УДК 517.

Н.П. Морозов (Могилев, Беларусь)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФОКУСНЫХ ВЕЛИЧИН ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ОБОБЩЕННЫХ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

The procedure for evaluating focus quantities of multiple foci of polynomial systems in generalized polar coordinates is developed. The method of focus calculation is based on special representation of polynomial systems.

Система

$$\dot{x} = P(x,y),\ \dot{y} = Q(x,y), \tag{1}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ многочлены наибольшей степени n, представима в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) + x\overline{\sigma}(x,y) \\ \dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\overline{\sigma}(x,y) \end{cases}. \tag{2}$$

Гамильтониан $H(x,y)$, однозначно определяется по правым частям системы (1), а $\overline{\sigma}(x,y)$ – по дивергенции векторного поля системы (1) ([см. 5]). Будем называть $H(x,y)$ естественным гамильтонианом системы (1).

Будем предполагать, что квадратичная часть гамильтониана имеет вид $h_2(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. В этом случае состояние равновесия $O(0,0)$ для гамильтоновой системы является центром, а естественный гамильтониан в области центра является положительно определенной функцией Ляпунова. Производная естественного гамильтониана в силу системы (2) имеет вид

$$\frac{dH}{dt} = \overline{\sigma}(x,y)\left(x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right). \qquad (3)$$

Положим $V(x,y) = x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)$ и обозначим

$$D = \{(x,y)|\, V(x,y) > 0\},\ \Gamma_D = \{(x,y)|\, V(x,y) = 0,\ (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Область центра гамильтоновой системы расположена в области D и состояния равновесия системы (2) и гамильтоновой системы, отличные от $O(0,0)$ (*если такие существуют*), расположены на границе области D, т.е. на кривых $V(x,y) = 0$.

Пусть $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$. Учитывая, что

$$\rho^2\dot{\varphi} = -\left(x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right),$$

из (3) следует, что в области D система (2) равносильна одному уравнению

$$\frac{dH}{d\varphi} = -\rho^2\overline{\sigma}(x,y). \qquad (4)$$

В обобщенных полярных координатах (R, φ), где $R = \sqrt{2H}$, уравнение (4) имеет вид

$$R\frac{dR}{d\varphi} = -\rho^2\overline{\sigma}(x,y). \qquad (5)$$

Поскольку в области D (*и в области центра гамильтоновой системы*) $V(x,y) = \rho\frac{\partial H}{\partial \rho}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) > 0$, то уравнение

$$R^2 = 2H(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \qquad (6)$$

при каждом φ однозначно разрешимо относительно ρ. Ниже приведено описание процедуры вычисления фокусных величин в обобщенных полярных координатах (R, φ).

1. Из уравнения (6) находим ρ в виде ряда $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(\cos\varphi, \sin\varphi) R^k$, где r_k – многочлены от $\cos\varphi,\ \sin\varphi$.

2. Подставляем найденное ρ в уравнение (5) получим уравнение

$$-\frac{dR}{d\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\cos\varphi, \sin\varphi) R^k \qquad (7)$$

где a_k – многочлены от $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

3. Ищем решение уравнения (7) в виде ряда

$$R(\varphi, R_0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\varphi) R_0^k \qquad (8)$$

при начальном условии $R(0, R_0) = R_0$. Отсюда следует $b_1(0) = 1$, $b_k(0) = 0$, для $k > 1$.

4. Подставляем $R(\varphi, R_0)$ в уравнение (7). Получим для отыскания $b_k(\varphi)$ последовательность линейных дифференциальных уравнений:

$-\frac{db_k}{d\varphi} = c_k(\varphi)$, $(k = 1, 2, \ldots)$. Здесь через $c_k(\varphi)$ обозначены правые части соответствующих уравнений. Функции $c_k(\varphi)$ очевидным образом выражаются через коэффициенты a_k уравнения (7) и коэффициенты $b_m(\varphi), 1 \le m < k$ решения (8). Отсюда при $\sigma_{00} = 0$ (σ_{00} – значение дивергенции в точке (0,0)), с учетом начальных условий, находим $b_1(\varphi) = 1$, $b_k(\varphi) = -\int_0^{\varphi} c_k(\varphi)\, d\varphi$.

5. Введем в рассмотрение отображение

$$P(R_0) = R_0 - R(2\pi, R_0) = \left(1 - b_1(2\pi)\right)R_0 - \sum_{k=2}^{\infty} b_k(2\pi) R_0^k.$$

Здесь $R = R(\varphi, R_0)$ – решение уравнения (7) при начальном условии $R(0, R_0) = R_0$ и $R_1 = R(2\pi, R_0)$ – отображение Пуанкаре луча $\varphi = 0$ в себя.

Поскольку первым отличным от нуля может быть лишь коэффициент $l_k = -\ b_k(2\pi) = \int_0^{2\pi} c_k(\varphi)\, d\varphi$ с нечетным номером ([2]), обозначим его $L_m = l_{2m+1}$. В результате получим

$$P(R_0) = L_m R_0^{2m+1} + \sum_{k=2m+2}^{\infty} l_k R_0^k,$$

при этом $\sigma_{0\,0} = 0,\ L_0 = 1 - b_1(2\pi) = 0,\ L_k = 0$ при $k < m$.

Коэффициент L_m будем называть m-ой фокусной величиной или m-ой ляпуновской величиной.

В качестве примера в докладе приведены значения первых трех фокусных величин квадратичной системы, вычисленных по описанной процедуре. В случае центра (*определяемых по трем фокусным величинам*) квадратичная система проинтегрирована в замкнутой форме. Это стало возможным благодаря приданию фокусным величинам удобного для исследования вида. Обсуждаются нелокальные бифуркации квадратичной системы в этом случае.

Список литературы:

1. Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1966. – 568 с.
2. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов [и др.]. – М. : Наука, 1967. – 587 с.
3. Баутин, Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. – М. : Наука, 1978. – 496 с.
4. Ван, Д. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / Д. Ван, Ч. Ли, Ш.-Н. Чоу. – М. : МЦНМО, 2005. – 415 с.
5. Морозов, Н.П. О приведении полиномиальных систем к специальному виду / Н.П. Морозов // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – № 2(38). – 2011. – С. 43-49.