

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТЕХНИКИ СПОРТИВНЫХ УПРАЖНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ НА ПЭВМ

Математическую теорию решения задач на отыскание наибольших и наименьших величин (экстремумов) называют теорией экстремальных задач или теорией оптимизации. При решении же аналогичных задач, состоящих в наилучшем управлении процессами, описываемыми системой дифференциальных уравнений, возникают задачи оптимального управления. Сущность решения этих задач заключается в нахождении такого управления, которое бы минимизировало заданный критерий качества исследуемого процесса. Методология решения задач оптимального управления была разработана Л.С.Понтрягиным, В.Г.Болтянским и Р.В.Гамкрелидзе (1966) с обоснованием необходимых условий оптимальности. Необходимые условия оптимальности сейчас принято называть "принципом максимума Понтрягина".

Для формулировки задачи оптимального управления введем следующие обозначения и принятые понятия. Пусть управляемая система в каждый момент времени t описывается вектор-функцией

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad (1)$$

где $x(t)$ — n -мерный вектор фазовых координат управляемой системы в n -мерном пространстве, E_n точек $x(t)$ — её фазовое пространство. Управляемый процесс протекает по времени на интервале $[t_0, T]$ и определен при

$$t_0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Значение $x(t)$ в момент времени t определяет состояние системы в момент t , а динамика изменения состояний системы во времени описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad (3)$$

где $\dot{x}$ — известная n -мерная вектор-функция, предполагаемая достаточно гладкой.

Пусть U — замкнутое множество m -мерного пространства. Функция $u(t)$, принадлежащая U , является m -мерной вектор-функцией

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)), \quad (4)$$

и называется управлением.

Для управления $u(t)$, определенного на $[t_0, T]$, решение системы уравнений (3) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ является траекторией, а система дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию управляемой системы (3) — уравнениями движения системы.

Ограничения, наложенные на $u(t)$ в форме

$$u \in U \quad (5)$$

могут быть различными для каждого из элементов u и определяют

допустимое управление, удовлетворяющее (5). Причем $u(t)$ удобно выбирать из класса измеримых функций, в частности, кусочно-непрерывных.

Одним из необходимых условий постановки задач об определении допустимого управления $u(t)$ на траектории движения системы, определяемой уравнениями и ограничениями (1-5), является введение минимизируемого функционала, который описывает избранную характеристику качества процесса. Иначе сама задача оптимального управления теряет смысл.

Функционал, избираемый в качестве критерия допустимого управления, может задаваться различными математическими конструкциями. Ограничимся пока конструкцией вида

$$J = (c, x(T)), \quad T > t_0. \quad (6)$$

Здесь T – заданный момент времени, определяющий момент окончания процесса, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ – ненулевой постоянный вектор, а скобками обозначено скалярное произведение векторов.

Задачу оптимального управления в этом случае можно сформулировать следующим образом. Для управляемой системы (3) с ограничениями (1,2,4,5) нужно определить допустимое управление $u(t)$, минимизирующее значение функционала (6). Ее решение, основанное на принципе максимума Л.С. Понтрягина, заключается в следующем.

Вводится n -мерный вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ сопряженных переменных и функция Гамильтона, определяемая из системы сопряженных переменных

$$H(t, x, p, u) = \sum_{j=1}^n p_j f_j, \quad (7)$$

где $f_j = \dot{x}_j$ и находится из (3), то есть f_j являются уравнениями движения системы. Первая производная n -мерного вектора p находится решением системы

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}. \quad (8)$$

При этом в момент времени $t=T$ сопряженные переменные $p(T)$ находятся из условий трансверсальности

$$p(T) = -c. \quad (9)$$

Согласно принципу максимума искомое оптимальное управление доставляет функции H из (7) максимум по $u \in U$ при любом t на интервале $[t_0, T]$, если x и p удовлетворяют уравнениям и ограничениям (1-5, 8-9).

Для численного решения поставленной оптимизационной задачи в [5] предложен метод последовательных приближений в пространстве управлений, простейший вариант которого заключается в следующем.

На первом этапе задаются исходные значения управляющих функций $u^{(1)}(t)$, выбираемые из физических соображений протекающего процесса. Первоначальное управление задается на всей траектории системы и решается задача Коши с ограничениями на правом конце. Здесь в качестве ограничения выступает момент окончания процесса по времени (T). Решая задачу Коши с заданным управлением на интервале $[t_0, T]$, вычисляется траектория движения системы $x = x^{(1)}(t)$. На последнем шаге интегрирования системы подсчитывается минимизируемый функционал. Далее, исходя из условий трансверсальности,

вычисляются значения сопряженных переменных $p(T)$, записанных для исходной системы уравнений в форме (9).

На втором этапе решается задача Коши "справа-налево" от момента $t=T$ до $t=t_0$. По исходным значениям управляющих функций $u^{(1)}(t)$ и вычисленным фазовым координатам $x^{(1)}(t)$ определяются сопряженные переменные $p^{(1)}(t)$ на интервале $[t_0, T]$.

