*Л.А. Латоцін, кандыдат педагагічных навук,
загадчык кафедры методыкі выкладання матэматыкі МДзУ імя А.А.Куляшова,
Б.Дз. Чабатарэўскі, кандыдат фізіка-матэматычных навук,
загадчык кафедры алгебры і геаметрыі МДзУ імя А.А.Куляшова*

Пра вучэбна-метадычны комплекс па матэматыцы для VIII класа

Разглядаемы вучэбна-метадычны комплекс для навучання матэматыцы ў VIII класе з'яўляецца арганічным працягам распрацаваных намі вучэбна-метадычных комплексаў для папярэдніх класаў. У яго ўваходзяць вучэбны дапаможнік, зборнік задач, зборнік самастойных работ, кантрольных работ і тэставых заданняў, а таксама кніга для настаўніка.

Гэты комплекс прызначаны для вывучэння матэматыкі як на базавым (4 тыднёвыя гадзіны), так і на павышаным (6 тыднёвых гадзін) узроўні. Павышаны ўзровень забяспечваецца як сістэмай практыкаванняў па тэмах праграмы для базавага ўзроўню, так і дадатковым тэарэтычным матэрыялам, што змешчаны ў пяці параграфах, пазначаных зорачкамі. Зразумела, што гэтыя матэрыялы вучэбнага дапаможніка могуць выкарыстоўвацца і ў звычайных класах для арганізацыі індывідуальнай работы.

У курсе матэматыкі VIII класа вылучаюцца тыя самыя змястоўныя кампаненты, што і ў папярэдніх класах — арыфметычны, алгебраічны і геаметрычны.

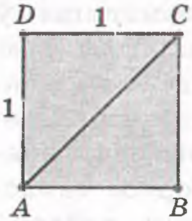
Арыфметычны кампанент у вучэбным дапаможніку прадстаўлены рэчаіснымі лікамі. У вучняў фарміруюцца пэўныя ўяўленні пра ірацыянальны лік, і яны даведваюцца, што рацыянальныя і ірацыянальныя лікі разам складаюць мноства рэчаісных лікаў. З ірацыянальным лікам вучні знаёмяцца праз дзеянне здабывання квадратнага кораня, якое ўводзіцца як дзеянне, адваротнае ўзвядзенню ў квадрат. Ніякая тэорыя рэчаісных лікаў у школе не разгортваецца. Аднак вучні павінны ўсвядоміць, што ў практычнай дзейнасці заўсёды можна рэчаісны лік замяніць яго дзесятковым набліжэннем з патрэбнай дакладнасцю. У VIII класе арыфметыка атрымлівае сваё пэўнае завяршэнне.

Алгебраічны кампанент у VIII класе ўключае пэўнае пашырэнне дзеянняў над рацыянальнымі выразамі, менавіта вучні знаёмяцца з раскладаннем на множнікі квадратнага трохчлена. Аб'ектам вывучэння становіцца новы від выразаў — ірацыянальныя выразы, але толькі з квадратнымі радыкаламі. Пашыраецца мноства ўраўненняў, якія павінны ўмець рашаць вучні: засвоіць алгарытм рашэння квадратнага ўраўнення і навучыцца рашаць ураўненні, зводныя да квадратных. Аб'ектам спецыяльнага вывучэння становяцца дачыненні няроўнасці паміж лікамі, разглядаюцца лінейная няроўнасць з адной зменнай і сістэма лінейных няроўнасцей з адной зменнай. На павышаным узроўні вывучаюцца ўраўненні і няроўнасці са зменнай пад знакам модуля, ірацыянальныя ўраўненні і няроўнасці.

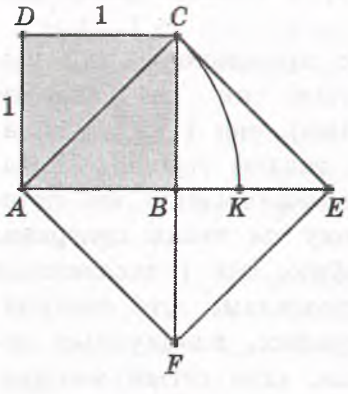
Геаметрычны кампанент у VIII класе ў параўнанні з папярэднімі класамі атрымлівае істотнае пашырэнне. Калі ў папярэднім навучанні геаметрычны матэрыял уводзіўся з прапедэўтычнымі мэтамі або калі гэта дыктавалася патрэбамі вывучэння арыфметычнага ці алгебраічнага матэрыялу, то цяпер ён становіцца аб'ектам спецыяльнага вывучэння. Вучні павінны ўсвядоміць, што геаметрычныя паняцці, якія яны будуць вывучаць у далейшым, абстрагаваныя ад уласцівасцей рэальных целаў. Аб'ектам вывучэння становяцца прыметы роўнасці трохвугольнікаў, з тым каб гэтымі прыметамі карыстацца ў далейшым пры доказах тэарэм і рашэнні задач. Вучні знаёмяцца з уласцівасцямі і прыметамі раўнабокага трохвугольніка, пачынаюць вывучэнне прамавугольнага трохвугольніка, атрымліваюць першае знаёмства з задачамі на пабудаванне.

