РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

Могилев 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А.А. Кулешова»

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

Учебно-методические материалы

Составители:
Л.В. Лещенко, Т.В. Гостевич

им. А.А. Кулешова

Могилев 2012

Электронный аналог печатного издания:

Расширение понятия о числе
Сост.: Лещенко Л.В., Гостевич Т.В.
Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2012. – 60 с. : ил.

Учебно-методические материалы направлены на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов. Содержатся теоретические сведения, методически подобранные наборы задач для аудиторных и домашних заданий по следующим разделам: положительные рациональные числа, операции над положительными рациональными числами, свойства множества положительных рациональных чисел, десятичные дроби и действия над ними, преобразование обыкновенных дробей в десятичные, бесконечные периодические десятичные дроби, положительные действительные числа, действительные числа, величины и их измерение.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1

Расширение понятия о числе: [Электронный ресурс]: учеб.-метод. мат-лы / сост.: Л.В. Лещенко, Т.В. Гостевич – Электр. данные. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2012. – Загол. с экрана.

212022, г. Могилев,
ул. Космонавтов, 1
Тел.: 8-0222-28-31-51
E-mail: alexpzn@mail.ru
http://www.msu.mogilev.by

Тема 1. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

1.1 Положительные рациональные числа

Мы рассмотрим следующие расширения числовых множеств:

$$\mathbf{N} \to \mathbf{Q}_+ \to \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}.$$

Они основаны на рассмотрении процесса измерения длины отрезка.

Выберем некоторый отрезок e и назовем его единичным отрезком или единицей измерения длины. Если отрезок a можно разбить на n отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку e, то будем говорить: **отрезок *a* кратен отрезку *e***, и назовем ***n*** мерой или значением длины отрезка a при единичном отрезке e.

Обозначать это будем так: $m_e(a) = n$ или $m(a) = n$.

Определение. **Дробным числом (или обыкновенной дробью)** называется пара натуральных чисел (s, n), одно из которых (n) называется знаменателем и показывает, на сколько равных частей разделили единичный отрезок, а второе (s) называется числителем и показывает, сколько взяли таких частей. Пару чисел (s, n) обычно записывают в виде $\frac{s}{n}$.

Если $a = \frac{p}{n} \cdot e$, то говорят, что **отрезок *a* соизмерим с отрезком *e***.

Определение. Две дроби называются **равными** тогда и только тогда, когда они выражают длину одного и того же отрезка.

Обозначение: $\frac{p}{n} = \frac{t}{q}$.

Признак. Две дроби $\frac{p}{n}$ и $\frac{t}{q}$ являются равными тогда и только тогда, когда выполняется равенство $p \cdot q = n \cdot t$.

Основное свойство обыкновенных дробей.

Если числитель и знаменатель данной дроби умножить (или разделить) на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

Основное свойство дробей дает возможность выполнять такие преобразования, как:

1) сокращение дроби — замену этой дроби другой, равной ей дробью с меньшими числителем и знаменателем;

2) приведение дробей к общему знаменателю — замена данных дробей равными им дробями, которые имеют одинаковые знаменатели.

Отношение равенства дробей рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Определение. **Положительным рациональным числом** называется множество (класс) равных между собой обыкновенных дробей.

Определение. Дробь, у которой числитель и знаменатель взаимно просты, называется **несократимой.**

Теорема. Для любого положительного рационального числа a (т.е. для любого множества равных дробей) существует одна и только одна представляющая его несократимая дробь.

Пример 1. Найдите такое x, что $\frac{3}{x} = \frac{9}{6}$.

Решение. Чтобы дроби $\frac{3}{x}$ и $\frac{9}{6}$ были равны, должно выполняться равенство $3 \cdot 6 = 9x$; $18 = 9x$; $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 2. Сократите дробь $\frac{78}{650}$.

Решение. Чтобы заменить данную дробь равной ей несократимой дробью, найдем НОД (78; 650). НОД (78; 650) = 26 (могут использоваться 2 способа нахождения НОД (a, b): используя разложения чисел на простые множители и с помощью алгоритма Евклида). Тогда имеем:

$$\frac{78}{650} = \frac{3 \cdot 26}{25 \cdot 26} = \frac{3}{25}$$

Пример 3. Приведите к общему знаменателю дроби: $\frac{3}{4}$; $\frac{14}{21}$; $\frac{4}{5}$.

Решение. Проверим дроби на сократимость. Дробь $\frac{14}{21}$ сократима. $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. Поставленную задачу решим относительно дробей $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$. Найдем НОК (4; 3; 5) = 60. Вычислим дополнительные множители делением наименьшего общего знаменателя на знаменатели дробей: 60 : 4 = 15, 60 : 3 = 20, 60 : 5 = 12.

Итак, три дроби $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$ соответственно равны исходным дробям и имеют равные знаменатели.

Задания

1. Даны отрезки AB, CD и EF. Найдите длину отрезков AB и CD, считая отрезок EF единичным.

2. Данный отрезок имеет длину 1. Постройте отрезки, которые равны соответственно $3e$, $1\frac{1}{3}\ e$, $\frac{3}{2}\ e$. Каким будет значение длины каждого из построенных отрезков, если единичным отрезком будет:

а) $\frac{1}{3}\ e$, б) $3e$, в) $\frac{3}{2}\ e$?

3. Покажите, как в процессе измерения длины отрезка могут быть получены дроби: а) $\frac{1}{4}$, б) $\frac{7}{5}$, в) $6\frac{3}{4}$.

4. Найдите такое x, что:

а) $\frac{12}{17}=\frac{x}{51}$; б) $\frac{11}{12}=\frac{33}{x}$; в) $\frac{87}{x}=\frac{29}{30}$.

г) $\frac{x}{13}=\frac{6}{78}$; д) $\frac{1}{x}=\frac{x}{4}$; е) $\frac{5+x}{8+x}=\frac{5}{8}$.

5. Проверьте, что дроби $\frac{an}{bn}$ и $\frac{am}{bm}$, где $m\neq 0,\ n\neq 0,\ b\neq 0$ равны.

6. Найдите дробь со знаменателем 111111, равную дроби $\frac{84}{37}$.

7. Для дроби $\frac{a}{b}$ укажите равную ей дробь с числителем q, если:

а) $\frac{a}{b}=\frac{4}{15}$, $q = 60$; б) $\frac{a}{b}=\frac{23}{24}$, $q = 96$; в) $\frac{a}{b}=\frac{7}{17}$, $q = 119$.

8. Для дроби $\frac{a}{b}$ укажите равную ей дробь со знаменателем p, если:

а) $\frac{a}{b}=\frac{4}{15}$, $p = 36$; б) $\frac{a}{b}=\frac{23}{24}$, $p = 69$; в) $\frac{a}{b}=\frac{7}{17}$, $p = 119$.

9. Найдите дробь, равную дроби $\frac{m}{n}$, такую, чтобы разность между числителем и знаменателем была равна k:

а) $\frac{m}{n}=\frac{4}{7}$, k = 30; б) $\frac{m}{n}=\frac{1}{8}$, $k = 14$; в) $\frac{m}{n}=\frac{11}{15}$, $k = 32$.

10. Сократите дроби двумя способами:

а) $\frac{48}{60}$; б) $\frac{24}{120}$; в) $\frac{180}{240}$; г) $\frac{135}{270}$; д) $\frac{288}{424}$; е) $\frac{475}{575}$; ж) $\frac{444}{732}$.

11. Сократите дроби, находя НОД по алгоритму Евклида:

а) $\frac{37}{999}$; б) $\frac{78}{650}$; в) $\frac{1415}{1981}$; г) $\frac{947}{1009}$; д) $\frac{5328}{12672}$; е) $\frac{5940}{13860}$.

12. Сократите дроби наиболее удобным способом:

а) $\frac{282}{1692}$; б) $\frac{1116}{8370}$; в) $\frac{828}{4292}$; г) $\frac{680}{1700}$; д) $\frac{720}{972}$; е) $\frac{474}{790}$; ж) $\frac{646}{874}$; з) $\frac{336}{640}$.

13. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{7}{16},\frac{5}{8},\frac{11}{48}$; б) $\frac{3}{2},\frac{3}{7},\frac{4}{5}$; в) $\frac{5}{18},\frac{4}{27},\frac{1}{6}$; г) $\frac{4}{11},\frac{5}{121},\frac{3}{5},\frac{9}{10}$;

д) $\frac{88}{315},\frac{203}{270}$; е) $\frac{13}{21},\frac{17}{27},\frac{31}{33}$; ж) $\frac{88}{323},\frac{101}{969},\frac{2305}{1615},\frac{1323}{2261}$.

14. Приведите дроби к наименьшему общему числителю:

а) $\frac{4}{7},\frac{2}{3},\frac{8}{15}$; б) $\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{9}$; в) $\frac{8}{9},\frac{15}{16},\frac{40}{43}$; г) $\frac{36}{41},\frac{32}{35},\frac{24}{29}$.

15. Докажите, что при любом натуральном n дробь $\frac{10^n+2}{10^n+8}$ сократима на 6.

16. Дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Будет ли сократимой дробь $\frac{mn}{n+n}$ ($n\in N$)? Почему?

17. Дана дробь $\frac{29}{64}$. Какое число надо отнять от числителя и знаменателя этой дроби, чтобы получить дробь $\frac{9}{8}$?

18. Пусть $X = \{1, 2, 3, 6, 7\}$. Составьте и назовите:

а) все возможные правильные дроби;

б) все возможные неправильные дроби.

19. Пусть $X = \{6, 1, 2\}$ и $Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ Сколько можно образовать разных дробей $\frac{x}{y}$? Сколько при этом получится различных положительных рациональных чисел?

20. На множестве дробей $\left\{\frac{5}{7}, \frac{25}{35}, \frac{4}{7}, \frac{12}{21}, \frac{15}{21}, \frac{1}{7}\right\}$ задано отношение равенства. Перечислите все пары дробей, находящихся в этом отношении. Постройте граф заданного отношения. Сколько положительных рациональных чисел задано с помощью данного множества дробей?

21. Выясните, изображают одно и то же или различные положительные рациональные числа две дроби:

а) $\frac{5}{7}$ и $\frac{25}{35}$; б) $\frac{3}{7}$ и $\frac{21}{49}$; в) $\frac{14}{17}$ и $\frac{42}{53}$; г) $\frac{14}{3}$ и $\frac{42}{9}$.

22. Назовите несколько дробей, принадлежащих тому же классу эквивалентных дробей, которому принадлежит дробь $\frac{7}{12}$.

23. Назовите несколько дробей, которые задают то же положительное рациональное число, что и дробь а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{2}{7}$.

24. Покажите с помощью диаграммы отношение между множествами натуральных и положительных рациональных чисел. Расставьте на этой диаграмме числа, которые записываются следующим образом: 105, $\frac{2}{15}$, $30\frac{7}{8}$, 0, $\frac{14}{7}$, $\frac{19}{7}$.

1.2 Операции над положительными рациональными числами

Определение. **Суммой** положительных рациональных чисел a и b, записанных с помощью дробей $\frac{p}{n}$ и $\frac{t}{n}$, называется положительное рациональное число, которое записывается дробью $\frac{p+t}{n}$, т.е. $\frac{p}{n} + \frac{t}{n} = \frac{p+t}{n}$.

Если дроби имеют разные знаменатели, то их предварительно приводят к наименьшему общему знаменателю.

Свойства сложения.

1. $\forall\ a, b \in Q_+\ (a + b = b + a)$ (коммутативность)
2. $\forall\ a, b, c \in Q_+\ ((a + b) + c = a + (b + c))$ (ассоциативность)

3. $\forall\ a, b, c \in Q_+$ $(a + c = b + c \supset a = b)$ (сократимость)

4. $\forall\ a, b, c \in Q_+$ $(a < b \supset a + c < b + c)$ (монотонность)

5. $\forall a, b \in Q_+$ $(a + b \neq a)$ (во множестве Q_+ нет нейтрального элемента по сложению)

Определение. Если существует такое $c \in Q_+$ что $a = b + c$, то число c называется **разностью** чисел a и b и обозначается $a - b$.

Разностью положительных рациональных чисел a и b, записанных с помощью дробей $\frac{p}{n}$ и $\frac{t}{n}$, является положительное рациональное число, которое записывается дробью $\frac{p-t}{n}$, т.е. $\frac{p}{n} - \frac{t}{n} = \frac{p-t}{n}$.

Определение. **Произведением** положительных рациональных чисел a и b, записанных с помощью дробей $\frac{p}{n}$ и $\frac{q}{t}$, называется положительное рациональное число, которое записывается дробью $\frac{pq}{nt}$, т.е. $\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{t} = \frac{p \cdot q}{n \cdot t}$

Свойства умножения.

1. $\forall a,b \in Q_+$ $(ab = ba)$ (коммутативность)

2. $\forall\ a, b, c \in Q_+$ $(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b)\ c)$ (ассоциативность)

3. $\forall\ a, b, c \in Q_+$ $(a \cdot (b + c) = ab + ac)$ (дистрибутивность относительно сложения)

4. $\forall\ a, b, c \in Q_+$ $(a > b \supset a \cdot (b - c) = ab - ac)$ (дистрибутивность относительно вычитания)

5. $\forall a, b, c \in Q_+$ $(ac = bc \supset a = b)$ (сократимость)

6. $\forall a \in Q_+$ $(a \cdot 1 = a)$ (число 1 является нейтральным элементом относительно умножения в Q_+).

Определение. **Частным** положительных рациональных чисел a и b называется такое положительное рациональное число c, которое в произведении с числом b дает число a.

$$a : b = c \equiv c \cdot b = a$$

Частным положительных рациональных чисел a и b, записанных с помощью дробей $\frac{p}{n}$ и $\frac{q}{t}$, является положительное рациональное число, которое записывается дробью $\frac{p \cdot t}{n \cdot q}$, т.е. $\frac{p}{n} : \frac{q}{t} = \frac{p \cdot t}{n \cdot q}$.

Сумма, разность, произведение и частное положительных рациональных чисел не зависит от выбора представляющих их дробей.

Пример 4. Доказать коммутативность сложения положительных рациональных чисел.

Доказательство. Пусть положительное рациональное число a представимо дробью $\frac{p}{q}$, положительное рациональное число b представимо дробью $\frac{t}{q}$.

Тогда $a + b$ представимо дробью $\frac{p+t}{q}$, $b + a$ представимо дробью $\frac{t+p}{q}$.

Но числа p, t, $q \in$ N, поэтому $p + t = t + p \Rightarrow (p + t)q = q(t + p) \Rightarrow$ (по признаку равенства дробей) $\frac{p+t}{q} = \frac{t+p}{q}$. Значит, эти дроби являются записями одного и того же положительного рационального числа. Следовательно, $a + b = b + a$, что и требовалось доказать.

Пример 5. Докажите, что $\frac{p}{n} + \frac{0}{t} = \frac{p}{n}$.

Решение. $\frac{p}{n} + \frac{0}{t} = \frac{p \cdot t + 0 \cdot n}{n \cdot t} = \frac{p \cdot t}{n \cdot t}$, значит $\frac{p}{n} + \frac{0}{t} = \frac{pt}{nt}$.

По основному свойству обыкновенных дробей $\frac{pt}{nt} = \frac{p}{n}$.

Так как $\frac{p}{n} + \frac{0}{t} = \frac{pt}{nt}$ и $\frac{pt}{nt} = \frac{p}{n}$, то $\frac{p}{n} + \frac{0}{t} = \frac{p}{n}$ в силу транзитивности отношения равенства дробей.

Пример 6. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{2}{5} - \frac{1 - \frac{1}{20} \cdot 5}{3}\right) \cdot 8$; б) $\frac{\left(1\frac{1}{5} : \frac{3}{5} - 1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}\right) : 1\frac{1}{7}}{\left(1\frac{1}{2} + 3 \cdot 1\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{5}}$.

Решение. Покажем 2 способа вычисления значений выражения: по отдельным действиям и последовательным вычислением (преобразованием) всего выражения.

а)

1) $\frac{1}{20} \cdot 5 = \frac{1 \cdot 5}{20} = \frac{1}{4}$;

2) $1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$;

3) $\frac{3}{4} : 3 = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4}$;

4) $\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20}$;

5) $\frac{3}{20} \cdot 8 = \frac{3 \cdot 8}{20} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$.

