МАТЭМАТЫКА, ФІЗІКА, БІЯЛОГІЯ

УДК 511.42

СВЯЗЬ МЕРЫ РЕЗОНАНСНЫХ МНОЖЕСТВ С ВЕЛИЧИНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТИ ДИОФАНТОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

В. И. Берник
доктор физико-математических наук, профессор
Институт математики НАН Беларуси
Н. В. Сакович
кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова
А. В. Гусева
преподаватель
Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова

Задача о мере Лебега множества $L_n(w)$ действительных чисел $x \in \mathbb{R}$, для которых неравество $|P(x)| < P(H)^{-w}$ имеет бесконечно много решений в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени n и высоты $H = H(P)$, берет свое начало с работы А.Я. Хинчина 1926 г. [1]. Его результаты обобщались и усиливались в статьях К. Малера, Б. Фолькмана, В.Г. Спринджука. В настоящее время неравенство $|P(x)| < P(H)^{-w}$ изучается в несколько другом виде: в правой части ставится величина Q^{-w}, $w > n$ при $Q \in \mathbb{N}$ и $H(P) \le Q$. Таким неравенствам удовлетворяют точки, в которых в задачах механики возникают резонансные явления. Эффективные оценки по Q и w в таких неравенствах получены Н. Будариной и О'Доннелом [2; 3; 4].

Для многочленов первой и второй степени решена задача о мере множества действительных чисел, в которой эти многочлены по модулю не превосходят заданной границы. Эти результаты улучшают недавние теоремы Н. Будариной и Х. О'Доннела.

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (1)$$

многочлен с целыми коэффициентами степени $\deg P = n$, высоты $H = H(P) = \max_{0 \le i \le n} |a_i|$, $I \subset \mathbb{R}$ интервал с мерой Лебега μI, $\#B$ количество элементов множества B. Будем использовать символ Виноградова $\ll$. Выражение $S \ll K$ означает, что $S < cK$ и c не зависит от величин S и K.

Пусть $\Psi(x)$ монотонно убывающая функция, заданная на $\mathbb{R}^+$. Обозначим через $L_n(\Psi)$ множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < \Psi(H)H^{-n+1} \tag{2}$$

имеет бесконечно много решений в многочленах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ вида (1).

В работах [5; 6] доказано, что

$$\mu L_n(\Psi) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H) < \infty, \\ \mu I, & \sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H) = \infty. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим частные случаи равенства (3), которые были доказаны значительно раньше. При $n = 1$ равенство (2) – знаменитая теорема Хинчина о приближении действительных чисел рациональными. Если $\Psi(H) = H^{-v}$, $v > 1$, то первое равенство в (2) доказал В.Г. Спринджук [7], решив тем самым проблему Малера [8]. Интересно обобщение задачи на немонотонные функции $\Psi(x)$ [9], на распределение сопряженных алгебраических чисел [10] и на приближение нуля значениями линейных комбинаций невырожденных функций [11; 12].

Придадим задаче (2) несколько другой вид. Возьмем достаточно большое число Q введем класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \le n,\ H(P) \le Q\}.$$

Используя принцип ящиков Дирихле [7; 13], для любого $x \in I$ найдется $c_1 = c_1(n, x)$ и полином $|P(\mathrm{x})| < c_1 Q^{-n}$, такой что

$$|P(\mathrm{x})| < c_1 Q^{-n}.$$

Однако уже при $w > n$ можно доказать [5; 7], что мера множества $M_n(w)$, решений неравенств

$$|P(x)| < Q^{-w}, P(x) \in \mathcal{P}_n(Q) \tag{4}$$

стремится к нулю при $Q \to \infty$. О скорости стремления величины $\mu M_n(Q)$ к нулю известно, что

$$\mu M_n(\mathrm{Q}) < c_2(n)\mathrm{Q}^{-\frac{w-n}{n}}. \tag{5}$$

В настоящей работе мы улучшаем результат (5) для $n \le 3$. Основной результат сформулируем в виде трех теорем. Для упрощения будем считать, что $I \subset [0,1)$.