Спынімся цяпер на асаблівасцях нашага вучэбнага дапаможніка. Адной з іх з'яўляецца тое, што ў ім ***арыфметычны, алгебраічны і геаметрычны кампаненты пададзены ў адзінстве.*** У гэтым сэнсе ён не адрозніваецца ад нашых дапаможнікаў для папярэдніх класаў. Аргументы на карысць такога пабудавання курса матэматыкі ў VIII класе наступныя. Знешняй пазаматэматычнай акалічнасцю, што падштурхнула нас да такой рэалізацыі праграмнага матэрыялу, аказалася тое, што на вывучэнне матэматыкі вучэбным планам прадугледжваецца 4 тыднёвыя гадзіны. Раздзяленне зместу на асобныя падручнікі алгебры і геаметрыі цягне за сабой вылучэнне двух асобных вучэбных прадметаў, на кожны з якіх адводзіцца па 2 тыднёвыя гадзіны, што робіць навучанне малаэфектыўным з-за вялікіх часавых прамежкаў паміж урокамі. Разам з гэтым пры дзвюх кнігах, асабліва напісаных рознымі аўтарамі, амаль не адлюстроўваюцца сувязі арыфметычнага, алгебраічнага і геаметрычнага кампанентаў курса, якія аб'ектыўна ёсць. Мы ўкажам толькі на самыя важныя з іх.

Значнае месца ў змесце школьнай матэматыкі займае вывучэнне велічынь, вымярэнне якіх патрабуе карыстання лікамі. З-за таго што большасць велічынь ёсць непарыўныя функцыі, іх абсяг значэнняў ёсць мноства рэчаісных лікаў. Таму натуральна ўвядзенне паняцця ірацыянальнага, а затым і рэчаіснага лікаў звязаць з разглядам такіх велічынь. У нашым дапаможніку для гэтай мэты выкарыстана даўжыня адрэзка. Ставіцца задача знайсці даўжыню дыяганалі квадрата са стараной 1 (рыс. 1). Тэарэма Піфагора дазваляе запісаць, што $AC^2 = AB^2 + BC^2$, або $AC^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. Да такога самага выніку мы прыходзім і праз пабудаванне. Калі на дыяганалі адзінкавага квадрата $ABCD$ пабудаваць новы квадрат $ACEF$ (рыс. 2), то можна заўважыць, што плошча гэтага квадрата ў два разы большая за плошчу квадрата $ABCD$, г. зн. роўная 2. З другога боку, гэтая плошча роўная AC^2. Таму $AC^2 = 2$. Затым паказваецца, што па лагічных меркаваннях не існуе рацыянальнага ліку, квадрат якога роўны 2. Гэта дазваляе заключыць, што $\sqrt{2}$ ёсць лік новай прыроды, і матывуе ўвядзенне ірацыянальных лікаў.



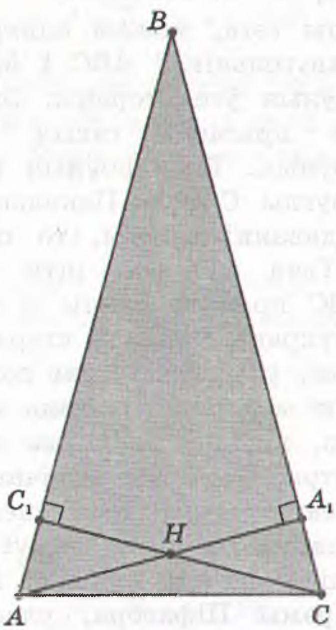
Рыс. 1



Рыс. 2

Такім чынам, мы бачым, што геаметрычныя ўяўленні вучняў — непарыўнасць даўжыні, тэарэма Піфагора — дазваляюць абгрунтаваць існаванне ірацыянальных лікаў. Лікі шырока выкарыстоўваюцца пры рашэнні тэкставых задач, разнастайных вылічэннях. Увядзенне ірацыянальных лікаў дазваляе даваць «дакладныя» адказы на тыя практыкаванні, у якіх раней з-за ірацыянальнасці адказу такое было немагчыма. Напрыклад, цяпер адказ на задачу аб знаходжанні даўжыні гіпатэнузы прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі 4 см і 6 см можна запісаць як $2\sqrt{13}$ см.

Сувязі алгебраічнага і геаметрычнага матэрыялу вельмі шырокія і разнастайныя. Многія ўласцівасці геаметрычных фігур і дачыненні паміж іх элементамі атрымліваюць формульныя выяўленні ўраўненнямі і няроўнасцямі. Гэтая формульнасць геаметрыі стварае моцны падмурак для выкарыстання ў ёй алгебраічных метадаў. Праілюструем сказанае прыкладамі.



Рыс. 3

Прыклад 1. Разгледзім рашэнне задачы 833 з вучэбнага дапаможніка: «Вышыні AA_1 і CC_1, праведзеныя да бакавых старон востравугольнага раўнабокага трохвугольніка ABC, перасякаюцца ў пункце H (рыс. 3). Знайдзіце вуглы і стораны трохвугольніка ABC, улічыўшы, што вугал AHC роўны 150°, а адрэзак CA_1 — 4 дм».