б) $\frac{\left(1\frac{1}{5} : \frac{3}{5} - 1\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10}\right) : 1\frac{1}{7}}{\left(1\frac{1}{2} + 3 \cdot 1\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{10}\right) : \frac{8}{7}}{\left(1\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\left(\frac{6 \cdot 5}{5 \cdot 3} - \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 10}\right) \cdot \frac{7}{8}}{\left(1\frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 4}{3}\right) \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\left(2 - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{7}{8}}{\left(1\frac{1}{2} + \frac{3 \cdot 4}{3}\right) \cdot \frac{2}{5}} =$

$= \frac{\left(\frac{10}{5} - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{7}{8}}{\left(1\frac{1}{2} + 4\right) \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{8}{5} \cdot \frac{7}{8}}{5\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{8}{5} \cdot \frac{7}{8}}{\frac{11}{2} \cdot \frac{2}{5}} = \frac{\frac{8 \cdot 7}{5 \cdot 8}}{\frac{11 \cdot 2}{2 \cdot 5}} = \frac{\frac{7}{5}}{\frac{11}{5}} = \frac{7}{5} : \frac{11}{5} = \frac{7 \cdot 5}{5 \cdot 11} = \frac{7}{11}$.

Ответ: $1\frac{1}{5}$, $\frac{7}{11}$.

Пример 7. Вычислите рациональным способом и объясните, какие законы сложения и умножения рациональных чисел при этом были использованы:

а) $3\frac{17}{23}+5\frac{13}{15}+7\frac{6}{23}$;

б) $1\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot2\frac{2}{3}$;

в) $2\frac{5}{9}\cdot\left(\frac{16}{23}+\frac{8}{21}\right)$.

Решение.

а) $3\frac{17}{23}+5\frac{13}{15}+7\frac{6}{23}=3\frac{17}{23}+7\frac{6}{23}+5\frac{13}{15}=\left(3\frac{17}{23}+7\frac{6}{23}\right)+5\frac{13}{15}=11+5\frac{13}{15}=16\frac{13}{15}$.

При вычислении данной суммы были использованы:

1) коммутативный закон сложения (слагаемые $5\frac{13}{15}$ и $7\frac{6}{23}$ поменяли местами);

2) ассоциативный закон сложения (выделение при помощи скобок суммы слагаемых $3\frac{17}{23}$ и $7\frac{6}{23}$).

б) $1\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{7}\cdot2\frac{2}{3}=\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}=\left(\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}\right)=1\cdot2=2.$

При вычислении данного произведения были использованы:

1) коммутативный закон умножения (множители $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{7}$ поменяли местами);

2) ассоциативный закон умножения (выделение при помощи скобок произведений $\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{3}$).

в) $2\frac{5}{8}\cdot\left(\frac{16}{63}+\frac{8}{21}\right)=\frac{21}{8}\cdot\left(\frac{16}{63}+\frac{8}{21}\right)=\frac{21}{8}\cdot\frac{16}{63}+\frac{21}{8}\cdot\frac{8}{21}=\frac{2}{3}+1=1\frac{2}{3}.$

.

При вычислении значения данного произведения был использован дистрибутивный закон умножения относительно сложения.

Задания

25. Докажите, что:

а) если $\frac{p}{n}=\frac{p_1}{n_1}$ и $\frac{t}{q}=\frac{t_1}{q_1}$, то $\frac{p}{n}+\frac{t}{q}=\frac{p_1}{n_1}+\frac{t_1}{q_1}$ и $\frac{p}{n}\cdot\frac{t}{q}=\frac{p_1}{n_1}\cdot\frac{t_1}{q_1}$.

б) сложение и умножение рациональных чисел коммутативно, ассоциативно и сократимо;

в) умножение рациональных чисел дистрибутивно относительно сложения;

г) если $n \neq 0$, то $\frac{p}{t} \cdot \frac{n}{n} = \frac{p}{t}$;

д) если $n \neq 0$, $t \neq 0$, $p \neq 0$, то $\frac{p}{n} \cdot \frac{n}{p} = \frac{t}{t}$.

26. При каком условии сумма двух несократимых дробей является натуральным числом?

27. Вычислите рациональным способом и объясните, какие свойства сложения и умножения положительных рациональных чисел при этом использованы:

а) $7\frac{17}{24} + 2\frac{11}{15} + 2\frac{7}{24}$;

б) $2 + 1\frac{2}{11} + 3\frac{17}{22} + 9\frac{1}{22} + 7$;

в) $\frac{5}{8} \cdot \frac{9}{10} : 2\frac{1}{4}$;

г) $\left(7\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{9}\right) \cdot \left(\frac{10}{37} \cdot 1\frac{2}{7}\right)$.

28. Найдите сумму и разность q и r, если $q = 12\frac{15}{22}$ и $r = 8\frac{10}{33}$.

29. Найдите произведение и частное q и r, если $q = 12\frac{3}{13}$ и $r = 5\frac{1}{5}$.

30. Вычислите: $\frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 14} + \frac{1}{14 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 16}$.

31. Найдите значение выражения:

а) $\left(18 - 4\frac{7}{48}\right) - \left(10\frac{5}{16} - \frac{27}{32}\right)$;

б) $\left(40\frac{7}{20} - 13\frac{7}{10}\right) : 2 + \frac{23}{40} \cdot 4$;

в) $2\frac{3}{4} : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{6}\right) : 6\frac{1}{3}$;

г) $\left(4\frac{5}{12} - 3\frac{13}{24}\right) \cdot \frac{4}{7} + \left(3\frac{1}{18} - 2\frac{7}{12}\right) \cdot 3\frac{3}{17}$;

д) $\left(29\frac{2}{5} + 28\frac{9}{40}\right) : 28\frac{13}{16} - 4\frac{3}{4} : 2\frac{11}{12}$;

е) $\left(20 - 31\frac{4}{15} \cdot \frac{3}{7}\right) : 2\frac{1}{5} + 6\frac{9}{16} : 4\frac{3}{8}$;

ж) $121\frac{1}{4} : \left(81 - 42\frac{7}{12}\right) + 48 \cdot \frac{5}{12}$;

з) $\left(8\frac{17}{36} - 8\frac{11}{54}\right) \cdot 1\frac{25}{29} : \left(6 : 2\frac{5}{8}\right)$;

и) $\left(7\frac{13}{18}+9:32\frac{2}{5}\right)-\left(11\frac{1}{3}-6\frac{3}{7}:1\frac{13}{14}\right)$.

Ответы: $4\frac{37}{96}$; $15\frac{5}{8}$; $2\frac{3}{4}$; 2; $\frac{1}{2}$; $4\frac{1}{2}$; 23; $\frac{7}{23}$; 0.

32. Установите, какие из данных дробей равны нулю:

а) $\dfrac{\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{18}\right)\cdot 5\frac{1}{7}-2}{\left(\frac{7}{26}+\frac{1}{4}\right):\frac{2}{3}+\frac{22}{49}}$; б) $\dfrac{2\cdot\frac{1}{17}-\frac{7}{24}\cdot 120}{\left(0,75+\frac{1}{4}\right):\frac{2}{3}+1,5}$.

33. Вычислите:

а) $\left[\dfrac{\left(3\frac{2}{3}+1\frac{4}{7}\right)\cdot\left(13\frac{1}{3}-3\frac{1}{13}\right)}{\left(3\frac{2}{3}-1\frac{4}{7}\right)\cdot\left(13\frac{1}{3}+3\frac{1}{13}\right)}\right]:\dfrac{5\frac{1}{2}+1\frac{3}{8}}{\left(5\frac{1}{2}-1\frac{3}{8}\right):\frac{2}{3}}$;

б) $\left(83-\left(2\frac{1}{2}\cdot 7+12:5\right)\right):\left(\left(6\frac{7}{12}+9\frac{3}{8}\right)\cdot 4\frac{4}{5}-55\frac{17}{30}\right)$;

в) $56\frac{23}{40}:\left(\left(3\frac{2}{3}\cdot 4+8\frac{1}{4}\cdot 5\frac{2}{5}\right)-\left(7:\frac{14}{23}+12\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}\right)\right)$;

г) $\left(\left(\frac{40}{63}-\frac{8}{21}\right):20+\left(5\frac{5}{9}-\frac{7}{18}\right):35-\left(\frac{83}{90}-\frac{41}{50}\right):2\right)\cdot 21$;

д) $\left(\left(7-4\frac{13}{16}\right):4\frac{1}{4}+\left(13\frac{1}{3}-7\frac{5}{6}\right):2\frac{1}{5}-6\frac{5}{6}:2\frac{19}{33}\right)\cdot 5\frac{2}{3}$;

е) $\left(\left(3\frac{2}{3}-\dfrac{10-\frac{1}{4}}{3}\right)\cdot 1\frac{3}{5}-\dfrac{\frac{1}{7}+\frac{1}{2}}{11\frac{65}{77}+\frac{2}{33}}\right)\cdot 1\frac{2}{3}:15\frac{1}{2}$;

ж) $\left(\dfrac{37\frac{2}{5}-18\frac{6}{7}}{13\frac{4}{9}-11\frac{11}{18}}-\dfrac{\left(2\frac{3}{20}-\frac{11}{30}\right)\cdot\frac{6}{7}}{\left(1\frac{3}{100}-\frac{17}{20}\right):6\frac{3}{10}}\right):21\frac{1}{2}$.

Ответы: $1\frac{13}{32}$; 3; $1\frac{1}{2}$; $2\frac{22}{75}$; $2\frac{1}{20}$; $\frac{1}{50}$; 3.

34. Решите уравнения на основании зависимости между компонентами и результатом действий:

а) $\left(2\frac{4}{5}x-50\right):\frac{2}{3}=51$;

б) $\left(3\frac{1}{3}:4\frac{2}{3}+x-3\frac{1}{2}\right)\cdot 4\frac{4}{5}=10$;

в) $1\frac{7}{10}:\left(1\frac{2}{3}x-3\frac{3}{4}\right):\frac{8}{85}=1\frac{5}{12}$;

г) $30-13\frac{3}{5}:\left(\frac{9}{11}-\frac{3}{5}x\right)\cdot=19\frac{4}{5}$;

д) $12-\left(3-19\frac{1}{2}:\left(2\frac{3}{4}-\frac{3}{5}x\right)\right)\cdot\frac{33}{55}+10=13;$

е) $\left(\left(\dfrac{\frac{3}{10}x+2\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}}+5\frac{5}{8}\right):\frac{219}{12}\right):\frac{5}{2}=\frac{1}{5};$

ж) $1\frac{7}{10}:\dfrac{\left(1\frac{2}{3}x+3\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{8}{135}}{\frac{5}{9}}=1\frac{5}{12};$

з) $\left(2\frac{7}{36}-\left(\dfrac{\frac{47}{72}}{3\frac{1}{3}-x}+\frac{20}{27}\right)+1\frac{19}{75}\right)\cdot\frac{44}{75}-1\frac{3}{10}=\frac{1}{6};$

и) $\left(6\frac{1}{5}+\frac{57}{16}:\left(\dfrac{2\frac{3}{4}}{3\frac{1}{3}x-45}-\frac{7}{24}\right)\right)\cdot\frac{3}{38}=1\frac{1}{5}.$

Ответы: 30; $4\frac{5}{6}$; $9\frac{9}{10}$; 0; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $4\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 14.

1.3 Свойства множества положительных рациональных чисел

Определение. Положительное рациональное число a ***больше*** положительного рационального числа b, если существует такое положительное рациональное число c, что $a = b + c$.

Практические приемы установления отношения «меньше».

1. Если положительные рациональные числа a и b выражены дробями с одинаковыми знаменателями $\frac{p}{n}$ и $\frac{t}{n}$ соответственно, то $a < b$ тогда и только тогда, когда $p < t$.

2. Если положительные рациональные числа a и b выражены дробями с одинаковыми числителями $\frac{p}{n}$ и $\frac{p}{t}$ соответственно, то $a < b$ тогда и только тогда, когда $n > t$.

3. Если положительные рациональные числа a и b выражены дробями с разными числителями и знаменателями $\frac{p}{n}$ и $\frac{q}{t}$ соответственно, то $a < b$ тогда и только тогда, когда $pt < nq$.

Теорема. Отношение «меньше» на множестве Q_+ обладает свойствами антирефлексивности, антисимметричности, транзитивности, линейности. Таким образом, отношение «меньше» на множестве Q_+ является отношением строгого линейного порядка.

Свойства множества Q_+:

- линейная упорядоченность;
- плотность (между любыми двумя различными положительными рациональными числами a и b заключено бесконечно много чисел того же множества);
- бесконечность (нет ни наибольшего, ни наименьшего положительного рационального числа).

Задания

35. Докажите:

а) если $\frac{p}{n} = \frac{p_1}{n_1}$, $\frac{q}{t} = \frac{q_1}{t_1}$ и $\frac{p}{n} > \frac{q}{t}$, то $\frac{p_1}{n_1} > \frac{q_1}{t_1}$;

б) если $a > b$, то $a + c > b + c$;

в) если $a > b + c$, то $a - (b + c) = a - b - c$;

г) если $b > c$, то $a + (b - c) = a + b - c$;

д) если $a > b > c$, то $a - (b - c) = a - b + c$.

36. Сравните дроби:

а) $\frac{7}{12}$ и $\frac{19}{13}$; б) $\frac{4}{9}$ и $\frac{16}{31}$; в) $\frac{3}{8}$ и $\frac{2}{9}$.

37. Расположите дроби в порядке возрастания:

а) приведя их к наименьшему общему знаменателю:

$$\frac{25}{32};\ \frac{9}{14};\ \frac{17}{28};\ \frac{5}{16};\ \frac{3}{4}.$$

б) приведя их к наименьшему общему числителю:

$$\frac{30}{49};\ \frac{20}{21};\ \frac{24}{35};\ \frac{8}{15};\ \frac{4}{7};\ \frac{6}{11}.$$

в) любым способом:

1) $\frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{20}{21}, \frac{14}{15}$; 2) $\frac{9}{13}, \frac{15}{19}, \frac{21}{25}, \frac{7}{11}, \frac{31}{35}$; 3) $\frac{11}{24}, \frac{7}{16}, \frac{8}{17}, \frac{5}{12}$.

38. Сравните дроби, не приводя их ни к наименьшему общему знаменателю, ни к наименьшему общему числителю:

а) $\frac{22}{27}$ и $\frac{31}{36}$; $\frac{14}{15}$ и $\frac{21}{22}$; $\frac{1575}{1589}$ и $\frac{2861}{2881}$;

б) $\frac{5}{8}$ и $\frac{19}{36}$; $\frac{15}{28}$ и $\frac{22}{42}$; $\frac{123}{248}$ и $\frac{19}{40}$; $\frac{241}{486}$ и $\frac{479}{962}$;

в) $\frac{15}{24}$ и $\frac{153}{168}$; $\frac{22}{67}$ и $\frac{51}{152}$.

39. Сравните разности дробей, не вычисляя их:

$$\frac{19}{21} - \frac{8}{15} \text{ и } \frac{19}{21} - \frac{9}{16}.$$

40. Решите задачи:

а) Для нормального освещения дневным светом класса необходимо, чтобы величина площади окон составляла $\frac{1}{12}$ часть площади пола. Определите, достаточно ли света в классе, длина которого $9\frac{3}{5}$ м и ширина $8\frac{3}{4}$ м, если в классе имеется 4 окна высотой $1\frac{1}{2}$ м и шириной 1 м.

б) Число юношей, студентов педагогического факультета составляет $\frac{1}{50}$ числа девушек, студенток этого же факультета. Сколько девушек учится на факультете, если общее число студентов факультета 510 человек?

в) Расстояние между двумя городами мотоциклист проехал за 3 часа. В первый час он проехал $\frac{3}{10}$ всего пути, во второй – $\frac{9}{14}$ остатка, в третий час – остальное расстояние, причем в третий час мотоциклист проехал на $12\frac{2}{5}$ км меньше, чем во второй час. Каково расстояние между городами и сколько километров проехал мотоциклист за первый час?

