МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

БЕЛОРУССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ЛЕНИНА

На правах рукописи

Морозов Николай Парфирович

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРИОДОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(01.01.02 – дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Минск 1977

Работа выполнена на кафедре высшей математики и математической физики Белорусского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета имени В. И. Ленина.

Научный руководитель	- профессор, доктор физико-математических наук Богданов Ю. С. (Белгосуниверситет)
Официальные оппоненты	- профессор, доктор физико-математических наук Лукашевич Н. А. (Белгосуниверситет)
	- доцент, кандидат физико-математических наук Розов Н. Х. (Московский госуниверситет).
Ведущее высшее учебное заведение	Горьковский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

Защита состоится «18» ноября 1977 г. в 10^{00} ч. на заседании специализированного Совета К 056.03.10 по присуждению ученой степени кандидата наук в Белорусском государственном университете имени В. И. Ленина (220080, г. Минск, Университетский городок, гл. корпус, к. 206).

С диссертацие можно ознакомиться в библиотеке Белгосуниверситета им. В. И. Ленина.

Автореферат разослан « » октября 1977 г.

Ученый секретарь Совета
профессор   И. А. Прусов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Нелинейные колебания, описываемые системами дифференциальных уравнений стационарного типа, наиболее полно изучены с качественной стороны. Известные же численные результаты в основном получены методами малого параметра. В то же время многие задачи приложений приводят к рассмотрению систем, для которых предположение о малости параметров не выполняется.

Основными числовыми характеристиками периодического решения являются период и амплитуда. Задача отыскания и оценки этих величин рассматривалась многими авторами. Так, например, Д. Шохатом, Г. Ландфогтом, В. В. Казакевичем и др. этот вопрос исследовался в плане распространения результатов, доставляемых методами малого параметра, на случай сильно нелинейных систем. В работах С. Дилиберто, К. Шнайдера и др. задача оценки периода рассматривалась в предположении, что соответствующий цикл локализован с той или иной степенью точности. Для отыскания периодов периодических решений некоторых сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений применялись также численные и графические методы (М. Урабе, В. Крогдаль, Р. Усуи и др.). интерес к исследованиям в этих направлениях обусловлен многочисленными практическими приложениями (в радиотехнике, электронике, механике и т.д.).

Объект исследования. В диссертации рассматривается задача получения приближенных формул и оценок периодов периодических решений системы Льенара с произвольным положительным параметром. Кроме того, для системы двух уравнений с параметром при одной из производных рассматривается вопрос приближенного отыскания периодов колебаний, переходящих в релаксационные при малых и больших значениях параметра.

Цель работы. Получение приближенных формул и оценок периодов периодических решений, справедливых при всех значениях параметра.

Научная новизна. Установлено некоторое специальное аналитическое представление периода периодического решения системы Льенара как функции параметра и амплитуды. С помощью этого представления выводятся приближенные формулы для вычисления периода. Получены оценки периода, справедливые при всех значениях параметра.

Для системы с параметром при одной из производных выясняется характер зависимости периода периодического решения от параметра. Установленные при этом свойства используются для получения единого асимптотического представления периода при малых и больших значениях параметра, которое затем применяется для вывода приближенных формул. Полученные результаты иллюстрируются на примере уравнении Ван дер Поля.

Практическая ценность. Результаты диссертации могут быть использованы, например, при исследовании колебательных процессов в радиотехнике, электронике, механике, а также при конструировании соответствующих устройств.

Апробация. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на II (Минск, 1971) и IV (Минск, 1975) Республиканских конференциях математиков Белоруссии, на IV всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений (Рязань, 1976).

Работа неоднократно обсуждалась на семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений Белгосуниверситета имени В. И. Ленина.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-5].

Объем работы. Диссертация выполнена на 102 страницах, состоит из введения, трех глав, приложения и списка литературы (43 наименования).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан обзор работ советских и зарубежных исследователей по вопросам, непосредственно примыкающим к теме диссертации. Приводится также краткая характеристика основных результатов работы.