Теорема 1. При $w > 1$ справедливо неравенство $\mu M_1(w) < LQ^{-w+1}$.

Доказательство. При фиксированных $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ множество $M_1(w)$ есть множество решений неравенства

$$|qx - p| < Q^{-w},\ 1 \le q \le Q. \tag{6}$$

Количество целых p, удовлетворяющих (6), не превосходит $q + 1$. Неравенство (6) можно переписать в виде

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<q^{-1}Q^{-w}. \tag{7}$$

Решения неравенства (7) – это интервалы $\left[\frac{p}{q}-q^{-1}Q^{-w},\ \frac{p}{q}+q^{-1}Q^{-w}\right]$, мера каждого из которых не превосходит $2q^{-1}Q^{-w}$.

Просуммируем эту величину по p и q:

$$2\sum_{1\le q\le Q}\sum_{0\le p\le q}q^{-1}Q^{-w}<4\sum_{1\le q\le Q}Q^{-w}=4Q^{-w+1}.$$

При доказательстве следующих теорем будут использованы три леммы.

Лемма 1 [5; 7]. Пусть выполняется неравенство (4) и α_1 – корень $P(x)$, ближайший к x. Тогда

$$|x-\alpha_1|<n|P(x)||P'(x)|^{-1}\le nQ^{-w}|P'(x)|^{-1}; \tag{8}$$

$$|x-\alpha_2|\le 2^{n-1}Q^{-w}|P'(\alpha_1)|^{-1}. \tag{9}$$

Лемма 2 [14]. Пусть $P(x),\ T(x)\in\mathcal{P}_n(Q)$ и не имеют общих корней. Если на некотором интервале J длины $\mu J=Q^{-\eta},\eta>0$ выполняется неравенство

$$\max(|P(x)|,|T(x)|)<Q^{-\tau},\ \ \tau>0,$$

то при любом $\delta>0$ и $Q>Q_0(\delta)$ верно неравенство

$$\tau+1+2\max(\tau+1-\eta,0)<2n+\delta.$$

Лемма 3 [7]. Если $P(x)=t_1(x)...t_k(x),$ то справедливы неравенства

$$c_2H(t_1)...H(t_k)<H(p)<c_3H(t_3)...H(t_k).$$

В работе [7] В.Г. Спринджук показал, в неравенстве (4) можно считать, что старший коэффициент полиномов $P(x)$ удовлетворяет неравенству $|a_n|>c_4H(P)$ и что все корни $\alpha_1,...,\alpha_n$ полиномов $P(x)$ удовлетворяют неравенству

$$|\alpha_j|<c_5,\ \ 1\le \mathrm{j}\le n. \tag{10}$$

Теорема 2. При $w>2$ верно неравенство

$$\mu M_2(w)<\begin{cases}c_6Q^{-w+2},\ \ 2<w<3\\ c_6Q^{-\frac{w-1}{2}},\ \ w>3\end{cases}$$

Доказательство. Из неравенств (4) и (9) имеем

$$|x-\alpha_1|<2Q^{-w}|P'(\alpha_1)|^{-1}=2Q^{-w}|D(P)|^{-\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

где $D(P) = a_1^2 + 4a_0a_2$ – дискриминант полинома $P(x) \in \mathcal{P}_2(Q)$. Будем различать два случая:

а) $D(P) \neq 0$,

б) $D(P) = 0$.

