УДК 517.925.42

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДЛЯ СИСТЕМ ЛЬЕНАРА С ЧЕТЫРЬМЯ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

И.Н. Сидоренко (кафедра математики и информатики)

1. Введение. Одной из нерешенных задач качественной теории дифференциальных уравнений на плоскости является задача оценки максимального числа предельных циклов на плоскости, известная также как 16-я проблема Гильберта [1]. Ввиду сложности решения поставленной задачи для полиномиальных систем автономных дифференциальных уравнений на плоскости С. Смейл предложил начать решение данной проблемы для систем Льенара, которые обладают рядом свойств, упрощающих их качественное исследование [2].

Рассматривается семейство систем Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y,\ \frac{dy}{dt} = g(x) - f(x)y, \tag{1}$$

где $g(x) = x(1-x)(1-Lx)(1-Mx)$, $-1 < L < 0$, $M > 0$, а $f(x)$ – полином второй степени.

Целью работы является оценка максимального количества предельных циклов с помощью построение прогнозной функции предельных циклов.

2. Предварительные результаты

Система (1) также может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \ \frac{dy}{dt} = -g(x) \tag{2}$$

С. Смейл в своей работе [3] поддержал гипотезу, выдвинутую в работе [2] о том, что система Льенара (2) в случае $g(x) = x$, а $F(x)$ – полином степени $2k+1$ и $F(0) = 0$, может иметь не более k предельных циклов вокруг антиседла $O(0,0)$.

Мы предлагаем следующее уточнение гипотезы Смейла [5], которое будет использовано для получения прогнозного числа предельных циклов.

Гипотеза 1. *В пространстве параметров системы* (2) *с* $g(x) = x$ *существует область* Ω, *в которой число предельных циклов системы* (2) *не превосходит количества* m *нулей нечетной части функции* $F(x)$, *т. е. положительных нулей функции*

$$\varphi(x) = F(x) - F(-x), \tag{3}$$

а также внутри Ω *существует подобласть, в которой это число равно* m.

Система Льенара (1) примечательна тем, что все ее особые точки принадлежат оси Ox.

Определение 1. *Пусть система Льенара* (1) *имеет антиседло* $A(x_0,0)$. *Обозначим, через* ξ_1 (ξ_2) – *абсциссу ближайшей слева* (*справа*) *к точке А особой точки, если слева* (*справа*) *особых точек нет, то считаем* $\xi_1 = -\infty$ ($\xi_2 = +\infty$). *Системой прогноза вокруг особой точки* $A(x_0,0)$ *для системы Льенара* (1) *будем называть систему*

$$F(\eta) = F(\mu), \ G(\eta) = G(\mu), \tag{4}$$

где $F(\eta) = \int\limits_{x_0}^{\eta} f(x)dx$,

$G(\mu) = \int\limits_{x_0}^{\mu} g(x)dx$,

$\xi_1 < \eta < x_0$

$x_0 < \mu < \xi_2$.

3. Оценка количества предельных циклов

Отметим некоторые общие результаты, полученные в ходе исследования.

Так, данная система имеет в конечной части плоскости только 4 особые точки и все они являются простыми, то справедлива

Теорема 2. *Система* (1) *не имеет предельных циклов рождающихся из бесконечности и окружающих все состояния равновесия.*

Теорема 3. *Если особые точки* $S_1(0,0)$, $S_2\left(\frac{1}{M},0\right)$ *являются седлами системы* (1), *причем* S_1 *находится между двумя антиседлами и*

$$G(0) > G\left(\frac{1}{M}\right),$$

то система (1) *не имеет предельных циклов окружающих группу особых точек.*

4. Прогнозная функция предельных циклов.

Зафиксируем параметры $a_0 = 1,\ L = -\frac{1}{2},\ M = \frac{1}{4}$. Тогда для системы (2) можно определить функцию Андронова-Хопфа $a_1 = AH(x)$, равную тому значению параметра a_1, при котором система (2) имеет предельный цикл, проходящий через точку $(x,\ 0)$. Используя гипотезу Смейла, для рассматриваемой системы можно определить прогнозную функцию Андронова-Хопфа $a_1 = AHp(x)$ [6], равную тому значению параметра a_1, при котором нечетная часть функции $F(x)$ имеет положительный корень. Прогнозная функция Андронова-Хопфа в известных ситуациях дает нужное приближение функции $a_1 = AH(x)$.

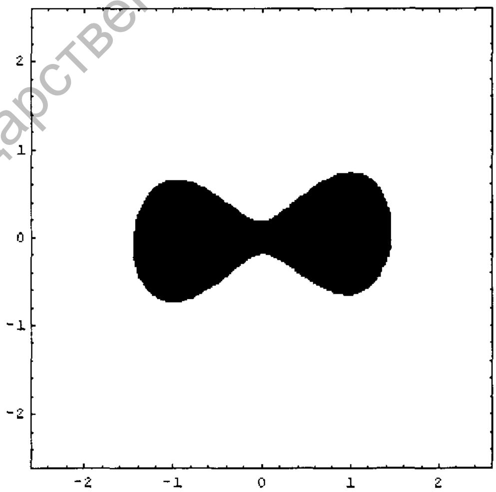
Справедлива

Теорема 4. *Система* (1) *имеет точно один предельный цикл, окружающий группу особых точек при* $a_0 = 1, a_1 = 1.197, L = -\frac{1}{2},\ M = \frac{1}{4}a_1$.

Доказательство. Для доказательства будем искать функции Дюлака-Черкаса [6] $\Phi(x,C)$, $\Psi(x,y,C)$ при $n = 14,\ k = -5/4$ на равномерной сетке. Для этого решим соответствующую задачу оптимизации

$$\Phi(x_i,C) \geq L,\ L \to \max, \left|C_j\right| \leq 1, i = \overline{1,901}, j = \overline{1,14}. \tag{5}$$

В результате найдем решение задачи (9) (C^*, L^*), при этом $L^* \approx 0.000043 > 0$, т.е. функция $\Phi(x, C^*)$ положительна во всей плоскости, а уравнение $\Psi(x,y,C^*) = 0$ определяет в этой области один овал (рисунок). Таким образом, система (1) имеет точно один предельный цикл во всей плоскости.



Овал кривой $\Psi = 0$ для системы (1) при $a_0 = 1, a_1 = 1.197, L = -\frac{1}{2},\ M = \frac{1}{4}$

Литература

1. Hilbert, D. Mathematische probleme. English transl. / D.Bull. Amer. Math.Soc. –1902. – Vol. 8. – P. 437–479.

2. Lins Neto, A. On Liйnard equations / A. Lins Neto, W. de Melo, C. C. Pugh // Proc. Symp. Geom. and Topol., Springer Lectures Notes in Mathematics. - 1977. – Vol. 597. – P. 335–357.

3. Smale, S. Mathematical problem for the next century / S. Smale // Math. Intelligencer. – 1998. – Vol. 20. – P. 7–15.

4. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М. : Наука, 1976. – 496 с.

5. Сидоренко, И. Н. Предельные циклы кубической системы Льенара с квадратичной функцией трения / И. Н. Сидоренко, Л. А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 2008. - №2(44). – С. 217–221.

6. Черкас, Л. А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков; Учреждение образования «Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы». – Гродно : ГрГУ, 2013. - 489 с.