г) В классе присутствовало 30 учеников; число отсутствующих составило $\frac{1}{16}$ всего числа учащихся этого класса. Сколько всего учащихся в классе?

д) Одно число больше другого в 3 раза. Если от большего числа отнять $8\frac{1}{2}$, а от меньшего $\frac{1}{2}$, то числа будут равны. Найдите эти числа.

е) Если поезд, вышедший со станции *A*, будет проходить 1 км пути за $\frac{1}{25}$ часа, то он придет на станцию *B* получасом позже назначенного времени; если же он будет проходить 1 км пути за $\frac{1}{30}$ часа, то придет на станцию двумя часами раньше срока. Найдите расстояние между станциями.

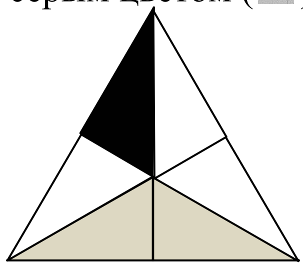
ж) Площадь двух участков $24\frac{1}{4}$ га. Если от первого отрезать $3\frac{1}{2}$ га и прибавить ко второму, то в первом будет на $\frac{3}{5}$ га больше, чем во втором. Найдите площадь каждого участка.

з) Пахотная площадь совхоза была вспахана тремя тракторами. Первый трактор вспахал на 30 га больше второго, третий же вспахал в $1\frac{3}{8}$ раза больше, чем первый. Сколько гектаров вспахал каждый трактор, если всего вспахано 375 га?

и) Букварь в $2\frac{4}{5}$ раза дешевле хрестоматии, а хрестоматия на 2700 рублей дороже букваря. Сколько стоят эти книги вместе?

ТЕСТ

1. На рисунке изображен треугольник, разделенный на шесть равных частей. Часть из них закрашена серым цветом ( ), часть — черным ( ).



Среди высказываний о закрашенных частях фигуры укажите верные.

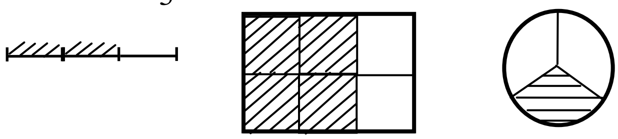
а) Черным цветом закрашена шестая часть треугольника.

б) Серым цветом закрашено три шестых части треугольника.

в) На рисунке закрашена половина треугольника.

г) На рисунке не закрашена половина треугольника.

2. Маша, Даша и Ваня получили задание показать на рисунке, как они понимают, что такое дробь $\frac{2}{3}$. Кто из детей верно выполнил задание?



Среди ответов укажите верные.

а) Ни Маша, ни Даша, ни Ваня.

б) Только Маша.

в) Маша и Даша.

г) Только Ваня.

д) Даша и Ваня.

е) Маша или Ваня.

3. Среди следующих высказываний о дробях укажите неверные.

а) Знаменатель дроби показывает, на какие равные части разделено целое.

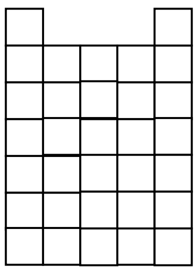
б) Числитель дроби показывает, сколько одинаковых частей взято.

в) Натуральное число не может равняться дроби.

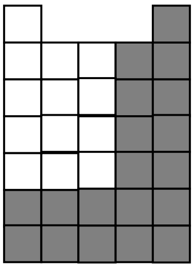
г) Каждое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби многими способами.

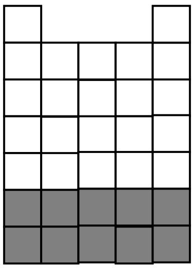
д) Длина одного и того же отрезка может при заданном единичном отрезке выражаться различными дробями.

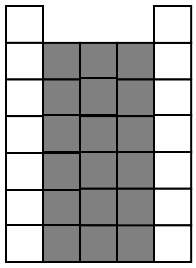
4. Пусть дана фигура:

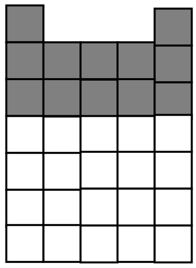


Надо заштриховать часть, составляющую $\frac{2}{3}$ данной фигуры. Укажите те из рисунков, на которых это сделано верно.


а)


б)


в)


г)

5. Надо привести примеры дробей, равных $\frac{4}{35}$. Среди ответов укажите верные.

а) $\frac{8}{70}$. б) $\frac{35}{4}$.

в) $\frac{8}{35}$. г) $\frac{12}{105}$.

6. Укажите верные высказывания о сравнении обыкновенных дробей.

а) Если среди двух дробей с равными знаменателями числитель первой дроби меньше числителя второй, то первая дробь меньше второй.

б) Если среди двух дробей с равными числителями знаменатель первой дроби больше знаменателя второй, то первая дробь больше второй.

в) Если числитель дроби больше знаменателя, то дробь больше 1.

г) Если числитель дроби равен знаменателю, то дробь равна 1.

7. Укажите верные среди высказываний об обыкновенных дробях.

а) У любой правильной дроби числитель меньше знаменателя.

б) Любая неправильная дробь больше 1.

в) Правильная дробь всегда меньше неправильной.

г) Если в правильной дроби числитель и знаменатель поменять местами, то полученная дробь будет неправильной.

8. Требуется восстановить недостающее число в примере:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{7}=\square-\frac{1}{7}$$

Среди ответов укажите верные.

а) $\frac{16}{7}$. б) $\frac{16}{21}$.

в) $\frac{26}{42}$. г) $\frac{2}{3}$.

9. Укажите неверные утверждения о сложении и вычитании дробей.

а) Сумма двух правильных дробей всегда правильная дробь.

б) Разность двух дробей не может быть целым числом.

в) Сумма двух дробей не может равняться одной из них.

г) Если от неправильной дроби отнять правильную дробь, то в результате всегда получится правильная дробь.

10. Среди данных равенств укажите верные.

а) $\frac{13}{60}+\frac{22}{105}=\frac{179}{420}$.

б) $\frac{13}{60}-\frac{22}{105}=\frac{179}{420}$.

в) $\frac{13}{60}\cdot\frac{22}{105}=\frac{179}{420}$.

г) $\frac{13}{60} : \frac{22}{105}=\frac{179}{420}$.

11. Требуется восстановить недостающее число в примере:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{\square}=\frac{5}{\square}.$$

Укажите верные среди ответов.

а) 7. б) 4.

в) 5. г) 2.

12. Среди высказываний о действиях с обыкновенными дробями укажите верные.

а) Произведение двух неправильных дробей может быть правильной дробью.

б) Произведение двух несократимых дробей не может быть равно единице.

в) Частное двух неправильных дробей всегда дробь правильная.

г) Частное двух дробей с числителями, равными единице, может оказаться как правильной, так и неправильной дробью.

13. Среди высказываний о свойствах операций над обыкновенными дробями укажите верные.

а) Сложение в Q_+ обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и сократимости.

б) Умножение в Q_+ обладает свойствами коммутативности и несократимости.

в) Деление в Q_+ обладает свойством коммутативности.

г) Вычитание в Q_+ не обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и сократимости.

1.4 Десятичные дроби и действия над ними

Определение. **Десятичной дробью** называется обыкновенная дробь со знаменателем, равным степени числа 10, записанная в десятичной позиционной системе счисления $\left(\frac{m}{10^n}\right)$.

Десятичную дробь принято записывать $\overline{M,m_{n-1}m_{n-2}...m_0}$. При записи дроби $\left(\frac{m}{10^n}\right)$ последние n цифр десятичной записи числа m отделяют запятой и называют десятичными знаками. Если числитель содержит менее n десятичных знаков, то перед ним пишут столько нулей, чтобы получилась $(n + 1)$ цифра, после чего отделяют n знаков запятой с конца.

Пример 7. Запишите в виде десятичных дробей: $\frac{37}{100}$; $\frac{15}{10000}$.

Решение. $\frac{37}{100} = \frac{37}{10^2} = 2{,}37$; $\frac{15}{10000} = \frac{15}{10^4} = 0{,}0015$.

Свойство десятичных дробей. Если приписать к десятичной дроби справа любое число нулей, то получится десятичная дробь, равная данной.

Все действия над десятичными дробями сводятся к действиям над натуральными числами (числителями обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями, равными степени десяти).

Чтобы найти **сумму (разность)** двух десятичных дробей, необходимо:
1) уравнять число десятичных знаков после запятой, приписывая справа, в случае необходимости, к одной из этих дробей несколько нулей;
2) подписать одну десятичную дробь под другой так, чтобы запятая оказалась под запятой;
3) сложить (вычесть) дроби как натуральные числа, не обращая внимания на запятые;
4) поставить запятую в сумме (разности) под запятой слагаемых (вычитаемого).

Чтобы найти **произведение** двух десятичных дробей, необходимо:
1) отбросить в записи этих дробей запятые;
2) найти произведение двух получившихся натуральных чисел;
3) в произведении отделить запятой столько последних цифр, сколько их отделено в первом и втором множителях вместе (т.е. $n + q$ цифр, если в 1-ом множителе n цифр, а во 2-ом – q цифр).

Чтобы найти **частное** двух десятичных дробей, необходимо:
1) в делителе запятую перенести в конец числа, т.е. сделать его натуральным числом;
2) чтобы частное не изменилось, в делимом надо перенести запятую на такое же количество знаков, т.е. умножить делимое на ту же степень десяти, что и делитель;
3) после этого деление производится «углом», не обращая внимания на запятую. При этом в делимом приписывают нули до тех пор, пока не закончится деление;
4) запятая в частном ставится в момент исчерпания целой части делимого.

Процентом называют $\frac{1}{100}$ часть числа. Ее обозначают 1%, а символом p% обозначают $\frac{p}{100}$. *Промилле* называют $\frac{1}{1000}$ часть числа. Обозначают p *промилле*: $\frac{p}{1000} = p$‰.

Пример 8. Найдите 18% от 210 кг.

Решение.

1 способ: 210 – 100%;

x кг – 18%.

$$x = \frac{210 \cdot 18}{100} = 37{,}8.$$

2 способ: $x = 210 \cdot 0{,}18 = 37{,}8$ (кг).

Пример 9. Найдите число, если известно, что 12% его равны 54 л.

Решение.

1 способ: 54 л – 12%;

x л – 100%.

$$x = \frac{54 \cdot 100}{12} = 450.$$

2 способ: $x = 54 : 0{,}12 = 450$ (л)

Ответ: 37,8 кг; 450 л.

Пример 10. В школе 800 учеников, из них 408 мальчиков. Сколько процентов учеников составляют мальчики?

Решение. Пусть количество мальчиков составляет x% от количества учеников в школе, тогда можно составить следующее отношение:

800 уч. – 100%;

408 уч. – x%.

$$x = \frac{408 \cdot 100}{800} = 51\%$$

Ответ: 51% учеников школы составляют мальчики.

Пример 11. Кусок сплава цинка и никеля массой 45 кг содержит 30% цинка. Определите массу цинка в сплаве.

Решение.

1 способ. Так как 30% от 45 кг составляет 0,3 от указанной массы 45 кг, то масса цинка будет $45 \cdot 0{,}3 = 13{,}5$ (кг);

2 способ. 45 кг – 100%;

x кг – 30%.

$$x = \frac{45 \cdot 30}{100} = 13{,}5 \text{ (кг)}.$$

Ответ: 13,5 кг.

Пример 12. Увеличится или уменьшится (и на сколько процентов) произведение двух множителей, если один из них увеличить на 30%, а второй уменьшить на 25%?

Решение. Обозначим множители через x и y соответственно. Схема изменения множителей показана в таблице.

Множители	Было	Стало
1-ый	x	$1{,}3\,x$
2-ой	y	$0{,}75\,y$
Произведение	$x\,y$	$0{,}975\,x\,y$

Сравним $x\,y$ и $0{,}975\,x\,y$: произведение уменьшилось на $0{,}025xy$, т.е. на 2,5%.

Ответ: произведение уменьшится на 2,5%.

Пример 13. Найдите три натуральные числа, про которых известно, что первое составляет $\frac{2}{3}$ от второго, третье 30% от первого, а разность между вторым и третьим равна 96.

Решение. Обозначим второе число через x, тогда первое число равно $\frac{2}{3}x$, а третье — $0{,}3 \cdot \frac{2}{3}x = 0{,}2x$. Значения всех трех чисел представлены в таблице.

Число	Значение
1-ое	$\frac{2}{3}x$
2-ое	x
3-е	$0{,}3 \cdot \frac{2}{3}x$ (или $0{,}2x$)

Согласно условию составим уравнение:

$x - 0{,}2x = 96$;

$x = 120$ – это второе из искомых чисел.

Первое число: $\frac{2}{3} \cdot 120 = 80$; третье: $0{,}2 \cdot 120 = 24$.

Ответ: 80, 120, 24.

Пример 14. В каком количестве воды нужно растворить 400 г соли, чтобы получить 5% раствор соли?

Решение. Представим себе, что в колбу насыпали 400 г соли и налили столько воды (x граммов), чтобы получить 5% раствор соли. Тогда в растворе соль будет составлять 5%, а вода – 95%. Можно составить пропорцию:

x г – 95%;	или	$400 + x$ – 100%;
400 г – 5%;		400 г – 5%;

$x = 7600$ г.

Ответ: в 7600 граммах воды.

Задания

41. Запишите значение длины отрезка MK, если при измерении его длины оказалось, что:

а) единичный отрезок e уложился на отрезке MK 2 раза с остатком, меньшим e, десятая часть отрезка e отложилась в остатке 4 раза с новым остатком, меньшим $\frac{1}{10}$ e, сотая часть единичного отрезка уложилась во втором остатке точно 6 раз;

б) единичный отрезок e уложился на отрезке MK 5 раз с остатком, меньшим e, сотая часть отрезка e отложилась в остатке 9 раз с новым остатком, меньшим $\frac{1}{100}$ e, тысячная часть единичного отрезка уложилась во втором остатке точно 3 раза.

42. Опишите процесс измерения длины отрезка, если в результате получилась дробь:

а) 8,15; б) 1,024; в) 0,1804.

43. Запишите цифрами следующие числа:

а) две целых и три миллионных;

б) нуль целых и восемь десятитысячных;

в) четыреста пять целых и сто двадцать пять стотысячных;

г) 575 десятых;

д) 575 сотых; 60003 десятых; 6003 сотых.

44. Прочитайте десятичные дроби и представьте их в виде суммы разрядных единиц: 8,65; 0,0072; 0,8674; 563,005; 0,70008.

45. Запишите в виде десятичных дробей следующие числа:

$3\frac{7}{1000}$; $8\frac{243}{1000}$; $\frac{209}{10}$; $\frac{37}{10000}$; $1000\frac{1}{1000}$; $\frac{57345}{10000}$; $\frac{3504}{100}$.

46. Приведите к общему знаменателю дроби:

а) 0,032; 12,048345; 6,07;

б) 0,00023; 7,35; 13,011;

в) 0,000001; 1,01; 1,00101.

47. Сократите следующие десятичные дроби:

4,700; 0,00600; 0,0506000; 7,0070; 15,0.

48. Дайте обоснование следующих правил. Приведите примеры.

а) Если к некоторой десятичной дроби приписать справа нуль, то получится равная ей дробь.

б) Если десятичная дробь оканчивается нулем, то этот нуль можно отбросить.

в) Из двух десятичных дробей больше та, в которой больше целая часть; если в дробях равные целые части, то больше та дробь, в которой больше десятых; если и десятых поровну, то больше та дробь, в которой сотых больше и т.д.

г) Чтобы умножить (разделить) десятичную дробь на 10, 100, 1000 и т.д., надо в этой дроби перенести запятую вправо (влево) соответственно на 1, 2, 3 и т.д. цифры.

49. Укажите наибольшую и наименьшую дроби в следующих рядах чисел:

а) 1,7203; 1,7; 1,72031; 1,72;

б) 0,003; 0,003204; 0,0032; 0,00321; 0,0030007.

Расположите числа в рядах в порядке возрастания (а), убывания (б).

50. Выполните действия и сделайте проверку обратным действием:

а) 7,4334 + 0,30903;

б) 78 – 0,969541.