Спачатку знойдзем вуглы трохвугольніка ABC. Трохвугольнікі AA_1C і CC_1A роўныя, бо яны прамавугольныя з агульнай гіпатэнузай AC, а іх вуглы ACA_1 і CAC_1 роўныя як вуглы пры аснове AC раўнабокага трохвугольніка ABC. Таму вуглы CAA_1 і ACC_1 роўныя адзін аднаму. Гэта азначае, што ў трохвугольніку AHC два вуглы CAH і ACH роўныя, а таму трохвугольнік AHC з'яўляецца раўнабокім. Улічыўшы цяпер, што вугал AHC роўны 150°, знаходзім, што вуглы HAC і HCA роўныя па 15° кожны. З трохвугольніка AA_1C знаходзім, што вугал C роўны 75°. Значыць, вугал A таксама роўны 75°, а вугал B — 30°.

Знойдзем цяпер стораны трохвугольніка ABC. Паколькі вугал ACA_1 роўны 75°, а вугал ACC_1 — 15°, то вугал HCA_1 роўны 60°. Тады вугал CHA_1 роўны 30°. Улічыўшы, што катэт CA_1, які па ўмове роўны 4 дм, ляжыць супраць вугла ў 30°, атрымаем, што даўжыня гіпатэнузы HC роўная 8 дм. Гэта дазваляе знайсці даўжыню катэта HA_1:

$$HA_1 = \sqrt{HC^2 - CA_1^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} \text{ дм} = \sqrt{48} \text{ дм} = 4\sqrt{3} \text{ дм}.$$

Паколькі трохвугольнік AHC — раўнабокі з асновай AC, то яго бакавыя стораны HA і HC роўныя. Таму трохвугольнікі CHA_1 і AHC_1 роўныя, бо яны прамавугольныя і іхнія вуглы CHA_1 і AHC_1 вертыкальныя. Значыць, $HC_1 = HA_1 = 4\sqrt{3}$ дм. Тады

$$CC_1 = HC_1 + HC = 4\sqrt{3} \text{ дм} + 8 \text{ дм} = 4(\sqrt{3}+2) \text{ дм}.$$

Паколькі ў прамавугольным трохвугольніку CC_1B вугал B роўны 30°, то яго гіпатэнуза BC роўная $2CC_1$, г. зн. $8(\sqrt{3}+2)$ дм. Значыць, і AB роўная $8(\sqrt{3}+2)$ дм.

Нарэшце, знаходзім старану AC:

$$AC = \sqrt{CC_1^2 - AC_1^2} = \sqrt{\left(4\left(\sqrt{3}+2\right)\right)^2 + 4^2} \text{ дм} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+2\right)^2 + 1} \text{ дм} = 4\sqrt{3+4+4\sqrt{3}+1} \text{ дм} = 4\sqrt{8+4\sqrt{3}} \text{ дм} = 8\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ дм}.$$

Звяртаем увагу на тое, што пры знаходжанні вуглоў трохвугольніка выкарыстаны ўласцівасці прамавугольнага трохвугольніка, прыметы і ўласцівасці раўнабокага трохвугольніка і змястоўна рашаліся лінейныя ўраўненні, апошняе з якіх было наступным:

$$75^\circ + 75^\circ + \angle C = 180^\circ.$$

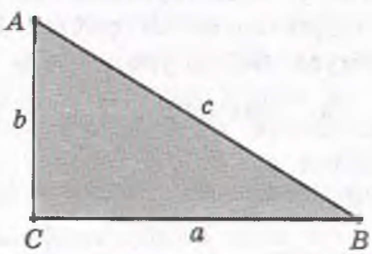
Адзначым, што змястоўнае рашэнне ўраўненняў дапамагае асэнсаванню алгебраічных фармалізмаў, што ў сваю чаргу пазбаўляе вучня ад механічнага завучвання адпаведных правілаў.

Пры знаходжанні старон былі выкарыстаны ўласцівасці раўнабокага трохвугольніка, уласцівасці і прыметы прамавугольнага трохвугольніка. Разам з гэтым рашалася квадратнае ўраўненне $HC^2 = HA_1^2 + CA_1^2$, знаходзіліся значэнні выразаў са зменнымі пры дадзеных значэннях зменных.

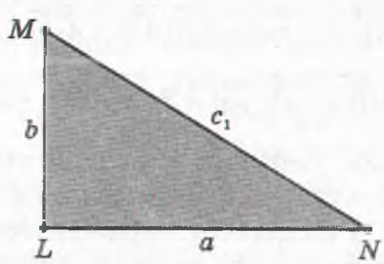
Прыклад 1 выразна паказвае, што рашэнне геаметрычнай задачы патрабуе спалучэння геаметрычных і алгебраічных ведаў і навыкаў.

Прыклад 2. Разгледзім доказ тэарэмы 12 з параграфа 26: «Калі квадрат большай стараны трохвугольніка роўны суме квадратаў дзвюх іншых старон, то такі трохвугольнік прамавугольны з прамым вуглом супраць большай стараны».

