Л.А. Романович

ПРИМЕРЫ ОБЩИХ СТРУКТУР НА ГРУППОИДЕ ЛИ $\Pi^k(B)$

При изучении геометрических структур на гладких многообразиях важное значение имеет понятие главного расслоения. Основные понятия и факты сформулированы в терминах главных расслоений. Другой подход к построению этой теории развит в работах Ш. Эресмана. Этот подход базируется на понятиях группоида Ли, алгеброида Ли и k-струи гладкого отображения.

Целью работы является построение примеров общих структур на группоиде Ли $\Pi^k(B)$, состоящем из k-струй локальных диффеоморфизмов многообразия B

$$\Pi^k(B) = \left\{ j_x^k\varphi \middle| x \in B, \varphi \in Diff(B) \right\}.$$

Построим обобщения примеров некоторых структур, известных для расслоения реперов высших порядков, которые рассматривались в работах Д. Алексеевского [1], В. Гийемина и Ш. Стернберга [2], Нго Ван Кё [3].

1. Канонический морфизм группоидов Ли

$$\pi_k^{k-1} : \Pi^k(B) \to \Pi^{k-1}(B): \ j_x^k\varphi \to j_x^{k-1}\varphi;$$

2. Представление алгеброида Ли $A\Pi^k(B)$ как алгеброида Ли J^kTB k-струй векторных полей на B;

3. Скобка с усечением $A\Pi^k(B) \wedge A\Pi^k(B) \to A\Pi^{k-1}(B)$, являющаяся морфизмом векторных расслоений;

4. Представление группоида Ли $\Pi^k(B)$ как группоида Ли изоморфизмов слоев векторного расслоения, сохраняющих скобку с усечением;

5. Фундаментальная форма Θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ со значениями в алгеброиде Ли $A\Pi^{k-1}(B)$.

Остановимся более подробно на этих из примерах.

Если $r \le k$ то можно построить отображение усечения

$\pi_k^r : \Pi^k(B) \to \Pi^r(B)$: $j_x^k f \to j_x^r f$, причем если $s \le r \le k$.

Рассмотрим алгеброид Ли группоида Ли $\Pi^k(B)$, который состоит из k-струй векторных полей на B. Это множество является векторным расслоением, которое мы обозначим $(J_k(TB), p, B)$. Скобка с усечением определяется следующим образом:

$$[j^kX, j^kY] = j^{k-1}[X, Y], \text{ если } X, Y \in \Gamma(TB).$$

Расслоение алгебр Ли с усечением $J_k(TB)$ – векторное расслоение с изоморфизмом слоев $J_x^k(TB) \to J_y^k(TB)$ и проекцией на базу $p: J^k(TB) \to B, j_x^k X \to x$. Слоем расслоения $J_k(TB)$ в точке x является алгебра Ли с усечением $J_x^k(TB)$.

Зафиксируем точку $x \in B$. Множество $\Pi^k(B)_x$ является главным расслоением со структурной группой $G_x^k(B)$ и проекцией на базу $\pi: j_x^k\varphi \to \beta(j_x^k\varphi)$. Пусть $\xi \in \Pi^k(B)_x$ – репер в точке $y \in B$. Этот репер может быть рассмотрен также, как изоморфизм алгебр Ли с усечением $\xi: J_x^{k-1}(TB) \to J_y^{k-1}(TB)$.

Следовательно группоида Ли $\Pi^k(B)$ можно рассматривать как группоид Ли изоморфизмов слоев векторного расслоения, сохраняющих скобку с усечением.

Пусть $\xi \in \Pi^k(B)_x$ – репер в точке $y \in B$. Так как пространства J_y^kTB и $T_{\xi_x^y}\Pi^k(B)_x$ изоморфны, то произвольному реперу $\xi = j_x^k\varphi$ и локальному векторному полю X на B соответствует изоморфизм

$$J_x^{k-1}TB \to T_\xi\Pi^{k-1}(B)_x: \ j_x^{k-1}X \to (\varphi_* X)_{\xi^{k-1}}^{k-1}.$$

Определим фундаментальную форму Θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ следующим образом. Пусть $p \in T_\xi^\alpha\Pi^k(B)$ – α-вертикальный касательный вектор в точке ξ. Тогда касательный вектор p можно представить как лифт векторного поля X_ξ^k. Поставим в соответствие вектору $p = X_\xi^k$ в соответствие касательный вектор $X_{\bar{y}}^k \in A\Pi^k(B)$ с помощью правого умножения на ξ^{-1}. Затем к вектору $X_{\bar{y}}^k$ применим операцию усечения π_k^{k-1}. Наконец переместим полученный вектор в точку x с помощью отображения γ^{-1}. Композиция указанных отображений $\Theta^k = \gamma^{-1} \circ \pi_{k-1}^k \circ \xi^{-1}$ называется фундаментальной формой группоида Ли $\Pi^k(B)$.

Построенные примеры общих структур на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ играют важную роль в приложениях теории группоидов Ли.

Литература

1. *Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – Т. 28 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, – С. 5–289.

2. *Гийемин В. Стернберг Ш.* Алгебраическая модель транзитивной дифференциальной геометрии // Математика (сб. переводов). – 1966. – Т. 10, N 4. – С. 3–31.

3. *Ngo van Que.* Du prolongement des espaces fibres et des struktures infinitesimales // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1967. – T. 17, N 1. – P. 159–223.