51. Вычислите рациональным способом:

а) (21,281 + 19,753) + (0,247 + 8,719);

б) 75,32 – (11,7 + 15,32);

в) 38,743 – (13,47 – 11,257);

г) (54,12 – 13,99) – 14,12;

д) (12,3 + 0,9999) + (11,7 + 0,0001).

52. а) Уменьшаемое увеличили на 5,8. Что надо сделать с вычитаемым, чтобы разность не изменилась?

б) Сумма двух чисел равна 6. Как изменить слагаемые, чтобы в сумме получилось 3,5? 6,9? чтобы сумма не изменилась?

в) Разность двух чисел равна 6,4. Как изменить уменьшаемое и вычитаемое, чтобы получить в разности 7,9?

53. При сложении чисел цифра сотых 4 была принята за 7, цифра десятых 3 принята за 8, цифра единиц 9 принята за 2. В сумме получилось число 37,5. Найдите первоначальную сумму.

54. При вычитании чисел в уменьшаемом цифра единиц 8 была принята за 3, цифра сотых 4 принята за 1, а в вычитаемом цифра десятых 9 принята за 2 и цифра десятитысячных 0 — за 6. В разности получилось число 15,0015. Найдите первоначальную разность.

55. а) Десятичная дробь имеет 3 цифры после запятой. Как изменится величина этого числа, если в нем отбросить запятую?

б) Как изменится целое число, если в нем поставить запятую между тысячами и сотнями?

56. При нагревании на 1°C железо удлиняется на 0,000012 своей длины, алюминий — на 0,000023 своей длины, медь — на 0,000017 своей длины. Вычислите, на сколько миллиметров станут длиннее стержни из этих металлов, взятые длиной в 1 м при 0°C, если их погрузить в кипящую воду.

57. Сложите 132,2 с десятой и сотой его частями и полученную сумму увеличьте на 3,258. Какое число получится?

58. Выполните действия и сделайте проверку обратным действием:

а) 0,59 · 0,407;

б) 1,20631 : 9,07.

59. Вычислите рациональным способом:

а) 0,25 · 0,3 · 4 ·10;

б) 1,25 · 0,4 · 0,8 · 5;

в) $7{,}5 \cdot 0{,}125 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25$;

г) $14{,}7 : 0{,}2 : 0{,}7$;

д) $(1{,}5 \cdot 1{,}21) : 0{,}05$.

60. Как изменится произведение трех чисел, если первый множитель увеличить в 4,8 раза, второй уменьшить в 2,4 раза, а третий увеличить в 2,5 раза?

61. Решите уравнения на основании зависимости между компонентами и результатом действий:

а) $(x \cdot 100 - 0{,}7357) : 0{,}01 - 15{,}86 = 0{,}55$;

б) $14 : \dfrac{0{,}4x + 0{,}16}{x} + 5 = 12$;

в) $1{,}2 \cdot \left(\dfrac{2{,}4x - 0{,}23}{x} - 0{,}05\right) = 1{,}44$;

г) $\left(1 - \left(\left(100 - \dfrac{0{,}625}{0{,}105}\right) \cdot 0{,}00001\right)\right) \cdot 100 + 0{,}0375 = 100$.

Ответы: 0,009; 0,1; 0,2; 0,095.

62. Найдите значения выражений:

а) $(60{,}3 - 53{,}235 : 3{,}9) \cdot 1{,}4 + 10{,}2 \cdot 12$;

б) $(17{,}125 + 8{,}075) : 1{,}575 - 14{,}65$;

в) $15{,}85 - 3{,}4 \cdot (50 - (1{,}5 \cdot 30 + 0{,}4)) + 3{,}57 : 1{,}7$;

г) $32{,}42 - 2{,}2 \cdot (40 - 25{,}5) + 7{,}14 : 1{,}7$;

д) $\left(\dfrac{4 : 0{,}128 + 14628{,}25}{1{,}011} \cdot 0{,}00008 + 6{,}84\right) : 12{,}5$;

е) $(232{,}078 : 2{,}74 - 452{,}25 \cdot 0{,}048) : 4 + (628{,}125 : 33{,}5 + 83{,}502)$;

ж) $(73{,}264 : 12{,}05 + 35{,}5 \cdot 0{,}28) : 8 - (1{,}4473 : 7{,}06 + 1{,}2125)$;

з) $\dfrac{0{,}1 : 0{,}002 - (7{,}91 : 0{,}565 - 11{,}1 : 1{,}48)}{2 : 0{,}16 + 0{,}625 \cdot 2{,}4 - 1 : 0{,}125 + 2{,}7}$;

и) $\dfrac{17{,}102 : 3{,}4 - 2{,}472 : 2{,}4}{(4{,}8 : 0{,}12) \cdot 0{,}2} + \dfrac{8{,}1 : 0{,}406}{(3{,}6 - 2) : 3}$;

к) $\dfrac{0{,}52 \cdot 7{,}5}{(1{,}48 + 0{,}52) \cdot 7{,}5} : \dfrac{0{,}425 - 0{,}4125 \cdot 0{,}4}{(0{,}425 - 0{,}4125) \cdot 0{,}4}$.

Ответы: 187,71; 1,35; 2,31; 4,72; 0,64; 118; 0,585; 5; 40,5; 0,005.

63. Замените процентами следующие числа:

а) 0,03; 0,16; 0,24; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$;

б) 1,75; 2,08; 1,20; $1\frac{1}{2}$; $1\frac{3}{5}$; $1\frac{1}{4}$; $1\frac{5}{8}$;

в) 0,08; 1,05; 0,75; $\frac{4}{5}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{3}{25}$; $\frac{3}{8}$;

г) 1; 2; 3; 5; 7; 10; 12; 20.

64. Выразите в дробях следующие проценты:

а) 75%; 18%; 37%; 125%; 16%; 105%; 220%; 350%;

б) 40%; 120%; 49%; 90%; 50%; 110%; 35%; 800%.

65. Найдите положительное рациональное число, если:

а) 140% его равны 180; б) 50% его равны 23,1;
в) 3,5% его равны 21; г) 300% его равны 0,93;
д) 55% его равны 39,6; е) 25% его равны 8,04;
ж) 42% его равны 8,4; з) 5% его равны 0,31;
и) a% его равны 37; к) 16% его равны b;
л) 23% его равны k; м) s% его равны m.

66. Найдите число, если известно, что:

а) после прибавления к нему 12% его получится 420;
б) после вычитания из него 16% его получится 434;
в) 17% его на 27 больше, чем 14%;
г) 36% его вместе с 9% его составляют 315.

67. Решите задачи:

а) Сумма трех чисел равна 7,7. Первое число составляет 0,4 второго, а второе в 1,25 раза больше третьего. Найти эти числа.

б) Сколько процентов составляет число 5 от числа 20; число 0,5 от числа 8; число 8 от числа 0,5?

в) Из 32 учащихся класса на контрольной работе по математике 6 учеников получили оценку «9», 12 учеников — «7», 10 учеников — «6», остальные — «5». Сколько процентов учащихся класса получили оценку «9», «7», «6», «5»?

г) В школе 1500 учащихся, 24% из них — ученики начальной школы; 40% учеников начальной школы учатся без «4». Сколько учеников начальной школы учатся без «4»?

д) В месяце 24 учебных дня, ежедневно проводится по 4 урока, в классе 32 ученика. Учениками за месяц пропущено 120 уроков. Найдите процент посещаемости класса в этом месяце.

е) За первый день комбайнер убрал 8% поля площадью в 250 га; в каждый из следующих четырех дней он убирал на 5 га больше, чем в первый день. Сколько процентов площади поля осталось убрать после пяти дней работы?

ж) Ткачиха выполнила 120% сменного задания, соткав 35 м ткани сверх плана. Сколько метров составляет сменное задание?

з) Какая сумма вклада в банк приносит ежемесячный доход: а) 24 доллара; б) 30 долларов, если банк платит 30% годовых?

и) Дороже или дешевле будет стоить товар (и на сколько процентов), если цена на него сначала увеличилась на 10%, затем новая цена уменьшилась на 10%?

к) На товар два раза повышали цену (каждый раз на 15%). На другой товар, который до подорожания стоил столько, сколько и первый, повысили цену один раз на 30%. Какой товар стал дешевле?

л) После двух последовательных увеличений на одинаковое количество процентов число 100 стало числом 144. На сколько процентов увеличилось число 100? На сколько процентов увеличивалось число каждый раз?

м) Магазин продал в первый день 15% полученного товара, во второй день — 40% оставшегося. Сколько процентов поступившего в магазин товара осталось?

н) Для хранения желудей их необходимо просушить, причем при сушке они теряют 8% своей массы. Сколько желудей необходимо собрать, чтобы получилось 46 кг желудей, пригодных для хранения?

о) Смешали 3 г соли и 15 г воды. Найдите концентрацию соли в растворе.

п) В каком количестве воды нужно растворить 400 г соли, чтобы получить 5%-ный раствор соли?

р) Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 300 кг морской воды, чтобы процентное содержание соли составило 2%?

с) Сколько воды нужно выпарить из 500 кг целлюлозной массы, которая содержит 85% воды, чтобы получить массу с содержанием 75% воды?

1.5 Преобразование обыкновенных дробей в десятичные. Бесконечные периодические десятичные дроби

Определение. Бесконечная десятичная дробь, у которой одна или группа цифр, начиная с некоторого места после запятой, повторяется в одной и той же последовательности, называется **периодической десятичной** дробью. Периодически повторяющиеся цифры образуют **период.** Число, которое стоит между запятой и первой цифрой периода называется **предпериодом.**

Определение. Периодическая десятичная дробь без предпериода называется **чистой** периодической дробью, с предпериодом — **смешанной** периодической дробью.

$\frac{3}{11}$ = 0,272727…27… = 0,(27) — чистая периодическая дробь;

$\frac{8}{55}$ = 0,14545…45… = 0,1(45) — смешанная периодическая дробь.

Чтобы преобразовать обыкновенную дробь в десятичную, надо числитель разделить на знаменатель.

Теорема 1. Несократимая дробь $\frac{m}{n}$ тогда и только тогда представима конечной десятичной дробью, когда каноническое разложение знаменателя n имеет вид: $n = 2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$.

Теорема 2. Пусть обыкновенная дробь $\frac{m}{n}$ несократима и n делится на некоторое простое число, отличное от 2 и 5. Тогда $\frac{m}{n}$ равна бесконечной периодической десятичной дроби.

Теорема 3. Если у несократимой обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$ знаменатель взаимно прост с 10, то $\frac{m}{n}$ преобразуется в чистую периодическую десятичную дробь.

Теорема 4. Пусть дробь $\frac{m}{n}$ несократима и $n = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} d$, где d и 10 взаимно просты. Тогда $\frac{m}{n}$ преобразуется в смешанную периодическую дробь.

Любое положительное рациональное число записывается в виде обыкновенной дроби, а любая обыкновенная дробь может быть преобразована в десятичную. Поэтому:

любое положительное рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью, т.к. конечную десятичную дробь можно рассматривать как бесконечную с периодом, равным 0.

Преобразование десятичных бесконечных периодических дробей в обыкновенные можно осуществить, используя следующие правила.

Правило 1. Чтобы чистую периодическую дробь преобразовать в обыкновенную, следует в числителе записать число, образованное цифрами периода, а в знаменателе — число, записанное одними девятками, с числом девяток, равным длине периода.

Правило 2. Чтобы смешанную периодическую дробь преобразовать в обыкновенную, следует в числителе записать разность между числом, стоящим до начала второго периода, и числом, образованным цифрами предпериода. В знаменателе следует записать число, образованное k девятками и n нулями, где k — длина периода, n — длина предпериода.

Пример 15. Запишите в виде десятичных следующие дроби:

а) $\frac{195}{260}$; б) $\frac{11}{12}$; в) $\frac{18}{11}$.

Решение. а) Проверим дробь $\frac{195}{260}$ на сократимость:

$$195 = 3 \cdot 5 \cdot 13;$$
$$260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13;$$

Сократим дробь на 65, получим: $\frac{195}{260} = \frac{3}{4}$.

Дробь $\frac{3}{4}$ преобразуется в конечную десятичную дробь (по теореме 1), так как знаменатель $4 = 2^2$. Переход к записи дроби $\frac{3}{4}$ в виде десятичной можно осуществить двумя способами:

1 способ. Разделим числитель на знаменатель углом.

2 способ. Так как знаменатель дроби имеет вид $2^2 \cdot 5^0$, то умножим знаменатель и числитель дроби на 5^2 (т.е. на такое число, чтобы в знаменателе получилось степень числа 10):

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{75}{100} = 0{,}75.$$

б) Дробь $\frac{11}{12}$ несократима. Каноническое разложение знаменателя $12 = 2^2 \cdot 3$, поэтому по теореме 4 эта дробь преобразуется в смешанную периодическую дробь. Разделим числитель на знаменатель углом.

в) Дробь $\frac{18}{11}$ несократима. Каноническое разложение знаменателя 11 не содержит чисел 2 и 5, поэтому по теореме 4 эта дробь преобразуется в чистую периодическую дробь. Разделим числитель на знаменатель углом.

Ответ: $\frac{190}{260} = 0{,}75$; $\frac{11}{12} = 0{,}91(6)$; $\frac{18}{11} = 1{,}(63)$.

Пример 16. Запишите в виде обыкновенной дроби десятичные дроби:

а) 0,(21); б) 0,8(126).

Решение: а) 0,(21) = 0,2121212121… Обозначим $x = 0{,}(21)$.

В периоде две цифры, умножим обе части равенства на 100:

$100x = 21{,}(21)$;

$100x = 21 + 0{,}(21)$;

$100x = 21 + x$;

$99x = 21$;

$x = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$.

Таким образом, $0{,}21 = \frac{7}{33}$. Чтобы убедиться в том, что перевод сделан правильно, достаточно поделить 7 на 33.

б) Обозначим $x = 0{,}8(126)$ Проведем такое преобразование, чтобы после запятой остался только период. Для этого умножим обе части полученного равенства на 10:

$10x = 8{,}(126) = 8 + 0{,}(126)$ (*)

Дробь 0,(126) преобразуем в обыкновенную так, как это сделано для дроби 0,(21): обозначим $y = 0{,}(126)$, умножим обе части равенства на 1000 (т.к. в периоде 3 цифры) и получим:

$1000y = 126{,}(126)$;

$1000y = 126 + 0{,}(126)$;

$1000y = 126 + y$;

$y = \frac{126}{999} = \frac{14}{111}$.

Подставим y в равенство (*):

$10x = 8 + \frac{14}{111}$;

$x = \frac{451}{555}$.

Таким образом, $0{,}8(126) = \frac{451}{555}$.

Ответ: $\frac{7}{33}$; $\frac{451}{555}$.

Пример 17. Используя правила, запишите в виде обыкновенной дроби десятичные дроби: а) 2,(345); б) 5,25(8775).

Решение. а) $2{,}(345) = 2 + \frac{345}{999} = 2\frac{115}{333}$;

б) $5{,}25(8775) = 5 + \frac{258775-25}{999900} = 5\frac{25875}{99990} = 5\frac{1725}{6666} = 5\frac{575}{2222}$.

Ответ: $2\frac{115}{333}$; $5\frac{575}{6666}$

Пример 18. Найдите значение выражения и запишите ответ в виде периодической дроби: 0,8(5) – 0,17(1).

Решение: Дроби 0,8(5) и 0,17(1) преобразуем в обыкновенные:

$$0{,}8(5) = \frac{85-8}{90} = \frac{77}{90};$$

$$0{,}17(1) = \frac{171-17}{900} = \frac{154}{900} = \frac{77}{450},$$

$$0{,}8(5) - 0{,}17(1) = \frac{77}{90} - \frac{77}{450} = \frac{385-77}{450} = \frac{308}{450} = \frac{154}{225}.$$

Запишем дробь $\frac{154}{225}$ в виде периодической десятичной дроби. Для этого 154 поделим на 225.

$\frac{154}{225} = 0{,}68(4)$.

Задания

68. Сравните множества конечных десятичных дробей и обыкновенных дробей. Какое из данных множеств является подмножеством другого? Постройте соответствующую диаграмму.