Няхай у трохвугольніку ABC стараны AB, BC, CA адпаведна роўныя c, a, b, AB — большая старана і $c^2 = a^2 + b^2$ (рыс. 4).



Рыс. 4



Рыс. 5

Пабудуем трохвугольнік LMN з прамым вуглом L, у якім катэты LN і LM роўныя a і b (рыс. 5). Тады па тэарэме Піфагора для даўжыні c_1 гіпатэнузы MN атрымаем: $c_1^2 = a^2 + b^2$.

З роўнасцей $c_1^2 = a^2 + b^2$ і $c^2 = a^2 + b^2$ вынікае, што $c_1^2 = c^2$. Гэтую роўнасць можна пераўтварыць так:

$$c_1^2 - c^2 = 0;\ (c_1 - c)(c_1 + c) = 0.$$

Паколькі c_1 і c — даўжыні адрэзкаў, то $c_1 + c > 0$. Тады

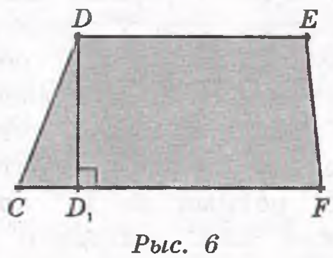
$$c_1 - c = 0, \text{ або } c_1 = c.$$

Улічыўшы гэта, можам сцвярджаць, што ў трохвугольнікаў ABC і MNL адпаведна роўныя ўсе стораны. Значыць, па трэцяй прымеце гэтыя трохвугольнікі роўныя. Таму роўныя і іх адпаведныя вуглы C і L. Паколькі вугал L па пабудаванні прамы, то прамы і вугал C. Гэта азначае, што трохвугольнік ABC прамавугольны з прамым вуглом C супраць большай стараны.

Як бачым, у прыведзеным доказе тэарэмы, якую можна разглядаць як задачу на доказ, таксама арганічна спалучаюцца геаметрычныя і алгебраічныя кампаненты. Геаметрычныя кампаненты наступныя: пабудаванне прамавугольнага трохвугольніка па яго катэтах, выкарыстанне тэарэмы Піфагора, уласцівасці даўжыні адрэзка, прыметы роўнасці трохвугольнікаў па трох старанах, сцверджанне пра роўнасць адпаведных элементаў роўных фігур. Алгебраічныя кампаненты такія: выкарыстанне ўласцівасцей дачынення роўнасці, формулы рознасці квадратаў, умовы роўнасці здабытку нулю, рашэнне лінейнага ўраўнення.

Разгледжаныя два прыклады ўзятыя з геаметрычных раздзелаў дапаможніка. Наступны прыклад узяты з алгебраічнага раздзела.

Прыклад 3. Разгледзім рашэнне задачы 182: «Вышыня DD_1 трапецыі $CDEF$ меншая за аснову DE у паўтара разы, а за аснову CF у два разы (рыс. 6). Ацаніце плошчу трапецыі, улічыўшы, што аснова DE меншая за 6 дм».



Рыс. 6

Няхай вышыня DD_1 роўная x. Тады асновы DE і CF адпаведна роўныя $1{,}5x$ і $2x$. Знаходзім плошчу S_{CDEF} трапецыі $CDEF$:

$$S_{CDEF} = \frac{DE + CF}{2} \cdot DD_1 = \frac{1{,}5x + 2x}{2} \cdot x =$$
$$= \frac{3{,}5x}{2} \cdot x = 1{,}75x^2.$$

Цяпер улічым другую ўмову пра тое, што аснова DE меншая за 6 дм, г. зн. $1{,}5x < 6$. Рэшым атрыманую няроўнасць:

$$1{,}5x < 6; \;\; x < 4.$$

Атрыманая няроўнасць дазваляе ацаніць велічыню S_{CDEF} зверху:

$$S_{CDEF} < 1{,}75 \cdot 4^2 = 28.$$

Для ацэнкі знізу ўлічым, што паколькі вышыня x трапецыі выражаецца дадатным лікам, то:

$$S_{CDEF} > 0.$$

Такім чынам,

$$0 < S_{CDEF} < 28.$$

Задача, разгледжаная ў прыкладзе 3, па матэматычным змесце алгебраічная, а па фабуле — геаметрычная.

Другой важнай асаблівасцю вучэбнага дапаможніка з'яўляецца **блочнасць падачы тэарэтычнага матэрыялу.** Увесь абавязковы праграмны матэрыял выкладзены ў 31 параграфе. Гэта азначае, што на вывучэнне параграфа адводзіцца не менш за тыдзень. Тэарэтычны матэрыял параграфа мэтазгодна разгледзець на адным уроку, з тым каб на наступных уроках праз рашэнне задач замацаваць новыя тэарэтычныя факты. Доказы, прыведзеныя ў тым ці іншым параграфе, не абавязкова ўсе развучваць. Іх трэба ўспрымаць як прыклады доказаў для вучняў. Уменні даказвання ў вучняў павінны фарміравацца паступова праз рашэнне задач як на доказ, так і на вылічэнне, бо рашэнне вылічальнай задачы, як бачна з разгледжаных вышэй прыкладаў, патрабуе выкарыстання тэарэтычных фактаў, правядзення абгрунтаванняў.