Рассмотрим первый случай. Из неравенства (11) следует, что

$$\mu M_2(w) \le 2Q^{-w} \sum_{|a_j| \le a, |k| \le 2} \left|a_1^2 - 4a_0a_2\right|^{-\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Зафиксируем в неравенстве (12) коэффициенты a_1, a_2 многочлена $P_2(x)$. Выражение $\left|a_1^2 - 4a_0a_2\right|$ при изменяющемся коэффициенте a_0 может принять наименьшее значение $b \neq 0$, $b < 2a_2$ только при одном a_0'. При других значениях $a_0' + 1,\ a_0' + 2,\ \ldots,\ a_0' + k_1;\ a_0' - 1,\ a_0' - 2,\ \ldots,\ a_0' - k_2$ значения $\left|a_1^2 + 4a_0a_2\right|$ будут удовлетворять неравенствам

$$\left|a_1^2 - 4(a_0' + \mathrm{j})a_2\right| > 2ja_2,\ 1 \le j < k_1 \le Q, \tag{13}$$

$$\left|a_1^2 - 4(a_0' - \mathrm{j})a_2\right| > 2ja_2,\ 1 \le j \le k_2 \le Q.$$

Из неравенств (12) и (13) следует:

$$\mu M_2(w) < 2\,\mathrm{Q}^{-w}\Big(\sum_{a_1, a_2} 1 + 2\sum_{1 \le k \le Q} k^{-\frac{1}{2}} a_2^{-\frac{1}{2}}\Big). \tag{14}$$

Воспользуемся неравенством

$$\sum_{1 \le k \le Q} k^{-\frac{1}{2}} < 2Q^{\frac{1}{2}},$$

получающимся при замене суммы определенным интегралом. Тогда (14) можно переписать в виде

$$\mu M_2(w) < 4\,\mathrm{Q}^{-w+2} + 8Q^{-w} a_2^{-\frac{1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} Q^2.$$

Учитывая неравенство $|a_2| > c_4 H$, получаем

$$\mu M_2(w) < \mathrm{c}_6\, Q^{-w+2}.$$

Тем самым первая оценка теоремы доказана.

Рассмотрим второй случай, когда $D(P) = 0$. Равенство $D(P) = 0$ означает, что полином $P(x)$ имеет кратный корень. Поэтому неравенство (4) можно переписать в виде

$$|P(\mathrm{x})| = |ax - b|^2 < Q^{-w},$$

$$|ax - b| < Q^{-\frac{w}{2}},\ |a| < Q^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Обозначим через M_2 меру тех $x \in I$, для которых неравенство (15) разрешимо хотя бы для одного полинома $P(x) \in \mathcal{P}_2(Q)$ с условием $D(P) = 0$. При фиксированных a и b мера решений неравенства (15) не превосходит $2Q^{-\frac{w}{2}}|a|^{-1}$. Последовательно имеем

$$\sum_{1 \le a \le Q^{\frac{1}{2}}} \sum_{1 \le b \le q} 2ba^{-1}Q^{-\frac{w}{2}} < \sum_{1 < a < Q^{\frac{1}{2}}} 4aQ^{-\frac{w}{2}} < 4Q^{-\frac{w}{2}}.$$

Из неравенства (11) с учетом последней оценки получаем, что

$$\mu M_2(w) < c_6 Q^{-\frac{w-1}{2}}, \ \ w > 3.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. При $w > 3$ справедливо неравенство

$$\mu M_3(w) \ll \begin{cases} Q^{-\frac{w-3}{2}}, \ 3 < w \le 5 \\ Q^{-\frac{w-2}{3}}, \ w > 5 \end{cases}.$$

Доказательство. Поделим интервал I на интервалы J длины $\mu J = Q^{-w_1+u}$, при некотором $w_1 > 2$, выбор которого будет сделан ниже. Величина u связана с производной многочлена $P(x)$ и определяется из неравенства

$$Q^{-u} < |P'(x)| < Q^{-n+\varepsilon}, \varepsilon > 0. \tag{16}$$

С помощью неравенства (16) весь диапазон значений $P'(x)$ можно разбить на $c_7\varepsilon^{-1}$ интервалов. Возьмем один из интервалов J_1, на котором выполняется неравенство (16).