69. Преобразуйте следующие дроби в десятичные делением числителя на знаменатель:

а) $\frac{9}{12}$; $\frac{17}{30}$; $\frac{14}{35}$; $\frac{26}{65}$; $\frac{36}{45}$; $\frac{111}{74}$; $3\frac{11}{44}$; $4\frac{12}{75}$;

б) $\frac{9}{4}$; $\frac{11}{5}$; $\frac{29}{8}$; $\frac{34}{25}$; $\frac{398}{125}$; $1\frac{371}{250}$; $2\frac{1659}{500}$; $3\frac{1417}{200}$.

70. Разложите знаменатель каждой из данных дробей на простые множители и подберите дополнительные множители для преобразования обыкновенной дроби в десятичную:

$\frac{3}{20}$; $\frac{17}{25}$; $\frac{23}{40}$; $7\frac{3}{80}$; $3\frac{9}{16}$; $10\frac{1}{160}$; $3\frac{47}{50}$.

71. Вместо многоточия поставьте слова «необходимо», «достаточно», «необходимо и достаточно»:

а) для того, чтобы несократимая дробь могла быть выражена в виде конечной десятичной, …, чтобы знаменатель мог быть представлен в виде 2^n;

б) для того, чтобы несократимая дробь могла быть выражена в виде конечной десятичной, …, чтобы знаменатель мог быть представлен в виде 5^n;

в) для того, чтобы несократимая дробь могла быть выражена в виде конечной десятичной, …, чтобы ее знаменатель не содержал ни одного простого множителя, отличного от 2 и 5.

72. Какие из следующих обыкновенных дробей можно записать в виде конечных десятичных, а какие — в виде бесконечных периодических дробей:

$\frac{3}{6}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{127}{500}$; $\frac{62}{75}$; $\frac{13}{22}$; $1\frac{14}{125}$?

73. Определите, какие из следующих дробей можно записать в виде конечных десятичных дробей, и запишите их в этом виде:

а) $\frac{17}{640}$; б) $\frac{42}{875}$; в) $\frac{52}{75}$; г) $\frac{385}{308}$; д) $\frac{7}{200}$; е) $\frac{327}{400}$; ж) $\frac{19}{625}$; з) $\frac{352}{125}$; и) $\frac{3149}{2500}$; к) $\frac{3}{4}$.

74. Запишите следующие обыкновенные дроби в виде бесконечных десятичных дробей. Почему это можно сделать?

$\frac{3}{7}$; $\frac{4}{35}$; $\frac{17}{24}$; $\frac{36}{77}$; $\frac{5}{14}$; $\frac{11}{30}$; $\frac{12}{23}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{4}{15}$.

75. Запишите следующие конечные десятичные дроби в виде несократимых обыкновенных дробей: 0,125; 0,625; 0,1375; 0,2454.

76. Следующие периодические десятичные дроби преобразуйте в обыкновенные:

а) 0,(31); 2,(75); 0,34(9); 0,27(15); 0,(45); 0,28(27);

б) 0,00(15); 3,(716); 0,3; 0,(37); 0,(237); 0,20(20).

77. Вычислите значения выражений:

а) $\frac{0,(5)}{0,(3)}$;

б) $\frac{0,1(2)+0,3(4)}{0,4(5)-0,2(3)}$;

в) $\frac{0,8(5)+0,17(1)}{0,8(5)-0,17(1)}+\frac{0,8(3)+0,1(6)}{0,8(3)-0,1(6)}$.

ТЕСТ

1. Надо записать десятичную дробь, равную $\frac{5}{100}$. Укажите верные ответы.

а) 0,05;
б) 5,0;
в) 0,005;
г) 0,02.

2. Надо записать десятичную дробь, равную $\frac{5}{16}$. Укажите верные ответы.

а) 3,125;
б) 0,3125;
в) 3,2;
г) 0,625.

3. Дано выражение

$$6 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{100} + 2 \cdot \frac{1}{1000}.$$

Среди следующих чисел укажите те, которые можно представить в виде этого выражения.

а) 6,5182;
б) 651,82;
в) 0,65182;
г) 65,182.

4. Укажите, какое из следующих чисел можно записать десятичной дробью 20,78.

а) $207\frac{8}{10}$;
б) $20\frac{78}{10000}$;
в) $20\frac{78}{100}$;
г) $207\frac{8}{100}$.

5. Среди данных равенств укажите верные.

а) 2,75 = 2,7500;
б) 47,459 = 47,45;
в) 378,205 = 378,25;
г) 7283,24 = 728,324.

6. Среди следующих десятичных дробей укажите наибольшую.

а) 0,635823;
б) 0,6316;
в) 0,633;
г) 0,6359.

7. Укажите среди неравенств те, которые верны при подстановке на место □ любой, отличной от нуля цифры.

а) 287,379□< 287,379;

б) 2,473 > 2,4□73;

в) 8,42 < 8,4□2;

г) 6□,394 > 3,394.

8. Среди данных равенств укажите верные.

а) $1{,}125 + \frac{3}{40} = 1{,}2.$

б) $1{,}125 - \frac{3}{40} = 1{,}2.$

в) $1{,}125 \cdot \frac{3}{40} = 1{,}2.$

г) $1{,}125 : \frac{3}{40} = 1{,}2.$

9. Не производя вычислений, определите, верны ли следующие высказывания о значении выражений.

а) Значение выражения $2{,}8 \cdot 3{,}7 - 5$ — число положительное.

б) Значение выражения $9 : 2{,}7 - 4$ — положительное число.

в) Значение выражения $75 - 7{,}9 \cdot 12{,}3$ — неположительное число.

г) Значение выражения $72{,}4 - 35 : 7{,}8$ — неположительное число.

10. Надо обратить обыкновенную дробь $\frac{35}{99}$ в бесконечную периодическую десятичную дробь. Укажите верные ответы.

а) 0,(35);

б) 0,353535;

в) 0,3(5);

г) 0,(305).

11. Надо обратить обыкновенную дробь $\frac{377}{495}$ в бесконечную периодическую десятичную дробь. Укажите верные ответы.

а) 0,7(61);

б) 0,(761);

в) 0,71(6);

г) 0,(377).

1.6 Положительные действительные числа

Определение. Числа, выражаемые **бесконечными непериодическими** десятичными дробями, называются **иррациональными.**

Множество положительных действительных чисел $R_+ = Q_+ \cup I_+$, где I_+ — множество положительных иррациональных чисел.

Пусть $x = n,n_1n_2n_3\ldots n_k\ldots$ **Приближенное значение числа x по недостатку** с точностью до $\frac{1}{10^k}$ получится, если оставить целую часть числа и первые k цифр после запятой, а все остальные отбросить ($x_k = n,\ n_1n_2\ldots n_k$).

Приближенное значение числа x по избытку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ получится, если в приближенном значении числа x по недостатку увеличить на единицу последнюю оставшуюся цифру ($x'_k = n,\ n_1n_2\ldots n_k + \frac{1}{10^k}$)

Определение. **Суммой положительных действительных чисел x и y** называют положительное действительное число, разделяющее множества $\{x_k + y_k\}$ и $\{x_k' + y_k'\}$, где x_k, y_k — десятичные приближения этих чисел по недостатку, а x_k', y_k' — по избытку с точностью до $\frac{1}{10^k}$.

Свойства операции сложения в $\boldsymbol{R}_+$:

1) коммутативность,
2) ассоциативность,
3) сократимость,
4) монотонность,
5) во множестве $\boldsymbol{R}_+$ нет нейтрального элемента по сложению.

Определение. **Произведением положительных действительных чисел x и y** называют положительное действительное число, разделяющее множества $\{x_k \cdot y_k\}$ и $\{x_k' \cdot y_k'\}$, где x_k, y_k — десятичные приближения этих чисел по недостатку, а x_k', y_k' — по избытку с точностью до $\frac{1}{10^k}$.

Свойства операции умножения в $\boldsymbol{R}_+$:

1) коммутативность,
2) ассоциативность,
3) дистрибутивность относительно сложения и относительно вычитания,
4) 1 является нейтральным элементом относительно умножения $\forall x \in R_+ (x \cdot 1 = x)$,
5) монотонность,
6) сократимость.

Разность и частное можно определить аналогично сумме и произведению (как число, разделяющее соответствующие множества), а также вычитание и деление можно рассматривать как операции, обратные соответственно сложению и умножению.

Пример 18. Найдите приближенные значения числа $x = 2{,}3548731\ldots$ по недостатку и по избытку с точностью до тысячных.

Решение. Так как нужно найти приближение числа x до **тысячных,** то оставляем целую часть числа и первых три знака после запятой. Получим приближение по недостатку: $x_3 = 2{,}354$. Тогда $x'_3 = 2{,}355$ – приближение по избытку.

Пример 19. Докажите иррациональность чисел а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

Доказательство. а) Допустим, $\sqrt{3} \in Q_+$. Это значит, $\sqrt{3}$ можно записать в виде несократимой дроби, например: $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$, где $m, n \in N$.

Далее: $\frac{m^2}{n^2} = 3$, откуда $m^2 = 3n^2$.

Из последнего равенства видно, что число m^2 делится на 3, поэтому m делится на 3, это значит, существует натуральное число k такое, что

$$m = 3k;$$

Откуда (с учетом $m^2 = 3n^2$) получим:

$$9k^2 = 3n^2, n^2 = 3k^2.$$

Значит, n^2 (и n также) делится на 3, поэтому существует натуральное число t такое, что $n = 3t$.

Так как $m = 3k$, $n = 3k$, то дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить на 3, а это противоречит предположению о ее несократимости. Отсюда следует, что число $\sqrt{3}$ — иррациональное.

б) Допустим, $\sqrt{15} \in Q_+$. Это значит, $\sqrt{15}$ можно записать в виде несократимой дроби, например: $\sqrt{15} = \frac{m}{n}(m, n \in N)$.

Далее: $\frac{m^2}{n^2} = 15$, откуда $m^2 = 15n^2$. Поскольку $m^2 = 3 \cdot 5 \cdot n^2$, то дальнейшее рассуждения можно выполнить двумя способами.

Из равенства $m^2 = 3 \cdot 5 \cdot n^2$ (*)

1 способ: следует, что $m^2 \vdots 3$ и $m \vdots 3$, значит, существует натуральное число k такое, что $m = 3k$.

Подставим последнее равенство в (*):

$9m^2 = 3 \cdot 5n^2$;

$3m^2 = 5n^2$;

значит, $5n^2 \vdots 3$, откуда $n^2 \vdots 3$ и $n \vdots 3$

Так как $m \vdots 3$, $n \vdots 3$, то дробь $\frac{m}{n}$ — сократима, что противоречит предположению о ее несократимости, поэтому число $\sqrt{15}$ — иррациональное.

2 способ: следует, что $m^2 \vdots 5$ и $m \vdots 5$, значит, существует целое натуральное число k такое, что $m = 3k$.

Подставим последнее равенство в (*):

$25m^2 = 3 \cdot 5n^2$;

$5m^2 = 3n^2$;

значит, $3n^2 \vdots 5$, откуда $n^2 \vdots 5$ и $n \vdots 5$

Так как $m \vdots 5$, $n \vdots 5$, то дробь $\frac{m}{n}$ — сократима, что противоречит предположению про ее несократимость. Поэтому число $\sqrt{15}$ — иррациональное.

в) Допустим, что число $\sqrt{3} + \sqrt{5} = a$ — положительное рациональное. Возведем две части последнего равенства в квадрат: $8 + 2\sqrt{15} = a^2$.

Выразим $\sqrt{15}$. $\sqrt{15} = \frac{a^2 - 8}{2}$.

В правой части последнего равенства получим положительное рациональное число $\frac{a^2 - 8}{2}$, поэтому $\sqrt{15}$ должен быть положительным рациональным числом, что противоречит доказанному в п. б).

Таким образом, число $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ является иррациональным.

Пример 20. Для иррациональных чисел π и $\sqrt{3}$ найдите сумму $\pi + \sqrt{3}$, произведение $\pi\sqrt{3}$, разность $\pi - \sqrt{3}$, частное $\pi : \sqrt{3}$ с точностью до 0,001.

($\pi = 3{,}141592653\ldots$; $\sqrt{3} = 1{,}732050807\ldots$)

Решение. Для решения определим приближенные значения чисел π и $\sqrt{3}$ с точностью до 0,0001: $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$; $1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321$.

Получим следующие результаты.

Сумма: $3{,}1415 + 1{,}7320 < \pi + \sqrt{3} < 3{,}1416 + 1{,}7321$;

$$4{,}8735 < \pi + \sqrt{3} < 4{,}8737;$$

$$\pi + \sqrt{3} \approx 4{,}874.$$

Произведение: $3{,}1415 \cdot 1{,}7320 < \pi \cdot \sqrt{3} < 3{,}1416 \cdot 1{,}7321$;

$$5{,}4410 < \pi \cdot \sqrt{3} < 5{,}4415;$$

$$\pi\sqrt{3} \approx 4{,}442.$$

Разность:

$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416;$$

$$-1{,}7321 < -\sqrt{3} < -1{,}7320;$$

$$3{,}1415 - 1{,}7321 < \pi - \sqrt{3} < 3{,}1416 - 1{,}7320;$$

$$1{,}4094 < \pi - \sqrt{3} < 1{,}4096;$$

$$\pi - \sqrt{3} = 1{,}410.$$

Частное:

$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416;$$

$$0{,}5773 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 0{,}5774;$$

$$3{,}1415 \cdot 0{,}5773 < \pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} < 3{,}1416 \cdot 0{,}5774;$$

$$1{,}8136 < \pi - \sqrt{3} < 1{,}8140;$$

$$\pi : \sqrt{3} \approx 1{,}814.$$

Ответ: $\pi + \sqrt{3} \approx 4{,}874$; $\pi\sqrt{3} \approx 4{,}442$; $\pi - \sqrt{3} = 1{,}410$; $\pi : \sqrt{3} \approx 1{,}814$.

Задания

78. Опишите процесс измерения длины отрезка AB при помощи единичного отрезка e, если:

а) $AB = 3{,}4e$; б) $AB = 2\frac{3}{4}e$; в) $AB = 1{,}666\ldots\ e$; г) $AB = 0{,}13113\ldots\ e$.

Как в каждом случае называется отрезок AB?

79. а) $\frac{1}{3}$ часть единичного отрезка e уложилась в отрезке AB 12 раз. Как называется отрезок AB? Какова его длина?

б) $\frac{1}{7}$ часть единичного отрезка e уложилась в отрезке AB 15 раз. Как называется отрезок AB? Какова его длина?

в) $\frac{1}{100}$ часть единичного отрезка e уложилась в отрезке AB 2 раза с остатком, меньшим $\frac{1}{100}e$; $\frac{1}{1000}$ часть единичного отрезка e уложилась в остатке 1 раз с новым остатком, меньшим $\frac{1}{1000}e$; $\frac{1}{1000000}$ часть единичного отрезка e уложилась в новом остатке 3 раза с остатком, меньшим $\frac{1}{1000000}e$, и т.д. Как называется отрезок AB? Какова его длина?

80. Запишите приближенные значения каждого числа по избытку и недостатку:

а) с точностью до единиц: 0,8; 3,7; 15,5; 41,4; 0,379;

б) с точностью до десятых: 8,512; 11,396; 0,403; 2,013; 4,08; 6,17;

в) с точностью до сотых: 9,647; 12,784; 0,201; 6,008; 1,004;

г) с точностью до тысячных: 0,1204; 1,3445; 13,10035; 9,00157.

81. Найдите по три десятичных приближения по недостатку и по избытку для чисел: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π.

($\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, $\sqrt{3} = 1{,}7320\ldots$, $\sqrt{5} = 2{,}2360\ldots$, $\pi = 3{,}1415\ldots$)

82. Докажите, что не существует рационального числа r такого, что

а) $r^2 = 13$; б) $r^2 = 7$; в) $r^2 = 11$.

83. Множество M состоит из действительных чисел: $M = \{\sqrt{9}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{18}$; $\frac{2}{7}$; 0; 15,6; $\sqrt{5}$; 0,(6); 0,313313331; 0,2424442777…; 1,31312525…; 3,030030003…; 0,277000….$\}$. Какие из чисел этого множества являются рациональными (R_+), а какие иррациональными?