Первая глава посвящена получению приближенных формул для периодов периодических решений системы Льенара

$$\dot{x} = y - \lambda \cdot F(x), \ \dot{y} = -g(x), \ \lambda \geq 0. \qquad (1)$$

Вывод этих формул основан на специальном аналитическом представлении периода.

Рассмотрим решение системы (1)

$$x = \varphi(t, a, \lambda), \ y = \psi(t, a, \lambda); \ \varphi(0, a, \lambda) = a, \ \psi(0, a, \lambda) = \lambda F(a). \qquad (2)$$

Пусть $t_1 < 0$ и $t_2 > 0$ таковы, что $\varphi(t_1, a, \lambda) = \varphi(t_2, a, \lambda) = 0$ и $0 \leq \varphi(t, a, \lambda) \leq a$ (или $a \leq \varphi(t, a, \lambda) \leq 0$) при $t_1 \leq t \leq t_2$. На фазовой плоскости решению (2) при этих значениях t соответствует дуга траектории, расположенная в правой полуплоскости $(L(a, \lambda))$, если $a > 0$, и в левой, если $a < 0$ $(L(a, \lambda))$*). Величина $T(a, \lambda) = t_2 - t_1$ называется временной длиной дуги $L(a.\lambda)$.

Вначале изучается структура множества значений a и λ, при которых величина $T(a, \lambda)$ конечна. Установлено, что это множество для $a > 0$ имеет вид

$$D = \{(a, \lambda) \mid a > 0, \ 0 \leq \lambda < \Lambda(a)\},$$

---

*) Значок «+» или «-» у величин, зависящих от a, указывает на знак a.

где $\Lambda(a)$ неубывающая в области существования функция. В частности, если функция $F(x)$ имеет нуль $x=\beta$, проходя через который она меняет знак, то $\Lambda(a)=\infty$ для $a>\beta>0$.

В предположении, что $(a,\lambda)\in D^+$ и $\sup\limits_{[0,a]} \frac{g(x)}{x} < \infty$, найдено следующее аналитическое представление для $T^+(a,\lambda)$

$$T^+(a,\lambda) = \frac{\pi}{2\,\omega_1^+(a,\lambda)} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4[\omega_1^+(a,\lambda)]^2} + \lambda^2 h^+(a,\lambda)}\ , \qquad (3)$$

где

$$h^+(a,\lambda) = T^+(a,\lambda)\cdot \int\limits_{t_1^+}^{t_2^+} \frac{\varphi^2\cdot f_1^2(\varphi)\,dt}{(\varphi+\lambda\cdot F_1(\varphi))^2 + \omega_1^2\varphi^2}, \qquad (4)$$

$$f_1(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\int\limits_0^x \tau f(\tau)\,d\tau\ , \quad F_1(x) = -\frac{1}{x}\int\limits_0^x F(\tau)\,d\tau,\quad f(x)=F'(x).$$

Для величины ω_1^+ при $a>0$ и $\lambda\geq 0$ справедливы неравенства $k_1^+(a) \le (\omega_1^+)^2 \le k_2^+(a)$, причем

$$k_1^+(a) = \inf_{[0,a]} \frac{g(x)}{x}\ , \quad k_2^+(a) \le \sup_{[0,a]} \frac{g(x)}{x}\ . \qquad (5)$$

.

В дальнейшем показано, что $h^+(a,\lambda)$ также допускает при фиксированном $a>\beta>0$ не зависящую от λ оценку

$$0 < \underline{H}(a) \le h^+(a,\lambda) \le \overline{H}(a) < \infty\ . \qquad (6)$$

Эти свойства величин ω_1^+ и h^+ используются для вывода приближенных формул. Сначала рассматривается простейший случай $g(x)\equiv \alpha^2 x$. В этом предположении $\omega_1^+(a,\lambda)\equiv\alpha$ и поэтому в формуле (3) подлежит определению лишь величина $h^+(a,\lambda)$, которая задается равенством (4).