Если в какой-то точке $x \in J_1$ выполнится неравенство $|P(x)| < Q^{-w}$, то для ближайшего к x корня α_1 полином $P(x)$ по лемме 1 верно неравенство

$$|x - \alpha_1| < n|P(x)||P'(x)|^{-1} \le nQ^{-w+n} \tag{17}$$

Рассмотрим все полиномы $P(x) \in \mathcal{P}_3(Q)$, для которых выполняется (17) хотя бы для одной точки $x \in J_1$. Обозначим через $P_1(x), \ldots, P_l(x), \ \ell = Q^{\theta}$ все полиномы $P(x) \in \mathcal{P}_3(Q)$, для которых выполняются неравенства (17). Разложим все полиномы $P_j(x), \ 1 \le j \le \ell$, на интервале J_1 в ряд Тейлора в корне $\alpha_1 = \alpha_{1j}$. Получим

$$P_j(x) = P(\alpha_{1j}) + P'(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j}) + \frac{1}{2}P''(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j})^2 + \frac{1}{6}P'''(\alpha_{1j})(x - \alpha_{1j})^3$$

Из оценок

$$|P'(\alpha_{1j})| \ll Q^{-n+\varepsilon}, |x - \alpha_{1j}| \ll Q^{-w_1+n},$$

$$\left|P''(\alpha_{1j})\right| \ll Q, \left|x-\alpha_{1j}\right|^2 \ll Q^{-2w_1+2n}$$

следует, что для всех точек $x \in J_1$ верно неравенство

$$\left|P_j(x)\right| \ll Q^{-w_1+\varepsilon} \tag{18}$$

при условиях

$$w_1 \geq 2n+1, \;\; q < \theta < 1+\varepsilon . \tag{19}$$

С учетом теоремы 2

$$\mu M_3(w) \ll \begin{cases} Q^{-w_1+2+\varepsilon}, & 2 < w_1 \leq 3 \\ Q^{-\frac{w_1-1+\varepsilon}{2}}, & w_1 > 3 \end{cases} \tag{20}$$

Из второго неравенства (19) следует, что $\ell \ll Q^{1+\varepsilon}$.

Так как справедливо неравенство

$$\#\{J \subset I\} \ll Q^{-w_2-u},$$

а множество решений неравенства $\left|P(x)\right| < Q^{-w}$ по лемме оценивается величиной $\ll Q^{-w+u}$, то мера множества тех $x \in I$, для которых справедливы неравенства $\left|P(x)\right| < Q^{-w}$ и (19), не превосходит

$$\mu B_2 \ll Q^{-w+n+w_1+n+\varepsilon+1} = Q^{-w+w_1+1+\varepsilon}. \tag{21}$$

Так как $\theta > 1$, то по принципу ящиков Дирихле среди ℓ полиномов $P_j(x)$ найдется c_8 полиномов, у которых старшие коэффициенты a_3 совпадают.

Рассмотрим два таких полинома

$$P_1(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$
$$P_2(x) = a_3x^3 + a_2'x^2 + a_1'x + a_0'.$$

Их разность $R(x) = P_2(x) - P_1(x)$ на всем интервале J_1 удовлетворяет неравенствам

$$\begin{gathered} \left|R(x)\right| = \left|b_2x^2 + b_1x + b_0\right| \ll Q^{-w_1+\varepsilon}, \\ b_j \leq 2Q, \;\; b_0 = a_0' - a_0, \;\; b_1 = a_1' - a_1, \;\; b_2 = a_2' - a_2 \end{gathered} \tag{22}$$

Применим к неравенству (22) теорему 2.

Получим (20). Оптимизируем неравенства (20) и (21) по w_1. При $2 < w < 3$ величину w_1 найдем из равенства

