УДК 517+530.1

С.В. Жестков (Могилев, Беларусь)

К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ПОРЯДКОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

The direct method of constructing of soliton solutions for nonlinear Schrodinger's equation with power law of nonlinearity and with order of nonlinearity dependent from time is developed.

Известно [1-5], что нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) является классическим уравнением математической физики и играет фундаментальную роль в физических, биологических и инженерных науках. В частности, различные модификации НУШ широко используются в динамике жидкости, нелинейной оптике, физике плазмы, химии белка.

В работе [6] приведен ряд законов нелинейности, описываемых обобщенным уравнением Шредингера,

$$iq_t + \frac{1}{2}q_{xx} + F\left(|q|^2\right)q = 0, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{1}$$

где $F(s)$ – действительная алгебраическая функция. В случае, когда $F(s) = s^m$, $m > 0$, уравнение (1) обладает степенным законом нелинейности. В настоящее время известны материалы, включая полупроводники, свойства которых подчиняются степенному закону нелинейности. Поэтому исследование вопросов существования светлых и темных солитонов для НУШ со степенными законами нелинейности является актуальной задачей (см. [7-14]).

В настоящей работе обобщаются результаты из [7-14] на случай уравнений Шредингера с переменными коэффициентами и порядком нелинейности m, зависящим от времени, т.е. $m = m(t)$.

Рассмотрим $(2+1)$-мерное уравнение Шредингера

$$\begin{aligned} i\left[u_t + p(t)u_x + q(t)u_y\right] + a(t)\left[u_{xx} + u_{yy}\right] + b(t)|u|^{2m(t)}u = \\ = ic(t)u\ln|u| + \left[\frac{d_1(t)\left\{|u|_x\right\}^2 + d_2(t)\left\{|u|_y\right\}^2}{|u|^2}\right]u, \end{aligned}, \tag{2}$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

где $a(t), b(t), c(t), d_1(t), d_2(t), p(t), q(t), m(t) > 0, \forall t \in R$ − непрерывные интегрируемые на R функции. Солитонное решение уравнения (2) будем строить в виде [12]

$$u(t,x,y) = I(t,x,y)\exp(i\eta), \quad \eta = k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau)d\tau, \tag{3}$$

где $I(t,x,y)$ − огибающая солитона, k_1, k_2 − частоты по осям x, y соответственно, $\omega(\tau)$ − частота солитона, непрерывная интегрируемая на R функция. Подставляя (3) в (2), найдем

$$\begin{gathered} i\left[I_t + i\omega(t)I + p(t)\{I_x + ik_1 I\} + q(t)\{I_y + ik_2 I\}\right] + a(t)\left[I_{xx} + I_{yy} + 2i\left(k_1 I_x + k_2 I_y\right) - \right. \\ \left. - k^2 I\right] + b(t)I^{2m(t)+1} = ic(t)I\ln I + \left[\frac{d_1(t)\{I_x\}^2 + d_2(t)\{I_y\}^2}{I}\right], \quad k_1^2 + k_2^2 \equiv k^2. \end{gathered} \tag{4}$$

Отделяя мнимую и действительную части, из (4) получим

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}: \quad I_t + p(t)I_x + q(t)I_y + 2a(t)\left[k_1 I_x + k_2 I_y\right] = c(t)I\ln I, \\ &\mathrm{Re}: \quad -\omega(t)I - k_1 p(t)I - k_2 q(t)I + a(t)\left[I_{xx} + I_{yy}\right] - k^2 a(t)I + b(t)I^{2m(t)+1} = \\ &\qquad = \frac{1}{I}\left[d_1(t)\{I_x\}^2 + d_2(t)\{I_y\}^2\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы уравнение (2) имело решение (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (5).*

Система уравнений (5) является определяющей системой уравнений для неизвестной волновой функции $I(t,x,y)$.

Решение системы (5) строится в виде

$$\begin{gathered} I(t,x,y) = f(\xi)^{-\mu(t)} = \exp\{-\mu(t)\ln f(\xi)\}, \\ \xi = B_1 x + B_2 y - \int_0^t v(\tau)d\tau, \end{gathered} \tag{6}$$

где $f(\xi) > 0, \forall \xi \in R, \mu(t) > 0, \forall t \in R$ − неизвестные гладкие функции, B_1, B_2 − величины, обратные к ширине солитона по осям x, y соответственно, $v(\tau)$ − скорость солитона. Подставляя (6) в (5), найдем

$$\begin{gathered} \left[-\dot{\mu}(t)\ln f(\xi) + \mu(t)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\upsilon(t)\right] - B_1 p(t)\mu(t)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} - B_2 q(t)\mu(t)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} - \\ - 2\left[k_1 B_1 + k_2 B_2\right]a(t)\mu(t)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -c(t)\mu(t)\ln f(\xi), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} -\omega(t) - k_1 p(t) - k_2 q(t) + B^2 a(t)\mu(t)\left[\{1 + \mu(t)\}\left(\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right)^2 - \frac{f''(\xi)}{f(\xi)}\right] - k^2 a(t) + \\ + b(t)\left(f(\xi)\right)^{-2m(t)\mu(t)} = \left[B_1^2 d_1(t) + B_2^2 d_2(t)\right]\mu^2(t)\left(\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right)^2, \quad B^2 \equiv B_1^2 + B_2^2. \end{gathered} \tag{8}$$

Исследуем уравнения (7), (8). Из (7) получим следующие соотношения:

$$\dot{\mu}(t) = c(t)\mu(t) \quad \text{или} \quad \mu(t) = \mu_0 \exp\left(\int_0^t c(\tau)d\tau\right), \quad \mu_0 > 0, \tag{9}$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

$$\upsilon(t) = B_1 p(t) + B_2 q(t) + 2a(t)\left[k_1 B_1 + k_2 B_2\right]. \tag{10}$$