84. Укажите истинные высказывания:

а) $\forall x \in R_+$ (x — число иррациональное);

б) $\exists x \in R_+$ (x — число рациональное);

в) $\exists x \in R_+$ (x — число иррациональное);

г) $\forall x \in R_+$ (x — число рациональное).

85. Сложите бесконечные десятичные дроби:

а) 0,353535… и 0,231231231…;

б) 0,101001000100001… и 0,010110111011110…

Рациональна ли их сумма?

86. Найдите три первых десятичных знака бесконечной десятичной дроби, являющейся записью числа:

а) $3+\sqrt{2}$; б) $2+\sqrt{2}$; в) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; г) $\frac{3}{7}+\sqrt{2}$; д) $8\sqrt{2}$;

е) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; ж) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; з) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$; и) $3\cdot 0{,}2743\ldots$

87. Найдите значения по недостатку и по избытку с точностью до целых, десятых, сотых и тысячных:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; в) $\pi+\sqrt{5}$; г) $\pi-0{,}73521$; д) $\sqrt{2}\cdot 2{,}31457$;

е) $2{,}1468\cdot 1{,}54314$; ж) $\pi\cdot 0{,}15134$; з) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

88. Найдите $\frac{1}{x}$ с точностью до 0,01:

а) $x = 0{,}45217$; б) $x = 4{,}867314$; в) $x = 49{,}157413$.

89. Какое из чисел больше:

а) $\frac{29}{31}$ или $\frac{41}{43}$; б) 3,141592 или $\frac{22}{7}$; в) $\sqrt{29}$ или $5\frac{5}{13}$; г) $\sqrt{3}$ или 1,732;

д) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ или $\sqrt{3}+\sqrt{19}$; е) 1,212121… или 1,21121112…?

1.7 Действительные числа

Определение. Числа вида $(-x)$, где $x \in R_+$, называются **отрицательными числами**, их множество обозначается R_-.

$R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}$, где R — множество действительных чисел.

Числа x и $-x$ ($x \in R_+$) называются **противоположными**. Они изображаются точками координатной прямой, симметрично расположенными относительно начала отсчета.

Определение. Расстояние от начала отсчета до точки координатной прямой, изображающей число x, называется **модулем числа *x***; обозначается $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Все операции во множестве R сводятся к операциям над положительными действительными числами, только при этом нужно учитывать правила обращения со знаками.

Сложение и вычитание действительных чисел

Правило 1. При сложении двух действительных чисел одного и того же знака получается число того же знака, модуль которого равен сумме модулей слагаемых.

Правило 2. При сложении двух действительных чисел различных знаков получается число, знак которого совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль, а модуль равен разности большего и меньшего модулей слагаемых.

Правило 3. Сумма противоположных чисел равна 0.

Свойства сложения в *R*:

1) коммутативность,

2) ассоциативность.

3) сократимость,

4) монотонность,

5) $\forall x\ (x + 0 = x)$ (0 – нейтральный элемент по сложению).

Вычитание в ***R*** определяется как *операция, обратная сложению*. Поскольку каждое число $b \in \boldsymbol{R}$ имеет противоположное ему число $(-b)$ такое, что $b + (-b) = 0$, то вычитание числа b равносильно сложению с числом $(-b)$:

$a - b = a + (-b)$

В отличие от остальных множеств операция вычитания *<u>всюду определена</u>* на множестве ***R***, т.е. для $\forall\ x, y \in \boldsymbol{R}\ \exists\ z \in \boldsymbol{R}\ (z = x - y)$.

Умножение и деление действительных чисел

***Правило* 1.** Произведением чисел x и y называется число z, модуль которого равен произведению модулей множителей $|z| = |x| \cdot |y|$, а знак положителен, если знаки множителей одинаковые, и отрицателен, если знаки множителей разные.

***Правило* 2.** $\forall x \in \boldsymbol{R}\ (x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0)$

Свойства умножения в *R*:

1) коммутативность;

2) ассоциативность;

3) дистрибутивность относительно сложения и вычитания;

4) 1 является нейтральным элементом относительно умножения $\forall x \in R_+ (x \cdot 1 = x)$,

5) свойство монотонности видоизменяется и выполняется только, если $z > 0$:

$\forall x, y, z \in \boldsymbol{R}\ (z > 0 \wedge x > y \supset x{\cdot}z > y{\cdot}z)$.

Если $z < 0$, то $\forall x, y \in \boldsymbol{R}\ (x > y \supset x\,z < y\,z)$.

Если же $z = 0$, то $\forall x, y \in \boldsymbol{R}\ (x > y \supset x{\cdot}z = y{\cdot}z)$.

6) свойство сократимости выполняется, если $z \neq 0$:

$$\forall x, y, z \in \boldsymbol{R}\ (z \neq 0 \wedge\ x{\cdot}z = y \cdot z \supset x = y)$$

т.е. обе части равенства можно делить на любое отличное от нуля число.

Определение. Если $x \neq 0$, то для $\forall\, y \in \boldsymbol{R}$ найдется такое z, что $y = x\,z$. Число z называется **частным от деления y на x.**

Таким образом, в $\boldsymbol{R}$ определено деление на любое число, отличное от 0.

Пример 21. Упростите выражение:

а) $|2x-6|$; б) $\frac{x-1}{|x-1|}$; в) $\sqrt{\left(\sqrt{21}-4\right)^2}$;

г) $\sqrt{\left(4-\sqrt{21}\right)^2}$; д) $\sqrt{(25-x)^2}$; е) $\sqrt{(x-25)^2}$

Решение.

а) $|2x-6| = \begin{cases} -(2x-6), \text{если}\ 2x-6<0; \\ 2x-6, \text{если}\ 2x-6\geq 0; \end{cases} = \begin{cases} 6-2x, \text{если}\ x<3; \\ 2x-6, \text{если}\ x\geq 3. \end{cases}$

б) $\frac{x-1}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x-1}{-(x-1)}, \text{если}\ x-1<0; \\ \frac{x-1}{x-1}, \text{если}\ x-1>0; \end{cases} = \begin{cases} -1, \text{если}\ x<1; \\ 1, \text{если}\ x>1. \end{cases}$

в) $\sqrt{\left(\sqrt{21}-4\right)^2} = \left|\sqrt{21}-4\right| = \sqrt{21} - 4$, так как $\sqrt{21} - 4 > 0$.

г) $\sqrt{\left(4-\sqrt{21}\right)^2} = \left|4-\sqrt{21}\right| = -(4 - \sqrt{21}) = \sqrt{21} - 4$, так как $4 - \sqrt{21} < 0$.

д) $\sqrt{(25-x)^2} = |25-x| = \begin{cases} -(25-x), \text{если}\ 25-x<0; \\ 25-x, \text{если}\ 25-x\geq 0; \end{cases} = \begin{cases} x-25, \text{если}\ x>25; \\ 25-x, \text{если}\ x\leq 25. \end{cases}$

Пример 22. Выясните, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $(5 - 3\sqrt{3})(5 + 3\sqrt{3})$;

б) $\sqrt{2} + 3\sqrt{32} + 0{,}5\sqrt{128} - 6\sqrt{18}$;

в) $2\sqrt{245} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125} - 2{,}5\sqrt{180}$.

Решение:

а) $(5 - 3\sqrt{3})(5 + 3\sqrt{3}) = 25 - 9 \cdot 3 = 25 - 27 = -2$, $-2 \in Z \subset Q$;

б) $\sqrt{2} + 3\sqrt{32} + 0{,}5\sqrt{128} - 6\sqrt{18} = \sqrt{2} + 3\sqrt{16\cdot 2} + 0{,}5\sqrt{64\cdot 2} - 6\cdot\sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{2} + 12\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 18\sqrt{2} = -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \in I$;

в) $2\sqrt{245} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125} - 2{,}5\sqrt{180} = 14\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - 15\sqrt{5} = 0$, $0 \in Q$.

Ответ: а) и в) — рациональные; б) — иррациональное.

Задания

90. Даны два действительных числа: $-0{,}7$ и $-0{,}72$. Назвать три числа, которые:

а) меньше меньшего; б) больше большего; в) между ними.

91. Отметьте на координатной прямой точки, изображающие действительные числа x, если:

а) $|\,x\,| = 3$; б) $|\,x\,| < 5$; в) $|\,x\,| > 2$.

92. Пусть R – множество всех действительных чисел.

$A = \{x \mid -2 < x < 4\}$ и $B = \{x \mid |\,x\,| < 3\}$ ($A \subset R$ и $B \subset R$).

Найдите множества: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $A\ B$; г) $\overline{A} \cap B$; д) $A \cap \overline{B}$;

е) $\overline{A} \cap \overline{B}$; ж) $A \cup \overline{B}$; з) $\overline{A} \cup B$; и) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

93. Сравните действительные числа:

а) –7,2 и – 7,3; б) – 2,178354 и – 2,178362;

в) $-\sqrt{3}$ и $-\dfrac{13}{7}$; г) $-\dfrac{8}{9}$ и $-\dfrac{7}{8}$.

94. Докажите, что число a рациональное, если:

а) $a = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$; б) $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

95. Выясните, каким числом — рациональным или иррациональным — является сумма $a + b$, разность $a - b$, произведение ab, частные $a{:}b$ и $b{:}a$, если:

а) $a = 2+\sqrt{3}$; $b = 2-\sqrt{3}$; б) $a = \sqrt{5}-4$; $b = 3+\sqrt{5}$.

96. Проверьте истинность следующих равенств:

а) $4-2\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}$; б) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3}-1$;

в) $\sqrt{5}-2 = \sqrt{9-4\sqrt{5}}$; г) $2-\sqrt{5} = \sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

97. Выполните действия над действительными числами:

а) (2,727 : (–0,9) + 1,9 · (–5,3) + 1,58) : 4,8;

б) 4,2 · (–0,3) : 0,9 – 5,6 : (–1,4) · 3,7;

в) ((3,28 – (–1,52)) : (–24) + (–1,3)) · (– 0,04);

г) $-\dfrac{3}{14} \cdot \dfrac{7}{9} - \dfrac{8}{15} : \left(-\dfrac{4}{5}\right) + \dfrac{1}{12}$;

д) $-\dfrac{11}{13} : \left(-1\dfrac{9}{13}\right) + 5{,}52 : (-13{,}8) - 0{,}1$;

е) $(0{,}45 - (-3{,}6)) \cdot \left(\left(-\dfrac{3}{8} - \left(-\dfrac{7}{12}\right) + \left(-\dfrac{1}{18}\right)\right)\right) : (-0{,}01)$;

ж) $\left(1{,}6 - 2\dfrac{1}{6} - \dfrac{41}{90}\right) \cdot \left(-3\dfrac{3}{5}\right) + 0{,}25 : (-1{,}25)$;

з) $-3{,}25 : \left(-5\dfrac{1}{5}\right) + 6{,}75 \cdot \left(\dfrac{47}{60} - 2\dfrac{17}{45} - (-1{,}65)\right)$;

и) $\dfrac{\left(\frac{3}{4} + 2{,}473 \cdot 0{,}05\right) \cdot 100 + 0{,}1581 : \frac{3}{50}}{3{,}06 - \frac{1}{20} \cdot 4 + 66 : 0{,}33 + \frac{7}{50} - 1 : \frac{1}{3}}$;

к) $17{,}81 : 0{,}0137 + \left(\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}003}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right)\cdot 4:\frac{1}{5}} - \dfrac{\left(0{,}3-\frac{3}{20}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{25}\right)\cdot\frac{1}{8}} \right) : 62\dfrac{1}{20}$.

Ответы: –2,4; 13,4; –0,148; $\dfrac{7}{12}$; 0; –100; $\dfrac{87}{25}$; $-\dfrac{1}{8}$; 0,45; 1301.

98. Упростите выражения:

а) $\left(\sqrt{48}:\sqrt{6}-\sqrt{14}:\sqrt{7}+2\sqrt{6}:\sqrt{3}\right):0{,}5\sqrt{2}$;

б) $\left(\sqrt{\left(\sqrt{2}-1{,}5\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}\right)^2$;

в) $\dfrac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}+\dfrac{5+2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$;

г) $\left(14\sqrt{5}+14\sqrt{20}-6\sqrt{45}+0{,}2\sqrt{125}\right)\cdot 10\sqrt{5}$;

д) $\left(\sqrt{14}-2\sqrt{35}\right)\cdot\dfrac{1}{7}\sqrt{7}+20$;

е) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1{,}5-\sqrt{5}\right)^3}-1$;

ж) $\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{39}-\dfrac{1}{2}\sqrt{26}\right):\dfrac{1}{6}\sqrt{13}+\sqrt{18}$;

з) $\dfrac{\sqrt{11}+3}{\sqrt{11}-3}+\dfrac{\sqrt{11}-3}{\sqrt{11}+3}$.

99. Упростите выражения:

а) $\sqrt{\left(3-2\sqrt{5}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(3\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2}$; в) $\sqrt{(x-2)^2}$;

г) $1-\dfrac{|1-x|}{1-x}$; д) $2+\dfrac{2x+4}{\sqrt{(2x+4)^2}}$; е) $\dfrac{\sqrt{(3-x)^2}}{x-3}+4x$.

ТЕСТ

1. Укажите верные высказывания о положительных и отрицательных числах.

а) независимо от значения x, $(-x)$ всегда будет числом отрицательным.

б) – (–7) — число положительное.

в) Если $a = 10$, то $-a = -10$.

г) Если $b = -8$, то $-(-b) = 8$.

2. Укажите неверные высказывания о модуле числа.

а) Модуль числа не может быть отрицательным.

б) Для любого числа модуль равен противоположному числу.

в) Модуль числа никогда не равен самому числу.

г) Модули противоположных чисел равны.

3. Укажите верные утверждения о выражении
$|a-3|-|a-2|$.

а) При любом a $|a-3|-|a-2|=a-3-a+2=-1$.

б) Независимо от a $|a-3|-|a-2|=1$.

в) Для 2 < a < 3 $|a-3|-|a-2|=-(a-3)-(a-2)=-a+3-a+2=-2a+5$.

г) $|a-3|-|a-2|=\begin{cases} 1,\ \text{для}\ a\le 2. \\ 5-2a,\ \text{для}\ 2<a<3, \\ -1,\ \text{для}\ a\ge 3. \end{cases}$

4. Найдите значение выражения $|0{,}224|:|-0{,}4|-|-0{,}24|+|0{,}08|$. Укажите верные ответы.

а) 0,4.
б) 1,08.
в) 1,12.
г) 0,04.

5. Решите уравнение $|-2x|=8$. Укажите верные ответы.

а) $x = -4$.
б) $x = 4$.
в) $x = -4$ или $x = 4$.
г) нет решения.

6. Укажите верные высказывания о числах.

а) Любое рациональное число является действительным.

б) Любое действительное число является иррациональным.

в) Любое действительное число является либо рациональным, либо иррациональным.

г) Любое действительное число является либо натуральным, либо противоположным ему.

7. Укажите неверные высказывания о действительных числах.

а) Если все десятичные приближения действительного числа с недостатком, начиная с некоторого, совпадают, то это число — рациональное.

б) Сумма двух бесконечных непериодических дробей есть всегда дробь непериодическая.

в) Произведение двух периодических десятичных дробей не может быть дробью непериодической.

г) Нет рационального числа, квадрат которого равен 17.

Тема 2. ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ИЗМЕРЕНИЕ

Величина — одно из основных математических понятий, которое возникло в древности. Оно подверглось в процессе долгого развития ряду обобщений.

В общем случае можно дать **аксиоматическое определение** любой величины.

Пусть:

1) R_+ — множество положительных действительных чисел;

2) M — множество всех предметов или явлений, которые обладают свойством A;

3) во множестве M выбран фиксированный элемент $e \in M$, который называется эталоном, или единицей измерения;

4) для некоторых элементов множества M определена операция сложения;

5) на множестве M определено бинарное отношение эквивалентности относительно свойства A.

Свойство A называют **аддитивно-скалярной величиной**, если существует отображение f множества M на множества R_+, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $f(e) = 1$;

2) если a и b — элементы множества M, эквивалентные друг другу, то $f(a) = f(b)$;

3) если во множестве M элементы a и b допускают сложение, это значит $a + b = c$, то $f(a) + f(b) = f(c)$.