В этом случае установлена следующая приближенная формула

$$T^{+}(a,\lambda)\approx\tilde{T}^{+}(a,\lambda)=\frac{\pi}{2\alpha}+\sqrt{\frac{\pi^{2}}{4\alpha^{2}}+\lambda^{2}h_{0}^{+}(a)}\;, \qquad (7)$$

где

$$h_{0}^{+}(a)=\frac{2\pi}{\alpha^{4}}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2}\tau\, f_{1}^{2}(a\cos\tau)\,d\tau\,. \qquad (8)$$

Отметим, что для малых значений параметра при фиксированном $a>0$ выполняется условие $T^{+}(a,\lambda)-\tilde{T}^{+}(a,\lambda)=o(\lambda^{2})$.

Пусть $L=L^{+}(A,\lambda)\cup L^{-}(B,\lambda)$ есть замкнутая траектория системы (1). Этой траектории соответствует периодическое решение периода $T(\lambda)$. Величины $A>0$ и $B<0$ назовем соответственно положительной и отрицательной полуамплитудами этого периодического решения. Тогда период может быть представлен в виде $T(\lambda)=T^{+}(A,\lambda)+T^{-}(B,\lambda)$.

С учетом (5) и аналогичного соотношения для $T^{-}(B,\lambda)$ получим $T(\lambda)=\frac{\pi}{\alpha}+\sqrt{\frac{\pi^{2}}{4\alpha^{2}}+\lambda^{2}h_{0}^{+}(A)}+\sqrt{\frac{\pi^{2}}{4\alpha^{2}}+\lambda^{2}h_{0}^{-}(B)}$. Воспользовавшись приближенными соотношениями для $T^{+}(a,\lambda)$ и $T^{-}(B,\lambda)$ приходим к следующему равенству

$$T(\lambda)\approx\tilde{T}(\lambda)=\frac{\pi}{\alpha}+\sqrt{\frac{\pi^{2}}{4\alpha^{2}}+\lambda^{2}h_{0}^{+}(A)}+\sqrt{\frac{\pi^{2}}{4\alpha^{2}}+\lambda^{2}h_{0}^{-}(B)}\;, \qquad (9)$$

где $h_{0}^{+}(A)$ и $h_{0}^{-}(B)$ определяются формулой (8) при $a=A$ и $a=B$ соответственно.

Формула (9) устанавливает приближенную зависимость периода $T(\lambda)$ от параметра λ и полуамплитуд A и B. Если рассматриваемое периодическое решение соответствует предельному циклу, то A и B будут некоторыми функциями параметра λ, значения которых колеблются около полуамплитуд A_0 и $-A_0$ порождающего решения. Полагая в (9) $A\approx A_0$, а $B\approx -A_0$, получим приближенное равенство $T(\lambda)\approx\tilde{\tilde{T}}(\lambda)=\frac{\pi}{\alpha}+\sqrt{\frac{\pi^{2}}{4\alpha^{2}}+\lambda^{2}h_{0}^{+}(A_0)}+\sqrt{\frac{\pi^{2}}{4\alpha^{2}}+\lambda^{2}h_{0}^{-}(-A_0)}$, в котором все величины известны.

В случае, когда $g(x)$ нелинейная функция, приближенная формула для периода имеет вид

$$T(\lambda)\approx\tilde{\tilde{\tilde{T}}}(\lambda)=\frac{\pi}{2\,\bar{\omega}_{0}^{+}(A_0)}+\sqrt{\frac{\pi^{2}}{4[\bar{\omega}_{0}^{+}(A_0)]^{2}}+\lambda^{2}\bar{h}_{0}^{+}(A_0)}+\sqrt{\frac{\pi^{2}}{4[\bar{\omega}_{0}^{-}(B_0)]^{2}}+\lambda^{2}\bar{h}_{0}^{-}(B_0)}\;,$$

где $A_0 > 0$, $B_0 < 0$ полуамплитуды порождающего решения, а $\overline{\omega_0}(a)$ - приближенное значение получастоты порождающего решения, определяемое соотношением
ляемое соотношением

$$\bar{\omega}_0(a) = \sqrt{\frac{4}{a\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\tau \, g(a\cos\tau)\,d\tau}\ ; \quad \bar{h}_0(a) = \frac{2\pi}{[\bar{\omega}_0(a)]^2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\tau \cdot f_1^2(a\cos\tau)\,d\tau.$$