Адзначым, што правядзенне доказаў, разважанняў прадугледжваецца не толькі пры вывучэнні геаметрычных параграфаў, але і алгебраічных. У гэтым сэнсе выкананне алгебраічных практыкаванняў не павінна адрознівацца ад выканання геаметрычных практыкаванняў.

Прыклад 4. Рэшым практыкаванне 170 б): «Ведаючы, што m і n ёсць адвольныя лікі, вызначце, ці праўдзівае сцверджанне: б) калі $m > n$, то $m^3 > n^3$».

Па ўмове $m > n$. Няхай $n > 0$. Тады, з улікам умовы $m > n$, атрымаем, што $m > 0$. Па выніку 4 з параграфа 7 з умовы $m > n$ атрымліваем, што $m^3 > n^3$.

Няхай $n = 0$. Улічыўшы ўмову $m > n$, атрымаем, што $m > 0$. Значыць, $m^3 > 0$, а паколькі $n^3 > 0$, то $m^3 > n^3$.

Няхай $n < 0$. Тады m можа быць і адмоўным, і роўным нулю, і дадатным. Калі $m < 0$, то, памножыўшы ўмову $m > n$ на -1, па тэарэме 5 з параграфа 7 атрымаем $-m < -n$. Паколькі $-m$ і $-n$ — дадатныя лікі, то, прымяніўшы зноў вынік 4 з параграфа 7, атрымаем, што $(-m)^3 < (-n)^3$. Але $(-a)^3 = -a^3$, як здабытак трох адмоўных лікаў. Значыць, $-m^3 < -n^3$. Нарэшце, множанне апошняй умовы на -1 дае $m^3 > n^3$. Калі $m = 0$, то і $m^3 = 0$. Улічыўшы, што пры адмоўным значэнні n праўдзіцца няроўнасць $n^3 < 0$, атрымаем, што $m^3 > n^3$. Калі $m > 0$, то m^3 — дадатны лік, а паколькі n^3 — адмоўны лік, то $m^3 > n^3$. Такім чынам, калі $n < 0$, то няроўнасць $m^3 > n^3$ праўдзіцца пры любым значэнні m.

Адказ. Сцверджанне «Калі $m > n$, то $m^3 > n^3$» праўдзівае.

Яшчэ адной асаблівасцю вучэбнага дапаможніка з'яўляецца яго **багатая ілюстрацыйнасць.** Тэкст дапаможніка суправаджаюць 732 рысункі. Функцыі рысункаў розныя.

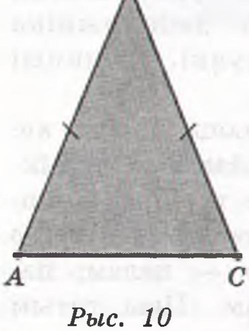
Адны рысункі выступаюць у ролі *натуральных рэчыўных мадэляў.* Напрыклад, у першым параграфе вучні знаёмяцца з паняццем геаметрычнай фігуры, з асноўнымі класамі фігур — целам, паверхняй, лініяй, пунктам. Пры гэтым змест параграфа скіраваны на тое, каб вучні ўсвядомілі, што гэтыя геаметрычныя паняцці адлюстроўваюць уласцівасці рэальных целаў. Геаметрычнае цела ўзнікае, калі з уласцівасцей прадмета ўлічваюцца толькі форма і памеры. Паверхня разглядаецца як абалонка цела, як плеўка без таўшчыні, лінія — як мяжа паверхні, як перасячэнне дзвюх паверхняў, пункт — як перасячэнне дзвюх ліній. Зразумела, што падобныя змястоўныя растлумачэнні павінны ілюстравацца адпаведнымі рысункамі. Так, напрыклад, шаравая форма ў вучэбным дапаможніку ілюструецца рысункамі рэальных прадметаў — мяча (рыс. 7), клубка нітак (рыс. 8), мыльнай бурбалкі (рыс. 9).


Рыс. 7

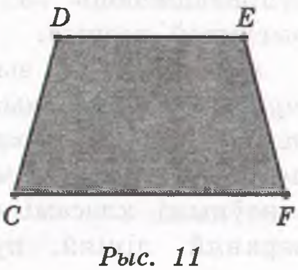

Рыс. 8


Рыс. 9

Шмат рысункаў выконваюць *дыдактычныя мэты*. Яны пашыраюць колькасць каналаў атрымання інфармацыі, паскараюць і паглыбляюць успрыманне вучэбнага матэрыялу і тым самым дапамагаюць зрабіць працэс навучання больш дынамічным. Напрыклад, у практыкаванні 9: «Як называецца лінія-адрэзак: а) AC у раўнабокім трохвугольніку ABC (рыс. 10); б) AB у раўнабокім трохвугольніку ABC (гл. рыс. 10); в) CF у трапецыі $CDEF$ (рыс. 11); г) CD у трапецыі $CDEF$ (гл. рыс. 11)», — выкарыстанне рысунка пазбаўляе ад выкарыстання доўгіх слоўных апісанняў тыпу «што з'яўляецца адной з непаралельных старон трапецыі» для апошняга задання.