Отображение f называется измерением величины A, а положительные действительные числа $f(a), f(b)\ldots$ — мерой величины, или ее значением.

Определение. Два объекта называются **равновеликими**, если значения их величин совпадают.

Определение аддитивно-скалярной величины может быть конкретизировано применительно к различным величинам.

Аксиоматическое определение длины отрезка.

Пусть:

1) R_+ — множество положительных действительных чисел;

2) M — множество всех отрезков;

3) Один отрезок из множества M выбран в качестве единичного;

4) Для всех отрезков, которые не имеют общих внутренних точек, определена операция сложения отрезков;

5) Во множестве M введено отношение эквивалентности (равенство отрезков — совпадение при наложении).

Свойство отрезка, называемое его **длиной**, это такое отображение f множества M на R_+, которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1) $f(e) = 1$, единичный отрезок имеет длину 1.

2) $a = b \supset f(a) = f(a)$, равные отрезки имеют равные длины.

3) $\forall a, b, c \in M\ (a + b = c \supset f(a) + f(b) = f(c))$.

Свойства длины отрезка.

1) При выбранной единице длины длина любого отрезка выражается положительным действительным числом, и для каждого положительного действительного числа есть хотя бы один отрезок, длина которого выражается этим числом.

2) При выбранной единице измерения e равные отрезки имеют равные значения их длин, и равным значениям длин двух отрезков соответствуют равные отрезки.

3) Если данный отрезок является суммой нескольких отрезков, то значение его длины равно сумме значений длин отрезков слагаемых, и наоборот: когда значение длины отрезка равно сумме значений длин нескольких отрезов, то и сам отрезок равен сумме этих отрезков

$c = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv m_e(c) = m_e(a_1) + \ldots + m_e(a_n)$.

4) Если отрезки a и b связаны равенством $b = xa$, где $x \in R_+$, то при выбранной единице длины e значение длины отрезка b равняется произведению числа x на значение длины отрезка a при той же единице измерения

$b = xa \equiv m_e(b) = x \cdot m_e(a)$

5) При замене единицы длины значение длины увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

В общем случае, переход от единицы измерения величины e к новой единице e_1 осуществляется путем умножения значения величины a с единицей e на значение величины e с новой единицей e_1.

Аналогичное определение можно дать и для площади фигуры.

Кроме равенства и равновеликости фигур в геометрии рассматривают отношение равносоставленности.

Определение. Многоугольники F_1 и F_2 называются **равносоставленными,** если их можно разбить на соответственно равные части.

Для приближенного измерения площадей плоских фигур можно использовать различные приборы, в частности, палетку.

Палетка — это прозрачная пластина, на которой нанесена сеть квадратов. Сторона квадрата принимается за 1, и чем меньше эта сторона, тем точнее можно измерить площадь фигуры.

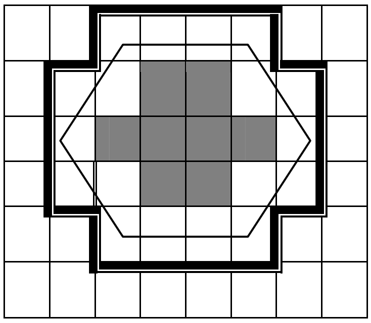


Рис. 1

Накладываем палетку на данную фигуру ***F***. Квадраты, которые целиком лежат внутри фигуры ***F***, образуют многоугольную фигуру ***P***; квадраты, имеющие с фигурой ***F*** общие точки или целиком лежащие внутри фигуры *F*, образуют многоугольную фигуру *Q*. Площади ***S(P)*** и ***S(Q)*** находят простым подсчетом квадратов. За приближенное значение площади фигуры ***F*** принимается среднее арифметическое найденных площадей:

$$S(F) = \frac{S(Q)+S(P)}{2}.$$

В начальном курсе математики учащиеся измеряют площади фигур с помощью палетки таким образом: подсчитывают число квадратов, которые лежат внутри фигуры *F*, и число квадратов, через которые проходит контур фигуры; затем второе число делят пополам и прибавляют к первому. Полученную сумму считают площадью фигуры *F*.

Пример 23. Построить отрезок, длина которого 3,2*e*. Каким будет численное значение длины этого отрезка, если единицу длины *E* увеличить в 3 раза?

Решение. Построим произвольный отрезок и будем считать его единичным. Затем построим прямую, отметим на ней точку *A* и отложим от нее 3 отрезка, длины которых равны *e*. Получим отрезок *AB*, длина которого 3*e*. Чтобы получить отрезок длиной 3,2*e,* надо ввести новую единицу длины. Для этого единичный отрезок надо разбить либо на 10 равных частей, либо на 5, поскольку $0{,}2 = \frac{1}{5}$. Если от точки *B* отложить отрезок, равный $\frac{1}{5}$ единичного, то длина отрезка *AC* будет равна 3,2*e*.

Чтобы выполнить второе требование задачи, воспользуемся свойством 5, согласно которому при увеличении единицы длины в 3 раза численное значение длины данного отрезка уменьшается в 3 раза. Разделим 3,2 на 3, получим: $3{,}2 : 3 = 3\frac{1}{5} : 3 = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$. Таким образом, при единице длины 3*e* численное значение длины построенного отрезка *AC* будет равно $1\frac{1}{15}$.

Пример 24. Третья часть единичного отрезка уложилась в отрезке *AB* два раза. Укажите, какие из следующих высказываний истинны:

а) длина отрезка AB выражается конечной десятичной добью (или бесконечной десятичной дробью с периодом 0);

б) длина отрезка AB выражается бесконечной десятичной дробью;

в) длина отрезка AB выражается бесконечной периодической десятичной дробью;

г) длина отрезка AB выражается бесконечной непериодической десятичной дробью.

Ответ обоснуйте.

Решение. Так как отрезок $\frac{1}{3}e$ укладывается в AB два раза, то длина AB равна $\frac{2}{3}$. Превратим дробь $\frac{2}{3}$ в десятичную:

$$\frac{2}{3} = 0,666... = 0(6).$$

Таким образом, истинным являются высказывание б).

Пример 25. Выразите:

а) в квадратных метрах: 4 км^2 2 га 38 а;

б) в килограммах: 3 т 32 кг 940 г;

в) в часах: 27 сут. 7 ч 45 мин.

Решение. Для выполнения этого задания воспользуемся соотношением между единицами измерения соответствующих величин.

а) 1 а = 100 м^2

1 га = 10000 м^2

1 км^2 = 1000000 м^2

Тогда 4 км^2 2 га 38 а = 4 · 1000000 +2 · 10000 + 38 · 100 = 4023800 м^2.

б) 1 т = 1000 кг

1 кг = 1000 г, поэтому 1 г = 0,001 кг

3 т 32 кг 940 г = 3 · 1000 + 32 + 940 · 0,001 = 3032,940 кг.

в) 1 сут. = 24 ч

1 ч = 60 мин, поэтому 1 мин = $\frac{1}{60}$ ч

27 сут. 7 ч 45 мин = 27 · 60 + 7 + 45 · $\frac{1}{60}$ = 1627,75 ч.

Пример 26. Найдите с помощью палетки площадь фигуры ***F*** (рис. 1), считая, что палетка разбита на квадраты со стороной 1 см.

Решение. На фигуру ***F*** наложим палетку и подсчитаем число квадратов, которые лежат внутри фигуры ***F* (их 8)**, и число квадратов, через которые проходит контур фигуры (их 18). Тогда приближенное значение площади фигуры ***F*** равно 8 + 18 : 2 = 17 (см^2).

Задания

100. Докажите, что отношения: а) «быть равными» на множестве отрезков; б) «иметь одинаковую массу» на множестве физических тел; в) «быть равновеликими» на множестве геометрических фигур — являются отношениями эквивалентности. Назовите классы, на которые разделяет это отношение каждое из множеств.

101. Что понимают под отображением f: $M \to R_+$ при измерении: а) длины отрезка; б) массы тела; в) площади фигуры; г) времени? Объясните, как осуществляется такое отображение в каждом случае.

102. В результате измерения величин были получены следующие результаты: а) 1 км 200 м; б) 3,75 кг; в) 18°21'; г) 13 ч 45 мин; д) 3,1 $м^2$; е) 120 м/с; ж) 15 $мм^3$; з) 4300 р. Назовите, значения каких величин приведены выше.

103. Назовите основные и производные единицы измерения величин:

а) длины; б) площади; в) массы; г) время; д) скорости.

104. На множестве M = {2,5 дм, 3 м, 35 см, 420 мм} задано отношение «больше». Постройте граф этого отношения и перечислите свойства, которыми он обладает.

105. Сравните величины:

а) 12,5 м и $\frac{1}{8}$ км; б) 45 мин и $\frac{7}{10}$ ч;

в) 325 кг и 0,32 т; г) 75 $см^2$ и 0,6 $дм^2$;

д) 36 км/ч и 10 м/с; е) 12'30" и $\frac{5'}{24}$.

106. Как изменится значение величины, если ее единицу измерения:

а) уменьшить в 3 раза;

б) увеличить в 5 раз;

в) сначала уменьшить в 4 раза, затем увеличить в 6 раз;

г) сначала увеличить в 60 раз, затем еще увеличить в 6 раз;

д) сначала уменьшить в 10 раз, затем еще уменьшить в 100 раз;

е) сначала уменьшить в 5 раз, затем увеличить во столько же раз?

107. Как изменится объем бруса, если его длину увеличить на 50%, ширину не менять, а высоту уменьшить в 1,5 раза?

108. Выразите:

а) в сантиметрах: 2 м 3 дм 7 см; 4 дм 1 см; 7 м 3 см; 15 мм; 3 мм;

б) в килограммах: 3 т 225 кг; 1563 кг 750 г; 1725 г; 350 г; 1 т 750 г;

в) в гектарах: 796000 $м^2$; 20000 $м^2$; 1500 $м^2$; 450 $м^2$;

г) в метрах в секунду: 72 км/ч; 1,8 км/ч; 360 см/с; 14400 см/с.

109. Луна делает полный оборот вокруг Земли на протяжении 27 сут. 7 ч 43 мин 11 с. Сколько это секунд?

110. Масса Земли приблизительно равна $5{,}976 \cdot 10^{27}$ г, а масса Солнца — $1{,}99 \cdot 10^{33}$ г. Найдите массу Земли и Солнца в килограммах, в тоннах.

111. В астрономии для выражения расстояний пользуются единицей «световой год». Это расстояние, которое проходит свет на протяжении года. Считая год равным 365,25 сут. и скорость света в вакууме $3{,}00 \cdot 10^5$ км/с, выразите световой год в километрах.

112. Какие из следующих предложений являются истинными?

а) Длина одного и того же отрезка выражается только одним действительным числом.

б) Длина одного и того же отрезка может выражаться разными числами.

в) Длины двух неравных отрезков всегда выражаются разными числами.

г) Длины двух неравных отрезков могут выражаться одним и тем же числом.

д) Длины любых двух равных отрезка при одной и той же единице измерения всегда выражаются одним и тем же числом.

е) Длины двух равных отрезков могут выражаться разными числами.

113. Нарисуйте два произвольных отрезка разной длины. С помощью циркуля и линейки, не измеряя их длин, найдите их сумму и разность. Результат проверьте измерением. При каком условии существует сумма отрезков, их разность? Какая связь между суммой и разностью отрезков и значением их величин?

114. Найдите отношения:

а) 1,5 мм к 2 см; б) 4 дм к 8 см; в) 3,838 км к 19 м;

г) 20 см к 1,6 м; д) 225 м к 9 км.

Запишите обратные им соотношения.

115. Отметьте на прямой три равных отрезка: AB, BC и CD. Чему будет равна длина каждого из этих отрезков, если за единицу длины будет выбрана длина отрезка:

а) AB; б) AC; в) AD?

116. Численное значение длины отрезка, измеренной при помощи единицы e_1 равно 6, а измеренной при помощи единицы e_2 равно 4. В каком отношении находятся между собой единицы e_1 и e_2?

117. Из одного куска проволоки, не разрезая его, надо сделать каркас: а) треугольной пирамиды; б) четырехугольной пирамиды; в) куба. Каждое ребро этих многогранников равно 1 см. Какова наименьшая длина такой проволоки?

118. Существует ли на плоскости три точки A, B и C, такие, что:

а) $AC = 15$ см, $AB = 8$ см, $BC = 7$ см;

б) $AC = 8$ см, $AB = 25$ см, $BC = 40$ см;

в) $AC = 14$ см, $AB = 30$ см, $BC = 40$ см?

119. Объясните процесс измерения длины отрезка a с помощью единичного отрезка e, если:

а) $a = 4e$; б) $a = 2\frac{1}{3}e$;

в) $a = 3{,}25e$; г) $a = 0{,}(4)e$;

д) $a = 1{,}1(2)e$; е) $a = 1{,}1010010001\ldots e$.

120. Запишите длину каждого из построенных в предыдущей задаче отрезков при условии, что осуществляется переход к новой единице измерения e_1:

а) $e_1 = 1\frac{1}{2}\ e$; б) $e_1 = 3e$;

в) $e_1 = 0{,}725e$; г) $e_1 = 1{,}5e$.

Проанализируйте, как изменилась при этом значение величины, сделайте вывод.

121. Запишите обычной дробью длину отрезка, равную:

а) $0{,}425e$; б) $3{,}121212\ldots e$; в) $0{,}53131313\ldots e$; г) $1{,}30(9)e$; д) $1{,}3(09)e$.

122. Запишите десятичной дробью длину отрезка, равную:

а) $1\frac{1}{5}\ e$; б) $\frac{73}{20}\ e$; в) $\frac{7}{15}e$; г) $2\frac{4}{7}e$; д) $\frac{7}{21}e$.

123. Решите следующие задачи и обоснуйте выбор действий над величинами.

а) Расстояние по железной дороге от Бреста до Минска составляет 347 км, от Минска до Орши — 212 км, а от Орши до Смоленска — 119 км. Найдите расстояние от Бреста до Смоленска.

б) Длина окружности Земли по экватору — 40075704 м, а по меридиану — 40008548 м. На сколько метров длина окружности Земли по экватору больше длины по меридиану?

в) Расстояние между двумя городами на карте составляет 3 см $1\frac{1}{4}$ мм. Найдите расстояние между этими городами, если масштаб карты равен 1:12000?

г) Длина реки равна 328 км. Какова длина этой реки на карте, если масштаб карты равен 1:12000?

124. Площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_1 и F_2. Значит ли это, что фигура F составлена из фигур F_1 и F_2?

125. Два треугольника имеют равные площади. Следует ли из этого, что они равны?

126. Известно, что $S(F_1) > S(F_2)$. Следует ли отсюда, что $F_2 \subset F_2$?

127. Является ли отношение «быть равносоставленными» на множестве плоских геометрических фигур отношением эквивалентности; отношением порядка? Ответ обоснуйте.

128. Среди следующих предложений назовите истинные.

а) Равные фигуры всегда равновеликие.

б) Равновеликие фигуры всегда равные.

в) Если фигура F_1 целиком содержится в фигуре F_2, то площадь фигуры F_1 меньше, чем площадь фигуры F_2.

г) Если площадь фигуры F_1 меньше, чем площадь фигуры F_2, то фигура F_1 целиком содержится в фигуре F_2.

д) Если фигура F составлена из фигур F_1 и F_2, то ее площадь равна сумме площадей фигур F_1 и F_2.

е) Если площадь фигуры F равна сумме площадей фигур F_1 и F_2, то фигура F составлена из фигур F_1 и F_2.

ж) Если две фигуры равновеликие, то они равносоставленные.

з) Если две фигуры равносоставленные, то они равновеликие.

129. Верно ли, что:

а) Численные значения площади одной и той же фигуры могут быть различными?

б) Численные значения неравных фигур могут быть равными?

в) Равновеликие фигуры равны?

130. Как изменится значение площади фигуры, если:

а) единицу измерения площади увеличить в 3 раза;

б) единицу измерения длины уменьшить в 3 раза?

131. Известно, что площадь фигуры 34,78 см^2. Каким будет численное значение площади этой фигуры, если измерить ее в квадратных дециметрах?

132. Длину стола измеряли сначала в сантиметрах, потом в дециметрах. В первом случае получили число на 108 больше, чем во втором. Чему равна длина стола?