Полученные приближенные формулы применяются для отыскания периода периодического решения уравнения Ван дер Поля $\ddot{x} + \lambda(x^2-1)\cdot\dot{x} + x = 0$. В этом случае имеем $T(\lambda) \approx \tilde{T}(\lambda) = \pi\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \lambda^2\left(\frac{5}{16}A^4 - \frac{3}{2}A^2 + 2\right)}\,\right]$, где $A_0 > 0$ - амплитуда этого периодического решения. При $A = 2$ (амплитуда порождающего решения) находим

$$T(\lambda) \approx \tilde{\tilde{T}}(\lambda) = \pi\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{4+\lambda^2}\,\right]. \qquad (10)$$

Результаты вычислений по формуле (10) при целочисленных значениях λ от 1 до 10 и $\lambda = 20$ сравниваются с результатами, установленными М. Урабе для этого уравнения численными методами. Для этих значений параметра относительная погрешность формулы (10) составляет приближенно 0,65%. Как показывает сравнении с другими результатами, погрешность этой формулы медленно увеличивается с ростом λ и приближается к 2,8% при $\lambda \to \infty$.

Для величины $W^+ = \frac{\pi}{T^+(a,\lambda)}$ доказано следующее соотношение

$$W^{+2} = \frac{g(x_0)}{x_0} - \lambda^2 f_1^2(x_0), \quad 0 < x_0 < a. \qquad (11)$$

Отсюда следует, что если функции $g(x)$ и $f_1(x)$ связаны условием $g(x) \equiv [\alpha^2 + \lambda^2 \cdot f_1^2(x)]\cdot x$, то временная длина $T^+(a,\lambda)$ не зависит ни от a, ни от λ и равна $T^+ \equiv \frac{\pi}{\alpha}$. Соотношение (11) используется также для получения оценок величины $\Lambda(a)$, фигурирующей в определении области $\mathcal{D}$.

Вторая глава посвящена получению оценок величины $T^+(a,\lambda)$ и изучению ее асимптотических свойств при $\lambda \to \infty$.

С помощью замены $\varepsilon y = u$ ($\varepsilon = \lambda^{-1}$) приводим систему (1) к виду

$$\varepsilon\cdot\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -\varepsilon\, g(x). \qquad (12)$$

Рассмотрим дугу $L^+(a,\varepsilon)$ траектории системы (12), соответствующую при данном преобразовании дуге $L^+(a,\lambda)$ системы (1). Ее временная длина также будет равна $T^+(a,\lambda)$. Определим на промежутке $[0,a]$ функции $Y_a^+(x) \equiv \max\limits_{[x,a]} F(z)$, $y_a^+(x) \equiv \min\limits_{[x,a]} F(z)$ и при фиксированном $a>0$ рассмотрим кривую $L_0^+(a) = \{(x,y) \mid (y - Y_a^+(x))(y - y_a^+(x)) = 0\}$.

Теорема 6.1. Дуга $L^+(a,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ стремится равномерно по x и y для каждого фиксированного $a>0$ к кривой $L_0^+(a)$.

Аналогичное утверждение имеет место для $L^-(b,\varepsilon)$. В процессе доказательства этого утверждения установлены оценки для $L^+(a,\varepsilon)$ и $L^-(b,\varepsilon)$.

Теорема 6.3. Пусть функции $F(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $g(x)$ и $f(x)=F'(x)$ непрерывны при $x \in]-\infty,+\infty[$, $F(0)=0$, $xg(x)>0$ при $x \neq 0$ и $\int_0^{\pm\infty} g(x)\,dx = \infty$;

2) существуют числа α_{ij} ($i=1,2;\ j=1,2,3$) такие, что $\alpha_{13}<\alpha_{12}<\alpha_{11}<0<\alpha_{21}<\alpha_{22}<\alpha_{23}$ и $F(\alpha_{i2})=0$, $f(x)<0$ при $\alpha_{11}<x<\alpha_{21}$, а при $x \notin [\alpha_{11},\alpha_{21}]$ $f(x)>0$;
3) $F(\alpha_{11})=F(\alpha_{23})$, $F(\alpha_{21})=F(\alpha_{13})$.