$$-w_1 + 2 + \varepsilon = -w + w_1 + 1 + \varepsilon,$$

$$w_1 = \frac{w+1}{2},$$

$$-w_1 + 2 + \varepsilon \equiv -\frac{w-3}{2},\ \ 3 < w < 5.$$

При $w_1 > 3$ величину w_1 найдем из равенства

$$-\frac{w_1 - 1}{2} = -w + w_1 + 1 + \varepsilon,$$

$$w_1 = \frac{w - 1 - \varepsilon}{2},$$

$$-\frac{w_1 - 1}{2} = -\frac{w-2}{3},\ \ w > 5,$$

что и доказывает теорему 3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Khintchine, A. J.*** Zurmetrischen Theorie der diophantischen Approximationen / A. J. Khintchine // Math. Zeitschr. – 1926. – Vol. 24. – P. 706–714.
2. ***Bernik, V. I.*** Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics / V. I. Bernik, N. V. Budarina, H. O'Donnell // 2013. Vol. 280, Suppl. 2. – P. 31–43.
3. ***Бударина, Н. В***. Зависимость количества алгебраических чисел на интервалах единичной длины от расположения интервала / Н. В. Бударина, Х. О. Доннелл, Н. В. Шамукова // Веснiк МДУ iмя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукi. – № 1(45). – 2015. – С. 37–43.
4. ***Бударина, Н. В.*** Теорема Хинчина и приближение нуля значения целочисленных многочленов в разных метриках / Н. В. Бударина, Х. Диккинсон, В. И. Берник // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 413, № 2. – С. 151–153.
5. ***Берник, В. И.*** О точном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arithmetica. – 1989. – Т. 53. – С. 17–28.
6. ***Береснeвич, В. В.*** Точный порядок приближения действительных чисел алгебраическими / В. В. Береснeвич // Доклады Российской Академии Наук. – 1999. – Т. 366, № 5. – С. 583–586.
7. ***Спринджук, В. Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск : Наука и техника, 1967. – 184 с.
8. ***Mahler, K.*** Über das Mass der Menge aller S-Zahlen / Mathematische Annalen. 106 – 1932 – P. 131–139.
9. ***Beresnevich, V. V.*** On a theorem of V. Bernik in the metric theory of Diophantine approximation / V V. Beresnevich // Acta Arith. – 2005. – 117/1. – P. 71–80.
10. ***Береснeвич, В. В.*** О распределении значений результантов целочисленных многочленов / В. В. Береснeвич, В. И. Берник, Ф. Гетце // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – 5 (54). – С. 21.
11. ***Bernik, V. I.*** Khintchine-type theorems on manifokls the convergence case for standard and multiplicative versions / V. I. Bernik, D. Kleinbock, G.A. Margulis // Internet. Marh. Res. Notices. – 2001. – P. 453–486.
12. ***Kleinbock, D. Y***. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds / D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // Ann. Math. – 1998. – 148. – P. 339–360.
13. ***Шмидт, В. М***. Диофантовы приближения / В. М. Шмидт. – М. : Мир, 1989. – 224 с.

Поступила в редакцию 07.10.2019 г.

Контакты: +375 222 63 43 44 (Сакович Наталья Владимировна)

Bernik V., Sakovich N., Guseva A. CONNECTION OF RESONANCE SET MEASURE WITH THE VALUE OF RIGHT-HAND SIDE OF DIOPHANTINE INEQUALITY.

The problem of Lebesgue's measure $L_n(w)$ *of a set of real numbers* $x \in \mathbb{R}$, *for which the inequality* $|P(x)| < P(H)^{-w}$ *has an infinite number of solutions in polynomials* $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *of n degree and* $H = H(P)$ *height, comes from the work of A.J. Khinchin of 1926 [1]. His results were summarized and amplified in the articles by K. Mahler, B. Folkman, V.G. Sprinjuk. Currently, the inequality* $|P(x)| < P(H)^{-w}$ *is studied in a slightly different form: in the right-hand side* Q^{-w}, $w > n$ *with* $Q \in \mathbb{N}$ *and* $H(P) \le Q$. *Such inequalities are satisfied by the points at which resonance phenomena arise in the tasks of mechanics. Effective estimates on Q and w in such inequalities have been obtained by N. Budarina and O'Donnell [2; 3; 4].*

For the first and second degree polynomials the problem of a measure of a set of real numbers is solved when the polynomials modulo do not exceed a given boundary. These results improve the recent theorems of N. Budarina and H. O'Donnell.

Keywords: polynomial root, algebraic numbers, diophane inequality system, approximation order, set coverage.