133. Площадь прямоугольника равна 12 см^2, длины его сторон выражаются натуральными числами. Сколько различных прямоугольников можно построить согласно этим условиям? Сколько решений имеет задача, если длина сторон прямоугольника записывается рациональными числами?

134. Прямые a и b параллельны. Точка B движется по прямой b, занимая положение B_1, B_2, B_3 и т.д., а точки A и C остаются неподвижными. Равновелики ли треугольники AB_1C, AB_2C и т.д.?

135. Выразите:

а) в квадратных сантиметрах: 3 дм^2; 4 дм^2 5 см^2; 1 м^2 8 дм^2; 160 мм^2; 75 мм^2;

б) в квадратных метрах: 2 км^2; 1 км^2 2500 м^2; 3 га 750 м^2; 525 дм^2; 450 дм^2 200 см^2; 223500 мм^2;

в) в гектарах: 1 км^2; 2 км^2 45000 м^2; 22500 м^2; 1100 м^2.

136. На фигуру F наложили палетку и подсчитали, что внутри фигуры F содержится фигура, составленная из 28 единичных квадратов, а фигура F содержится внутри фигуры, состоящей из 35 единичных квадратов. Каково приближенное значение площади фигуры F?

137. Начертите круг радиуса 2 см на клетчатой бумаге и найдите его площадь, используя клетчатую бумагу как палетку, состоящую из квадратов со стороной, равной:

а) 1 см; б) 0,5 см.

Вычислите площадь этого круга по формуле, приняв $\pi = 3{,}14$. Сравните полученные результаты. Считая найденную по формуле площадь круга точной, найдите в процентах ошибку измерения с помощью палетки.

138. Нарисуйте две произвольные фигуры. Найдите их площадь в квадратных сантиметрах с помощью палетки. Выразите площадь этих фигур:

а) в квадратных миллиметрах;

б) в квадратных единицах, если сторона единичного квадрата равна 0,5 см.

139. Как изменится площадь прямоугольника, если:

а) основание его увеличить в 4 раза, а высоту уменьшить в 2 раза;

б) основание и высоту увеличить в 3 раза;

в) основание увеличить в 2 раза, а высоту не изменять;

г) основание увеличить в 4 раза, а высоту уменьшить во столько же раз?

140. Длину каждой стороны квадрата увеличили в 1,5 раза. Во сколько раз увеличилась площадь квадрата?

141. Основание и высоту прямоугольника увеличили на 40%. На сколько процентов увеличилась его площадь?

142. Основание прямоугольника уменьшили на 40%, а высоту увеличили на 40%. На сколько процентов изменилась площадь прямоугольника?

143. Длины двух неравных сторон прямоугольника записываются иррациональными числами. Может ли: а) значение площади этого прямоугольника быть рациональным числом; б) данный прямоугольник быть равновеликим прямоугольнику, длины сторон которого записываются рациональными числами. В случае положительного ответа приведите примеры.

144. Решите следующие задачи и обоснуйте выбор действий над величинами при их решении.

а) В питомнике на площади 2 га 7650 м^2 посадили смородину, малину и крыжовник. Под смородину отвели 8460 м^2, под малину 1 га 3270 м^2. На какой площади посадили крыжовник?

б) Ширина захвата тракторной овощной сеялки равна 2 м 80 см. Какую площадь можно засеять этой сеялкой за 10 ч работы при средней скорости движения сеялки 3 км/ч?

в) Раньше сажали яблони в ряду на расстоянии 10 м друг от друга и 10 м между рядами, а теперь сажают на расстоянии 6 м в ряду и 8 м между рядами. На сколько больше яблонь сажают на каждом 1,2 га площади сада?

г) Пришкольный участок прямоугольной формы имеет площадь 1200 м^2. Длина участка другой школы в 2,5 раза больше, а ширина в 5/3 раза меньше, чем первого участка. Чему равна площадь второго участка?

145. Какие из следующих предложений являются истинными?

а) Масса одного и того же тела всегда выражается одним и тем же числом.

б) Масса одного и того же тела может выражаться разными числами.

в) Массы двух разных по объему тел всегда выражаются разными числами.

г) Массы двух разных по объему тел могут выражаться одним и тем же числом.

д) Массы двух равных по объему тел всегда выражаются равными числами.

е) Массы двух равных по объему тел могут выражаться разными числами.

146. Выразите:

а) в килограммах: 2 т 725 кг; 1 т 354 кг 780 г; 32 кг 925 г 700 мг;

б) в тоннах: 12 620 кг; 1780 кг 500 г; 280 г; 125 г 375 мг.

147. На складе имеются гвозди в коробках по 24, 23, 17 и 16 кг. Может ли кладовщик отпустить со склада 100 кг гвоздей, не распечатывая коробки?

148. Имеется 9 металлических пластинок и рычажные весы. По виду все пластинки одинаковые, но одна из них легче, чем остальные. Как с помощью двух взвешиваний найти более легкую пластинку? Какие действия над массами при этом выполняются?

149. Среди 27 монет одна фальшивая. По виду ее нельзя отличить от остальных. Определите фальшивую монету с помощью трех взвешиваний на рычажных весах, если известно, что масса фальшивой монеты больше, чем масса настоящих монет.

150. На одной чаше весов находится 2 кусочка мыла, а на другой — 3/2 такого же кусочка и еще 3/40 кг. Весы находятся в равновесии. Найдите массу куска мыла.

151. Масса бидона, наполненного молоком, равна 34 кг, а масса бидона, наполовину наполненного молоком, равна 17,75 кг. Найдите массу пустого бидона. Какие операции над массой и ее значением при этом выполнялись?

152. В мешочке находится 3 кг 600 г круп. Как разделить с помощью весов и гири в 200 г крупу на три части массой 800 г, 800 г и 2 кг, сделав только три взвешивания? Какие действия над массой при этом необходимо выполнить?

153. Решите следующие задачи и обоснуйте выбор действий над величинами при их решении.

а) Автомобиль израсходовал за три поездки 227,5 кг топлива. За третью поездку было израсходовано топлива на 16,25 кг больше, чем за вторую, а за вторую — на 28,75 кг больше, чем за первую. Сколько километров проехал автомобиль за вторую поездку, если за третью он проехал на 360 км больше, чем за первую?

б) Сбор 60 кг макулатуры сохраняет от вырубки одно дерево, которое росло в лесу более 50 лет. Сколько деревьев сохранят ученики одной школы, если они соберут больше чем 7200 кг макулатуры? Сколько макулатуры необходимо собрать, чтобы сохранить от высечки делянку площадью 5600 м^2, если на 100 м^2 в среднем растет 19 деревьев?

в) Ученики одной школы собрали 17 т 840 кг макулатуры. Сколько тетрадей можно сделать из этой макулатуры, если при ее переработке из каждых 100 кг макулатуры получается 75 кг чистой бумаги, а каждые 10 тетрадей имеют массу 320 г?

154. Выразите в минутах, часах, сутках: а) 1 млн. секунд; б) 2 млрд. секунд.

155. Найдите сумму величин:

а) 3 ч 15 мин 46 с и 2 ч 21 мин 11 с;

б) 2 ч 31 мин 25 с и 1 ч 28 мин 35 с;
в) 7 ч 43 мин 37 с и 5 ч 37 мин 43 с.

156. Найдите разность величин:
а) 2 ч 28 мин 34 с и 1 ч 21 мин 19 с;
б) 6 ч 13 мин 11 с и 2 ч 12 мин 45 с;
в) 5 ч 22 мин 19 с и 3 ч 49 мин 56 с.

157. Увеличьте:
а) 3 ч 15 мин в 3 раза;
б) 2 ч 21 мин 25 с в 4 раза;
в) 3 ч 17 мин 38 с в 6 раз.

158. Уменьшите:
а) 3 ч 36 мин в 3 раза;
б) 8 ч 31 мин 44 с в 4 раза;
в) 5 ч 49 мин 36 с в 6 раз в 6 раз.

159. Второй космический полет П.И. Климука с экипажем начался 24 мая и закончился 26 июля 1975 г. Найдите продолжительность космического полета.

160. Самолет поднялся в воздух в 12 ч 55 мин и приземлился в 15 ч 23 мин. Найдите продолжительность полета самолета.

161. Коле исполнилось 14 лет 2 месяца 12 дней, он младше Володи на 3 года 11 месяцев 25 дней. Сколько лет, месяцев и дней Володе?

162. Через 5 лет возраст брата будет относиться к возрасту сестры как 5 : 3. Сколько лет каждому из них сейчас, если год назад брат был вдвое старше сестры?

ТЕСТ

1. Выберите истинные утверждения.
а) Существуют равновеликие, но не равносоставленные фигуры;
б) не существует равновеликих, но не равносоставленных многоугольников;
в) если фигуры равносоставленные, то они равновеликие;
г) фигуры равновелики тогда и только тогда, когда они равносоставлены.

2. Выберите пары величин, между которыми существует прямо пропорциональная зависимость.
а) Расстояние и скорость при равномерном движении;
б) расстояние и время при равномерном движении;
в) скорость и время при равномерном движении;
г) радиус круга и его площадь.

3. Выберите истинные утверждения.
а) Длина отрезка, несоизмеримого с единичным отрезком, выражается иррациональным числом;

б) длина отрезка, соизмеримого с эталоном, выражается рациональным числом. Это число не может быть целым;

в) пример несоизмеримых отрезков — сторона квадрата и его диагональ;

г) отрезок соизмерим с эталоном, если эталон укладывается в отрезке целое число раз.

4. Единицу длины отрезка уменьшили в 4 раза. Как изменится численное значение длины отрезка?

а) Увеличится в 4 раза;

б) уменьшится в 4 раза;

в) не изменится;

г) уменьшится в 2 раза.

5. Единицу длины отрезка уменьшили в 4 раза. Как изменится длина отрезка?

а) Увеличится в 4 раза;

б) уменьшится в 4 раза;

в) не изменится;

г) уменьшится в 2 раза.

6. Единицу площади увеличили в 4 раза. Как изменится численное значение площади измеряемого многоугольника?

а) Увеличится в 4 раза;

б) уменьшится в 4 раза;

в) не изменится;

г) уменьшится в 16 раз.

7. Выберите пары величин, между которыми существует обратно пропорциональная зависимость.

а) Расстояние и скорость при равномерном движении;

б) расстояние и время при равномерном движении;

в) скорость и время при равномерном движении;

г) цена и стоимость.

8. Выберите истинное утверждение.

а) Существуют геометрические фигуры, не имеющие площади;

б) фигура имеет площадь тогда и только тогда, когда она плоская;

в) если фигура плоская, то она имеет площадь;

г) любая плоская фигура имеет либо площадь, либо длину.

9. Выберите истинное утверждение.

а) Любые два отрезка всегда имеют общую меру;

б) соизмеримые отрезки имеют единственную общую меру;

в) соизмеримые отрезки имеют бесконечное множество общих мер;

г) два отрезка соизмеримы, если меньший отрезок укладывается в большем целое число раз.

10. Выберите истинные утверждения.

а) Отрезки длиной 6 см и 8 см соизмеримы; их общая мера — отрезок длиной 3 см;

б) отрезки длиной 6 см и 8 см несоизмеримы, так как ни один из них не уложится в другом целое число раз;

в) отрезки длиной 6 см и 8 см соизмеримы; их общая мера — отрезок длиной 1 см;

г) отрезки длиной 6 см и 8 см соизмеримы; их общая мера — отрезок длиной 5 мм.

11. Выберите истинное утверждение.

а) Сторона квадрата и его диагональ соизмеримы в любом квадрате;

б) сторона квадрата и его диагональ могут быть соизмеримы;

в) ни в каком квадрате сторона несоизмерима с диагональю;

г) ни в каком прямоугольнике стороны несоизмеримы с диагональю.

12. Для измерения площади квадрата со стороной 6 см в качестве мерки выбрали прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом, равным 1 см. Чему равно численное значение площади квадрата при выбранной единице измерения?

а) 36 кв. ед;

б) 6 кв. ед;

в) 18 кв. ед;

г) 72 кв. ед.

13. Выберите истинные утверждения.

а) 30 см^2 больше 1 дм^2;

б) 30 см^2 меньше 1 дм^2;

в) 30 см^2 равно 3 дм^2;

г) 30 см^2 равно 0,03 дм^2;

д) 30 см^2 равно 0,3 дм^2.

14. Выберите истинное утверждение.

а) Равновеликие треугольники — это треугольники, соответствующие стороны которых равны;

б) существуют равные, но не равновеликие треугольники;

в) существуют равновеликие, но не равные треугольники;

г) треугольник не может быть равновелик четырехугольнику.

15. Равносоставленные многоугольники — это:

а) многоугольники, которые можно сложить из одинакового количества равных треугольников;

б) многоугольники, которые можно сложить из одинакового количества равновеликих треугольников;

в) многоугольники, имеющие одинаковое количество углов;

г) многоугольники, имеющие равные площади.

16. Выберите истинные утверждения.

а) Любые два равных многоугольника равновелики;

б) любые два равновеликих многоугольника равны;

в) любые два равных многоугольника равносоставлены;

г) любые два равносоставленных многоугольника равновелики.

17. В 1 м^2 содержится:
а) 100 см^2;
б) 1000 см^2;
в) 100 000 см^2;
г) 10 000 см^2.
18. В 1 т содержится:
а) 10 ц;
б) 1000 ц;
в) 100 ц;
г) 10000 ц.
19. В 1 л содержится:
а) 10 дм^3;
б) 1 дм^3;
в) 100 дм^3;
г) 1000 дм^3.
20. 1 га — это:
а) 10 000 м^2;
б) 1000 м^2;
в) 100 м^2;
г) 10 м^2.
21. Чтобы увеличить точность измерения площади фигуры с помощью палетки, нужно:
а) взять палетку, разбитую на более мелкие квадраты;
б) взять палетку, разбитую на более крупные квадраты;
в) наложить палетку на фигуру несколько раз разными способами и найти среднее арифметическое значение всех результатов;
г) наложить палетку на фигуру несколько раз разными способами и выбрать наибольший результат.
22. Выберите пары величин, которые можно сравнить между собой.
а) Периметр многоугольника и площадь многоугольника;
б) периметр многоугольника и длину отрезка;
в) массу тела и объем тела;
г) объем тела и площадь поверхности тела.
23. Выберите истинное утверждение.
а) Можно сравнивать величины, только если они измерены одной и той же единицей;
б) можно сравнивать только однородные величины;
в) можно сравнивать любые величины;
г) можно сравнивать величины, характеризующие один и тот же объект.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Быкова, Т.П.** Тестирование как форма текущего контроля знаний студентов / Начальная школа. — 2011. — № 2. — С. 26—29.
2. **Виленкин, Н.Я.** Математика: учеб. пособие для студентов пед. институтов / Н.Я. Виленкин, А.М. Пышкало и др. — М.: Просвещение, 1977. — 352 с.
3. **Кожух, І.Р.** Зборнік задач по матэматыцы: вучэб. дапам. для пед. ВНУ / І.Р. Кожух. — Мінск: Вышэйшая школа, 1994. – 162 с.
4. **Кравец, Е.В.** Числа и функции в тестах: учеб.-метод. пособие / Е.В. Кравец, А.М. Радьков. — Минск: Изд. В.М. Скакун, 2000. — 192 с.
5. **Николаева, В.В.** Методические рекомендации к практическим занятиям по математике для студентов 4 курса педагогического факультета / В.В. Николаева, Л.А. Бондарева. — Могилев, 1987. — 20 с.
6. **Стойлова, Л.П.** Математика: учебник для студ. высш. пед. учеб. заведений / Л.П. Стойлова. — М.: Издательский центр «Академия», 1999. – 424 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ
О ЧИСЛЕ

Учебно-методические материалы

Составители:
Лещенко Лариса Васильевна
Гостевич Татьяна Васильевна

Технический редактор *А.Л. Позняков*
Компьютерная верстка *А.Л. Позняков*

Подписано в печать .2012.
Формат 60x84/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 72 экз. Заказ № .

Учреждение образования "Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004 г.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
УО «МГУ им. А.А. Кулешова». 212022, Могилев, Космонавтов, 1.