Тогда

а) система (1) при всех $\lambda>0$ имеет хотя бы один орбитально устойчивый предельный цикл;

в) существует $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при всех $\lambda>\lambda_0$ этот цикл единственный;

с) при $\varepsilon \to 0$ соответствующий предельный цикл системы (12) стремится к замкнутой кривой $L_0 = L_0^-(\alpha_{13}) \cup L_0^+(\alpha_{23})$.

Доказана асимптотическая при $\lambda \to \infty$ оценка величины $T(a,\lambda)$.

Теорема 7.1. Если существует $\beta>0$, для которого $Y_a^+(0)\,y_a^+(0)\neq 0$, то при фиксированном $a>\delta$ имеет место следующая асимптотическая оценка $T^+(a,\lambda)\sim\lambda h^+_\infty(a)$ при $\lambda\to\infty$ где

$$h^+_\infty(a)=\int_0^a\frac{1}{g(x)}\frac{d}{dx}\left[y_a^+(x)-Y_a^+(x)\right]dx. \qquad (13)$$

С помощью оценок, полученных при доказательстве этой теоремы, доказана

Теорема 7.2. Если при условиях теоремы 7.1. $g'(x)\geq 0$ для $0\leq x\leq a$, то для $\lambda>0$ имеет место неравенства

$$-\int_\delta^a\frac{\mu(x,a)\,g'(x)\,dx}{g^2(x)}\leq T^+(a,\lambda)-\lambda h^+_\infty(a)\leq\frac{4\delta}{\lambda m}+\frac{2\mu(\delta,a)}{g(\delta)} \qquad (14)$$

где $\mu(x,a)=\sqrt{2(G(a)-G(x))}$, $G(x)=\int_0^x g(\xi)d\xi$; числа m и δ определяются в ходе доказательства.

При дополнительных условиях на функции $F(x)$ и $g(x)$ нижняя оценка (14) уточняется. А именно, справедлива

Теорема 7.3. Если существуют постоянные α_{ij} $(i,j=1,2)$ такие, что

такие, что $(-1)^i\alpha_{i1}>0$, $F(\alpha_{i2})=0$ и при $x\in\,]\alpha_{11},\alpha_{21}[$ $f(x)<0$, а при $x\notin[\alpha_{11},\alpha_{21}]$ $f(x)>0$ и $\frac{g(x)}{f(x)}$ не возрастает при $x>\alpha_{21}$, а $g(x)$ непрерывна при всех $x>0$, то имеет место оценка

$$T^+(a,\lambda)\geq\lambda h^+_\infty(a)=\lambda\int_{\alpha_{21}}^a\frac{f(x)}{g(x)}dx \qquad (15)$$

для $\lambda\geq 0$ и $a\geq\alpha_{21}$.

Из теоремы 7.1 следует, что эта оценка не может быть улучшена путем введения не зависящего от λ множителя. Показано также, что она не может быть уточнена и с помощью введения не зависящего от λ слагаемого. При условиях теоремы 6.3 на основе этих оценок получены оценки периода предельного цикла. В частности, при условиях теорем 6.3 и 7.3 для периода предельного цикла выполняется неравенство $T(\lambda)\geq\lambda\left[\int_{\alpha_{21}}^A\frac{f(x)}{g(x)}dx+\int_{\alpha_{11}}^B\frac{f(x)}{g(x)}dx\right]$, где A и B - соответственно положительная и отрицательная полуамплитуды предельного цикла. В качестве примера рассмотрено уравнение Ван дер Поля.

Теорема 8.1. если существует $\beta > 0$ такое, что $Y_\beta^+(0)\, y_\beta^+(0) \ne 0$, $k_1(\beta) > 0$, $k_2(\beta) < \infty$, то для каждого $a > \beta$ $\lim\limits_{\lambda \to \infty} h^+(a,\lambda) = [h_\infty^+(a)]^2$, где $k_1(a)$ и $k_2(a)$ определяются равенствами (5), а $h_\infty^+(a)$ - соотношением (13), $h^+(a,\lambda)$ из формулы (3).

Из этой теоремы в частности следует, что для каждого $a > \beta$ существуют $\underline{H}(a) > 0$ и $\bar{H}(a) < \infty$ такие, что неравенства (6) имеют место для всех $\lambda > 0$.