Из уравнения (8) найдем

$$\omega(t) = -k_1 p(t) - k_2 q(t) - k^2 a(t), \tag{11}$$

$$B^2 a(t)\mu(t)\left[\{1+\mu(t)\}\left(\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right)^2 - \frac{f''(\xi)}{f(\xi)}\right] + b(t)\left(f(\xi)\right)^{-2m(t)\mu(t)} =$$

$$= \left[B_1^2 d_1(t) + B_2^2 d_2(t)\right]\mu^2(t)\left(\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right)^2$$

или

$$H_1(t)\left(f'(\xi)\right)^2 - H_2(t) f''(\xi) f(\xi) + b(t)\left(f(\xi)\right)^{-2m(t)\mu(t)+2} = 0, \tag{12}$$

где

$H_1(t) \equiv B^2 a(t)\mu(t)\left(1+\mu(t)\right) - \mu^2(t)\left[B_1^2 d_1(t) + B_2^2 d_2(t)\right], \quad H_2(t) \equiv B^2 a(t)\mu(t)$.

Таким образом, неизвестная степень $\mu(t)$ определяется по формуле (9), скорость солитона – по формуле (10), а частота солитона – по формуле (11). Исследуем уравнение (12).

Из анализа уравнения (12) следует, что $\mu(t) = \dfrac{1}{m(t)}$. Тогда получим

$$H_1(t)\left(f'(\xi)\right)^2 - H_2(t) f''(\xi) f(\xi) + b(t) = 0. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) строится в виде

$$f(\xi) = ch\xi. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (13), найдем

$$H_1(t) sh^2\xi - H_2(t) ch^2\xi + b(t) = 0. \tag{15}$$

Из (15) в силу линейной независимости экспонент следует, что

$$H_1(t) - H_2(t) = 0, \quad b(t) - H_1(t) = 0,$$

или

$$d_1(t) = d_2(t) = a(t), \quad b(t) = B^2 a(t)\mu(t). \tag{16}$$

Следовательно, уравнение (13) имеет решение (14), если выполняются соотношения (16).

Из равенства $\mu(t) = \dfrac{1}{m(t)}$ следует, что должно выполняться тождество

$$\mu_0 \exp\left(\int_0^t c(\tau)d\tau\right) \equiv \frac{1}{m(t)}, \quad \forall t \in R, \tag{17}$$

которое связывает функции $m(t), c(t)$.

Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (9)-(11), (16), (17). Тогда уравнение (2) имеет солитонное решение*

$$u(t,x,y) = \left[ch\left(B_1 x + B_2 y - \int_0^t \upsilon(\tau)d\tau\right)\right]^{-\frac{1}{m(t)}} \exp\left\{i\left(k_1 x + k_2 y + \int_0^t \omega(\tau)d\tau\right)\right\}.$$

Список литературы:

1. Тахтаджян, Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – М. : Наука, 1986.
2. Ахмедиев, Н.Н. Солитоны / Н.Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М. : Физматлит, 2003.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

3. Кившарь, Ю.С. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов / Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. – М. : Физматлит, 2005.
4. Жестков, С.В. Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных / С.В. Жестков. – Могилев : МГУ им. А.А. Кулешова, 2006.
5. Розанов, Н.Н. Диссипативные оптические солитоны. От микро к нано- и атто- / Н.Н. Розанов. – М. : Физматлит, 2011.
6. Biswas, A. Theory of non-Kerr law generalized vector solitons / A. Biswas // Appl. math. and comput. – 2003. – V. 136. – P. 443-452.
7. Жестков, С.В. О существовании (2+1)-мерных солитонных решений уравнения Шредингера со степенной нелинейностью произвольного порядка / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Докл. НАНБ. – 2005. – Т. 49. – № 6. – С. 50-52.
8. Жестков, С.В. О существовании солитонных решений системы уравнений Davey-Stewartson (D-S) с законом нелинейности удвоенной степени / С.В. Жестков // X Белорусская математическая конференция Междунар. научная конференция. Часть 2. 3-7 ноября 2008. – Минск, 2008. – С. 89.
9. Жестков, С.В. О построении солитоноподобных решений системы уравнений Захарова со степенным законом нелинейности и законом удвоенной степени / С.В. Жестков // Докл. НАНБ. – 2008. – Т. 52. – № 6. – С. 49-53.
10. Жестков, С.В. Построение и анализ солитоноподобных решений (1+1), (2+1), (3+1)-мерных уравнений Шредингера с законом нелинейности устроенной степени / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Докл. НАНБ. – 2009. – Т. 53. – № 4. – С. 52-57.
11. Жестков, С.В. О существовании солитонных решений систем связанных (2+1)-мерных уравнений Шредингера с керровской нелинейностью и степенными законами нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Докл. НАНБ. – 2010. – Т. 54. – № 3. – С. 41-46.
12. Жестков, С.В. О существовании оптических солитонов (2+1)-мерного уравнения Шредингера с зависящими от времени коэффициентами и степенным законом нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Герценовские чтения – 2012 : материалы научной конференции. LXV. 16-21 апреля 2012. Санкт-Петербург, 2012. – С. 55-57.
13. Жестков, С.В. О существовании солитоноподобных решений (2+1)-мерного уравнения столкновения коротких и длинных волн и его обобщений на степенные нелинейности / С.В. Жестков // Докл. НАНБ. – 2012. – Т. 56. – № 3. – С. 63-67.
14. Жестков, С.В. О существовании (1+2)-мерных солитонов кирального уравнения Шредингера со степенным законом нелинейности / С.В. Жестков, В.С. Новашинская // Докл. НАНБ. – 2012. – Т. 56. – № 4. – С. 32-36.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова