\alpha_1 \le w_1, \alpha_2 \le w_2, \alpha_1 + \alpha_2 = 1 - \varepsilon_1, l_2 T^{-1} < 1 + \alpha_1 - \frac{\varepsilon}{5}, S_2 T^{-1} + q_1 < 1 + \alpha_2 - \frac{\varepsilon}{5}$.

Далее воспользуемся методом существенных и несущественных областей [6]. Неравенство (9) в случае несущественных областей позволяет перейти к многочленам $R(x)$ второй степени, высота которых не превосходит $c(n)|P'(\chi_{11})|$, если $|\chi_1(R) - \chi_2(R)| > \delta$, где $\delta > 0$ произвольное фиксированное число. Далее применим лемму 1. Если $|\chi_1(R) - \chi_2(R)| < \delta$, то все (ω_1, ω_2), для которых выполняется система неравенств (3) при $H > H_o(\delta)$ находятся от прямой $\omega_1 = \omega_2$ на расстоянии, не превосходящем $c(n)\delta$. Следовательно, множество указанных (ω_1, ω_2) имеет нулевую меру. В случае существенных областей, учитывая, что каждая точка $(\omega_1, \omega_2) \in [-3;3] \times [-3;3]$ принадлежит не более чем четырем существенным областям, применим лемму Бореля-кантелли.

Предложение 4. Если

$$l_2 T^{-1} + p_1 \le w_1 + 1, \tag{10}$$

$$S_2 T^{-1} + q_1 \le w_2 - 1 + 2n\varepsilon_1, \tag{11}$$

$$S_2 T^{-1} + q_1 \ge 2 - w_1 - (n-1)\varepsilon_1, \tag{12}$$

то мера тех (ω_1, ω_2), для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$, равна нулю.

Доказательство. Пусть $k = w_2 + 1 - S_2 T^{-1} - q_1$. Если $\{k\} > \varepsilon$, то положим $\sigma_1 = w_1 + 1 - p_1, \sigma_2 = S_2 T^{-1}, \nu = k - 1 - 0{,}1\varepsilon$ и рассуждаем как при доказательстве предложения 2. Случай $0 \le \{k\} \le \varepsilon$ требует незначительных изменений, связанных с выбором параметров.

Предложение 5. Если выполнены условия (10), (11) и

$$S_2 T^{-1} + q_1 < 2 - w_1 - (n-1)\varepsilon_1, \tag{13}$$

то мера тех (ω_1, ω_2), для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$, равна нулю.

Доказательство. Определим область $\sigma_1(P)$ и $\sigma_2(P)$ как в предложении 3. Пусть $\tau_1(P) = \sigma_1(P), \tau_2(P)$ – множество вещественных ω_2, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_2 - \chi_{21}| < 2^n H^{-1+w_1+\varepsilon_1} |P'(\chi_{21})|^{-1}.$$

Далее рассуждаем как при доказательстве предложения 3.

Предложение 6. Если выполнено условие (10) и

$$S_2T^{-1}+q_1<w_2+1, \tag{14}$$

то мера тех (ω_1,ω_2), для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)\in Z[x]$, равна нулю.

Предложение 6 доказано в [9].

Предложение 7. Если выполнено условие 10 и

$$w_2-1+2n\varepsilon_1<S_2T^{-1}+q_1\le w_2+1, \tag{15}$$

то мера тех (ω_1,ω_2), для которых система неравенств (3) имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x)\in Z[x]$, равна нулю.

Для доказательства предложения 7 необходимо объеденить рассуждения предложений 1-6.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Берник В.И.** Об одном свойстве целочисленных многочленов, реализующих теорему Минковского о линейных формах // Доклады АН БССР. – 1986. – Т.30. – №5. – С.403-405.
2. **Baker A., Schmidt W.** Diophantine approximation and Hausdorff dimension // Proc.London Math. Soc. 1970. – Vol.21. – №13. – P.1-11.
3. **Берник В.И.** Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов // Известия АН СССР. – Сер.мат. – 1980. – Т.44. – №1. – С.24-45.
4. **Берник В.И.** Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений // Acta Arithmetica. – 1983. – Т.4. – С.219-253.
5. **Берник В.И.** О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arithmetica. – 1989. – Т.53. – С.17-28.
6. **Спринджук В.Г.** Проблема Малера в метрической теории чисел. – Мн.: Наука и техника, 1967. – 194 с.
7. **Переверзева Н.А.** Совместное приближение нуля целочисленными взаимнопростыми многочленами в R^2 // Весці АН БССР. Деп. в ВИНИТИ. – 1984. – № 8095-84.
8. **Baker A.** On a theorem Sprindzuk // Proc.Royal Soc.London. – 1966. – Vol.A 292. – P92-104.
9. **Берник В.И., Борбат В.Н.** Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных полиномов. Труды математического института им. В.А.Стеклова. Аналитическая теория чисел и ее приложения. Сборник статей к 60-летию со дня рожд. проф. А.А.Карацубы. – М.: МАИК "Наука", 1997. – С.58-73.

SUMMARY

We investigate the metric characteristics of the sets R^2 where the absolute values of the integer polynomials and their derivatives satisfying Minkovsky theorem on linear forms approximate zero with given order.