При условии, что $\frac{\underline{H}(a)}{k_1(a)} \le \frac{\bar{H}(a)}{k_2(a)}$ относительная погрешность приближенной формулы, получаемой из (3) заменой $h^+(a,\lambda)$ и $\omega_1^+(a,\lambda)$ на $h^+(a,\lambda_0)$ и $\omega_1^+(a,\lambda_0)$, где $\lambda_0 \ge 0$ – некоторое число, не превосходит величины $\sqrt{\frac{\bar{H}(a)}{\underline{H}(a)}} - 1$.

Для достаточно больших значений параметра при условии теоремы 7.4 справедлива оценка $\delta_{max} \le \frac{h_\infty^+(a)}{\sqrt{h_0(a)}} - 1$ для тех a, для которых $[h_\infty^+(a)]^2 > h_0^+(a)$. С учетом этих оценок проводится уточнение приближенной формулы (7) при больших значениях параметра.

Третья глава посвящена исследованию свойств и приближенному вычислению периода периодического решения системы

$$\varepsilon \dot{x} = P(x,y), \quad \dot{y} = Q(x,y) \qquad (16)$$

При этом существенно используется следующее утверждение

Теорема 9.1. если:

1) функция $T(x)$ определена и непрерывна при $x \ge 0$;

2) существует непрерывная при $x \ge 0$ функция $q(x)$ такая, что $\lim\limits_{x\to\infty} q(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{T(x)}{q(x)} = a \ne \infty$

3) $q(x) \ne q\left(\frac{1}{x}\right)$ для всех $x > 0$, $x \ne 1$;

4) существуют конечные производные $q'(1) \ne 0$ и $T'(1)$,

то для функции $T(x)$ имеет место представление

$$T(x)=q(x)\varphi(x)+\psi(x),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны при $x\geq 0$ и обладают свойством

$$\varphi(x)\equiv\varphi\left(\frac{1}{x}\right),\ \psi(x)\equiv\psi\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (17)$$

для $x>0$. Такое представление для данной функции $q(x)$ единственно.

В предположении, что система (16) имеет периодическое решение, переходящее при $\varepsilon\to 0$ и при $\varepsilon\to\infty$ в релаксационные колебания, показано, что для периода $T(\varepsilon)$ имеет место указанное ранее представление с $q(\varepsilon)\equiv\varepsilon$.

Используя простейшие функции, обладающие свойством (17) $\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\ u\ |\ln\varepsilon|\right)$, найдено единое асимптотическое представление периода как при $\varepsilon\to 0$, так и при $\varepsilon\to\infty$. Это представление имеет вид

$$T(\varepsilon)=\varepsilon\varphi_N(\varepsilon)+\psi_N(\varepsilon)+R_N(\varepsilon), \qquad (18)$$

где функции $\varphi_N(\varepsilon)$ и $\psi_N(\varepsilon)$ обладают указанным свойством и имеют вид $\varphi_N(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{3N}\tau_n^2(|\ln\varepsilon|)\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{3}}$, $\psi_N(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{3N}t_n^2(|\ln\varepsilon|)\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{3}}$.

Многочлены τ_n^2 и t_n^2 находятся по известным асимптотическим разложениям периода при $\varepsilon\to 0$ и $\varepsilon\to\infty$ при условии, что для остаточного члена $R_N(\varepsilon)$ выполняются требования

$$R_N(\varepsilon)=o(\varepsilon^N)\text{ при }\varepsilon\to 0\text{ и}$$
$$R_N(\varepsilon)=o(\varepsilon^{1-N})\text{ при }\varepsilon\to\infty.$$

Из этих условий, в частности, следует, что при $\varepsilon N\geq 1$ величина $R_N(\varepsilon)$ ограничена на промежутке $[0,\infty[$ и принимает свои наибольшее и наименьшее значения при конечных значениях параметра. Приближенные формулы получаются из (18) либо путем отбрасывания остаточного члена $R_N(\varepsilon)$, либо путем замены его функцией специального вида, принимающей то же наибольшее (наименьшее) значение, что и $R_N(\varepsilon)$ и при том же значении параметра.