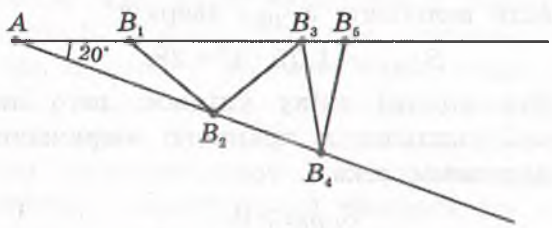


Рыс. 10



Рыс. 11

Некаторыя рысункі з'яўляюцца *неад'емнай часткай умовы*. Напрыклад, у практыкаванні **468** «На старанах вугла A велічынёй у $20°$ адзначаны пункты B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 так, што $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5$ (рыс. 12). Знайдзіце вуглы трохвугольніка: а) AB_4B_5; б) $B_1B_4B_5$» рысункам выражана частка ўмовы задачы пра тое, што пункты B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 выбіраюцца пачаргова то на адной, то на другой старане вугла.



Рыс. 12

Частка рысункаў адлюстроўваюць *сувязі матэматыкі з іншымі школьнымі прадметамі*. Задача **502**: «Алень высакародны (рыс. 13), казуля (рыс. 14), лань (рыс. 15), лось (рыс. 16) — млекакормнікі сям'і аленевых, што жывуць ці жылі на тэрыторыі нашай краіны. Даўжыня цела лані такая, што яна адносіцца да даўжыні цела аленя як 16 : 23, да даўжыні цела лася як 8 : 15, да даўжыні цела казулі як 32 : 27 і на 5 см меншая за рознасць даўжыняў целаў лася і казулі. Знайдзіце даўжыні целаў гэтых жывёл» адлюстроўвае сувязі матэматыкі з біялогіяй. У дапаможніку ёсць задачы і адпаведныя ілюстрацыі, што паказваюць прымяненне матэматыкі ў фізіцы, хіміі, геаграфіі, практычнай дзейнасці.

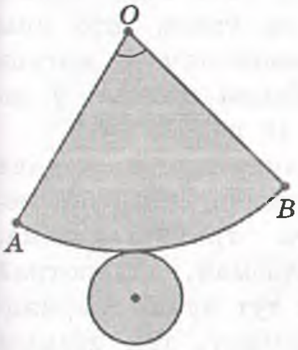
Частка задач і адпаведных рысункаў адлюстроўваюць *сувязі планіметрыі са стэрэаметрыяй*. Задача **896** «На рысунку 17 паказана разгортка конуса, плошча асновы якога складае 314 см^2, а вугал AOB разгорткі роўны $75°$. Знайдзіце ўтваральнік AO конуса» па сваёй фабуле стэрэаметрычная, а па метадзе рашэн-

Рыс. 13

Рыс. 14

Рыс. 15

Рыс. 16



Рыс. 17

ня — планіметрычная. Стэрэаметрычнасць задачы праяўляецца ў тым, што аб'ектам разгляду з'яўляецца прасторавы аб'ект — конус. Разам з гэтым паверхня конуса складаецца з круга і сектара, а гэта — планіметрычныя аб'екты. Таму зразумела, што для рашэння гэтай задачы дастаткова ўмець знаходзіць даўжыню акружнасці і плошчу круга. Па вядомай плошчы асновы конуса ў 314 см^2 знаходзім радыус асновы: 314 см$^2 = 3{,}14r^2$; $r^2 = 100$; $r = 10$ (см). Гэта дазваляе знайсці даўжыню акружнасці асновы: $2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8$ (см). Цяпер улічым, што даўжыня дугі сектара разгорткі бакавой паверхні конуса такая самая, як і даўжыня акружнасці асновы, г. зн. роўная 62,8 см. Ведаючы, што вугал разгорткі сектара роўны 75°, знаходзім даўжыню акружнасці, што адпавядае гэтаму сектару: $62{,}8 : 75 \cdot 360 = 301{,}44$ (см). Нарэшце, знаходзім утваральнік конуса: $301{,}44 : 2 \cdot 3{,}14 = 48$ (см).

Шэраг рысункаў з'яўляюцца *ілюстрацыямі да алгебраічных сцверджанняў*. Напрыклад, сцверджанне

$$\begin{cases} n \le -4 \text{ або } n \ge 6\dfrac{2}{3}, \\ -18 < n < 9, \end{cases}$$

якое ўзнікае пры рашэнні сістэмы няроўнасцяў $\begin{cases} |3n-4| \ge 16, \\ |2n+9| < 27, \end{cases}$ ілюструецца рысункам 18. Раздзяленне ўраўненняў на віды ілюструецца рысункам 19.