Этот же способ применяется для отыскания периода предельного цикла системы Льенара (1).

Показано, что при фиксированном для $m\geq 1$периода $T(\lambda)$ предельного цикла системы Льенара справедливо представление

$$T(\lambda)=\lambda^m\varphi(\lambda)+\psi(\lambda),$$

где $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ обладают свойством (17).

На основании известных разложений периода при $\lambda\to 0$ и при $\lambda\to\infty$ строится единое асимптотическое разложение $T(\lambda)$ для малых и больших значений параметра

$$T(\lambda)=\lambda^m\varphi_N^m(\lambda)+\psi_N^m(\lambda)+R_N^m(\lambda),$$

где $\varphi_N^m(\lambda)$ и $\psi_N^m(\lambda)$ обладают свойством (17) и имеют вид

$$\varphi_N^m(\lambda)=\sum_{n=0}^{3N}t_n^2\left(|\ln\lambda|\right)\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{\frac{2n+6m-3}{3}}-\sum_{n=0}^{2N-1}P_n^2\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{n+m}$$

$$\psi_N^m(\lambda)=\sum_{n=0}^{2N+m-1}P_n^3\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{n}-\sum_{n=0}^{3N-3\left[\frac{m}{2}\right]}t_n^3\left(|\ln\lambda|\right)\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)^{\frac{2n+6m-3}{3}}$$

Коэффициенты t_n^2, P_n^2, P_n^3 и t_n^3 определяются так, чтобы выполнялись условия

$$\varphi(\lambda)-\varphi_N^m(\lambda)=o\left(\lambda^{2N+m-1}\right),$$

$$\psi(\lambda)-\psi_N^m(\lambda)=o\left(\lambda^{2N+m-1}\right)$$

при $\lambda\to 0$. Тогда для $R_N^m(\lambda)$ справедливы соотношения

$$R_N^m(\lambda)=o\left(\lambda^{2N+m-1}\right) \text{ при } \lambda\to 0,$$

$$R_N^m(\lambda)=o\left(\lambda^{1-2N}\right) \text{ при } \lambda\to\infty.$$

При этом получаем рекуррентные соотношения, выражающие коэффициенты t_n^2, t_n^3, P_n^2, P_n^3 через известные коэффициенты P_n и t_n разложений периода при малых и больших значениях параметра.

В качестве примера рассмотрено уравнение Ван дер Поля. Для периода периодического решения этого уравнения получена приближенная формула

$$T(\lambda)\approx\lambda^3\left[1{,}6137y^2+7{,}0143y^{\frac{10}{3}}\left(1{,}902-\frac{2}{3}|\ln\lambda|\right)y^4-2\pi y^3\right]+2\pi+\frac{\pi}{8}y^2+\frac{379\pi}{1536}y^4-1{,}6137y^5-0{,}51\left(\frac{5\lambda}{6{,}25+\lambda^2}\right)^3$$

где $y=\dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$, пригодная для вычислений для всех $\lambda\geq 0$

В приложение вынесены чертежи, иллюстрирующие некоторые доказательства, а также одна из 3-х таблиц.

Выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Ю. С. Богданову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Морозов Н. П. О приближенном отыскании периода периодического решения одной сильно нелинейной системы. Дифференц. уравнения, 10, №8, 1974.

2. Морозов Н. П. О некоторых свойствах полупериодов колебаний одной сильно нелинейной системы. Вестник Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина сер. 1, №2, 1975.

3. Морозов Н. П. О приближенном отыскании периода периодического решения одной сильно нелинейной системы..

4. Морозов Н. П. Оценка периода предельного цикла одной сильно нелинейной системы. Тезисы доклада на Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений и методике преподавания дифференциальных уравнений в педагогических институтах, ротапринт Рязанского пединститута, Рязань, 1976.

5. Морозов Н. П. Об одном преобразовании асимптотических разложений периода. Дифференц. уравнения, 12, №9, 1976.

АО 01900. Подписано в печать 29.09.77 года

Заказ №574, тираж 100 экз., объём 20 кн.стр.

Формат 1/16 листа 60х84

Отпечатано на ротапринте Вычислительного центра Статуправления Могилевской области