Рыс. 18

Ураўненні	
Цэлыя $2(x-2) = 5x - 3$ $3a^2 - 5a - 2 = 0$	$\sqrt{a} + 1 = 5$ $14 = \sqrt{x+11}$
Дробава-рацыянальныя $\dfrac{2}{3-y} - 1 = y + 4$ $\dfrac{b-6}{2b+3} = \dfrac{b+2}{b}$	$\sqrt{k^2+4} = k - 1$ $x + \sqrt{x} = \sqrt{x-3}$
Рацыянальныя	Ірацыянальныя

Рыс. 19

Важным патрабаваннем да падручніка ва ўмовах рэфармаванай школы з'яўляецца пабудаванне **сістэмы практыкаванняў, зарыентаванай на дзесяцібальную сістэму ацэньвання вучэбных дасягненняў вучняў**. У кожным параграфе практыкаванні на новую тэму ў асноўным прадстаўлены заданнямі першых трох узроўняў — пазнавання, неўсвядомлепага ўзнаўлення, узнаўлення на ўзроўні разумення. Практыкаванні на паўтарэнне, якія аддзелены ад практыкаванняў на новую тэму гарызантальнай рысай, адносяцца, як правіла, да трэцяга, чацвёртага, пятага ўзроўняў — узнаўлення на ўзроўні разумення, прымянення ведаў у знаёмай сітуацыі, пераносу ведаў у новую сітуацыю. Прыводзім у якасці прыкладаў па адным заданні на кожны ўзровень.

Заданне першага ўзроўню. 871. Ці з'яўляецца квадратным ураўненне: а) $3a^2-11a+7=0$; б) $-3x^2-13x+23=0$; в) $\frac{7}{12}m^2-234=0$; г) $10t-56=0$?

Заданне другога ўзроўню. 634. Вызначце, якім, рацыянальным ці ірацыянальным, з'яўляецца лік: а) 7; б) −12; в) 5,12; г) $-\frac{4}{19}$; д) 0; е) π; ж) $\sqrt{36}$; з) $\sqrt{44}$; і) $-\sqrt{4}$; к) $-\sqrt{1,96}$; л) $-\sqrt{4,34}$; м) −4,9(11).

Заданне трэцяга ўзроўню. 98. Праз вяршыню вугла ў 118° праведзена прамая, перпендыкулярная адной з яго старон. Знайдзіце вуглы, што ўтварае гэтая прамая з бісектрысай вугла.

Заданне чацвёртага ўзроўню. 173. Стораны трохвугольніка меншыя: адна — за 43 мм, другая — за 5 см 7 мм, трэцяя — за 78 мм. Дакажыце, што перыметр трохвугольніка меншы за 17 см 8 мм.

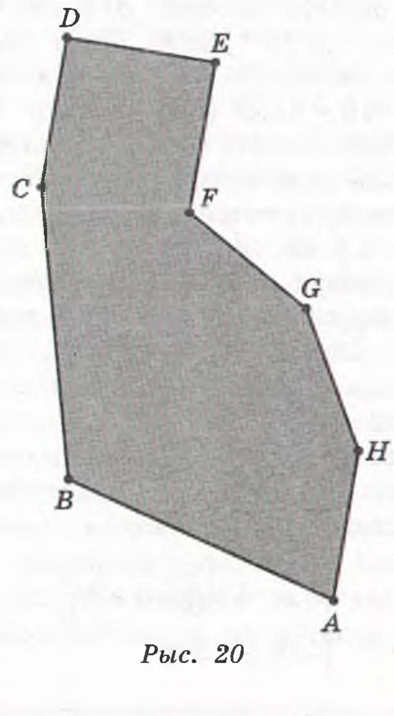
Заданне пятага ўзроўню. 221. Калі разгарнулі на плоскасць паверхню піраміды, асновай якой з'яўляецца квадрат, а бакавымі гранямі — раўнабокія трохвугольнікі, то ўтварыўся многавугольнік *ABCDEFGH* (рыс. 20), вугал *ABC* якога роўны 120°.

а) Знайдзіце вуглы гэтага многавугольніка.

б) Дакажыце, што пункты *E*, *G*, *H* ляжаць на адной прамой.

Нарэшце, спынімся на **ўзроўні строгасці выкладання тэарэтычнага матэрыялу.** З разважаннямі і доказамі вучні неаднаразова сустракаліся ў папярэднім навучанні. Але там у выкладанні пераважалі індуктыўныя падыходы. Індуктыўныя падыходы выкарыстоўваюцца і ў VIII класе, але тут істотна павялічваецца роля тэарэтычных абгрунтаванняў, вывадаў. У выкладанні як геаметрычнага, так і алгебраічнага матэрыялу тэарэтычныя факты афармляюцца як тэарэмы з адпаведнымі доказамі. Трэба, аднак, мець на ўвазе, што многія з доказаў, прыведзеныя ў вучэбным дапаможніку, не падлягаюць абавязковаму развучванню з вучнямі. Наогул, доказы, прыведзеныя ў дапаможніку, можна раздзяліць на тры групы: тыя, якія варта развучыць і ведаць; тыя, якія трэба зразумець; тыя, якія можна прапусціць, маючы на ўвазе, што яны прад'яўлены ў дапаможніку і могуць быць разабраныя асобнымі вучнямі ў залежнасці ад узроўню іх падрыхтоўкі.

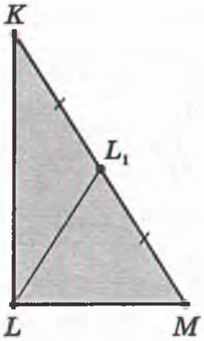
Прыкладам доказу, што пажадана развучыць, можа служыць доказ прыметы прамавугольнага трохвугольніка, што выражаецца тэарэмай, адваротнай тэарэме Піфагора, бо тут вучні знаёмяцца з новым відам доказу, так званым *доказам-рэканструкцыяй*, калі канструюецца новы аб'ект, для якога праўдзіцца сцверджанне, што даказваецца, а затым паказваецца, што дадзены і пабудаваны аб'екты роўныя. Прывядзём яшчэ адзін прыклад такога доказу.



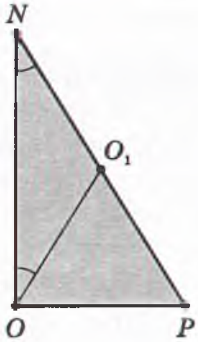
Рыс. 20

Прыклад 5. Дакажам, што ў прамавугольным трохвугольніку медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўная яе палавіне.

Няхай у прамавугольным трохвугольніку KLM з прамым вуглом L адрэзак LL_1 ёсць медыяна, праведзеная з вяршыні прамога вугла (рыс. 21). Дакажам, што адрэзак LL_1 роўны палавіне гіпатэнузы KM.



Рыс. 21



Рыс. 22

Пабудуем трохвугольнік NOP, у якім вугал O роўны вуглу L, а стораны OP і ON адпаведна роўныя адрэзкам LM і LK (рыс. 22). Ад праменя ON адкладзём вугал NOO_1, роўны вуглу ONP, пункт O_1 ляжыць на гіпатэнузе NP. Тады трохвугольнік NOO_1 з'яўляецца раўнабокім, г. зн. $OO_1 = NO_1$. Паколькі сумы $\angle NOO_1 + \angle POO_1$ і $\angle ONP + \angle OPN$ абедзве роўныя 90° і першыя складаемыя гэтых сум роўныя адно аднаму, то роўныя паміж сабой і другія складаемыя, г. зн. $\angle POO_1 = \angle OPN$. Значыць, трохвугольнік OPO_1, у якім два вуглы роўныя, з'яўляецца раўнабокім, а таму $OO_1 = O_1P$. Паколькі, па даказаным, $OO_1 = NO_1$, то $NO_1 = OO_1 = O_1P$, і, значыць, OO_1 — медыяна трохвугольніка NOP, якая роўная палавіне гіпатэнузы NP.

Цяпер улічым, што трохвугольнікі NOP і KLM роўныя адзін аднаму, таму медыяна LL_1, якая роўная медыяне OO_1, роўная палавіне гіпатэнузы KM.

Наогул, развучванню падлягаюць тыя доказы, якія пашыраюць вопыт доказвання або з'яўляюцца доказамі найбольш важных тэарэм курса.

Прыкладамі доказаў, якія трэба зразумець, але не варта развучваць, з'яўляецца доказ тэарэмы **2** з параграфа **13** пра дыяметр, перпендыкулярны да хорды, доказы прымет роўнасці трохвугольнікаў.

Прыкладамі доказаў, якія могуць быць прад'яўлены толькі асобным вучням, што праяўляюць асаблівую цікавасць да матэматыкі, з'яўляюцца доказы тэарэм **4** і **5** з параграфа **25**, якія паказваюць, што сказы пра суму вуглоў трохвугольніка і пра існаванне адзінай прамой, што праходзіць праз дадзены пункт паралельна дадзенай прамой, раўназначныя.

Адзначым, што ў нашым вучэбным дапаможніку курс геаметрыі не выбудоўваецца аксіяматычна. Лагічнае ўпарадкаванне пакуль што носіць лакальны характар на ўзроўні маленькіх тэорый — раўнабокага трохвугольніка, прамавугольнага трохвугольніка, паралельных прамых. Пазнаёміць вучняў з лагічнай будовай геаметрыі мы плануем у канцы дзесятага класа. Да таго асноўнай мэтай з'яўляецца змястоўнае засваенне курса геаметрыі. Лепш, каб вучні ведалі доказы невялікай колькасці тэарэм, але ведалі іх з сапраўдным разуменнем. Прыводзімыя доказы павінны спачатку разглядацца як практыкаванні па правядзенні доказаў, а ўжо потым як тое, што трэба запомніць і ведаць. Каб навучыцца даказваць, вучні, па-першае, павінны разабрацца ў прыводзімых доказах, зразумець іх. Па-другое, вучні павінны набываць вопыт доказвання праз рашэнне дастатковай колькасці задач на доказ: намнога больш карысна і прыемна самому дадумацца хаця б да невялікага вываду, чым завучваць разважанні, кімсьці прыдуманыя. Укажам яшчэ, што навучанне разважанням, доказам адбываецца не толькі на геаметрычным матэрыяле. У нашым дапаможніку прапануецца дастатковая колькасць практыкаванняў на доказ і на алгебраічным матэрыяле.

1. Десятибалльная система оценки результатов учебной деятельности учащихся: Инструктивно-метод. материалы / Под ред. О. Е. Лисейчикова. — Мн.: НИО, 2002. — 400 с.