И на третьем этапе вычислений определяется новое управление $u^{(2)}(t)$ из условия

$$H(t, x^{(1)}(t), p^{(1)}(t), u^{(2)}(t)) = \max_{u \in U} H(t, x^{(1)}(t), p^{(1)}(t), u). \quad (10)$$

Вычисленное управление $u^{(2)}(t)$ принимается за исходное и итерационный процесс продолжается с первого этапа вычислений до тех пор, пока величина функционала на следующей итерации не будет превышать вычисленное значение функционала на предыдущей итерации на величину задаваемой точности. Полученное после сходимости решение будет удовлетворять принципу максимума. Основываясь на вышесказанном, используем методологию решения задач оптимального управления для движения биомеханической системы.

Рассмотрим движение биомеханической системы, описанной в работе [1] уравнениями

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) - \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) + Y_i \cos \varphi_i = u_i - u_{i+1}, \quad (11)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Здесь n – количество звеньев моделируемой системы, φ – вектор обобщенных координат биомеханической системы, A_{ij} – матрица динамических характеристик, определяемая масс-инерционными характеристиками звеньев тела спортсмена, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ – соответственно первая и вторая производная вектора обобщенных координат по времени, Y – вектор обобщенных сил, u – вектор управляющих моментов мышечных сил в суставах. Приведем уравнение движения (11) к нормальному виду

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{\varphi}_j \cos(\varphi_j - \varphi_i) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{\varphi}_j^2 \sin(\varphi_j - \varphi_i) - Y_i \cos \varphi_i + u_i - u_{i+1} \quad (12)$$

и запишем в следующей форме

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{\varphi}_j = \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{\varphi}_j^2 + B_i, \quad (13)$$

где

$$a_{ij} = A_{ij} \cos(\varphi_j - \varphi_i), \quad b_{ij} = A_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i),$$

$$B_{ij} = -Y_i \cos \varphi_i + u_i - u_{i+1}.$$

Запишем матрицу левой части системы уравнений (13), составленную из коэффициентов a_{ij} при неизвестных $\ddot{\varphi}_j$ в виде

$$A = \left\| a_{ij} \right\|, \quad (14)$$

а правую часть системы уравнений (13) в виде вектор-матрицы

$$f = \| f_i \|, \quad (15)$$

в которой элемент f_i определяется из выражения

$$f_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{\phi}_j^2 + B_i. \quad (16)$$

В сокращенной форме имеем следующую запись системы исходных уравнений (11)

$$A\ddot{\phi} = f, \quad (17)$$

Решая систему (17) методом обращения матриц, получим ее решение в виде

$$\ddot{\phi} = A^{-1} f, \quad (18)$$

где A^{-1} – обратная матрица по отношению к исходной матрице A .

Таким образом, уравнения (18) являются уравнениями движения биомеханической системы и определяют ее эволюцию во времени. Зададим ограничения на управляющие функции $u_i(t)$ в форме (5)

$$u(t) \in U,$$

ограничение на момент окончания процесса в виде

$$h(T, x(T)) = 0. \quad (19)$$

Наложим краевые условия в конце описываемого уравнениями (11) процесса

$$g_i(T, x(T)), \quad i=1, \dots, r, \quad (20)$$

где $0 \leq r < n$. То есть число краевых условий не должно превышать количества звеньев моделируемой системы, но в то же время может быть и равным нулю, если краевые условия отсутствуют.

Пусть минимизируемый функционал имеет вид

$$J = F(T, x(T)). \quad (21)$$

Как отмечается в [1], [2] для задачи оптимального управления, поставленной в форме, описываемой уравнениями (18) и ограничениями (5,19,20) с введением минимизируемого функционала (21), сопряженные переменные и функция Гамильтона имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{\phi}_i + \sum_{i=1}^n p_{n+i} \ddot{\phi}_i, \quad (22)$$

а для сопряженных переменных имеет место следующее соотношение

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (23)$$

Здесь x_i определяются зависимостями

$$x_i = \phi_i, \quad i = 1, \dots, n; \quad x_{n+i} = \dot{\phi}_i, \quad i = n+1, \dots, 2n. \quad (24)$$

При такой замене переменных имеем следующую систему сопряженных переменных

$$\begin{cases} \dot{p}_i = - \sum_{j=n+i}^{2n} p_j \frac{\partial \ddot{\varphi}_{j-n}}{\partial x_i}, & i = 1, \dots, n; \\ \dot{p}_{n+i} = - \sum_{j=n+i}^{2n} p_j \frac{\partial \ddot{\varphi}_{j-n}}{\partial x_{n+i}} - p_i, & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (25)$$

Следовательно, для определения $2n$ -мерного вектора $\dot{p} = (\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_{2n})$ первых производных импульсов Гамильтона по времени необходимо знать значения импульсов p_{n+i} и значения частных производных от обобщенных ускорений $\ddot{\varphi}_i$ по обобщенным координатам φ_i и скоростям $\dot{\varphi}_i$.

Так как решением исходной системы уравнений (11) является матричное равенство (18), представленное в виде произведения матриц A^{-1} и f , то частные производные от всех элементов вектора-матрицы $\ddot{\varphi}$ по обобщенным координатам и скоростям можно представить в виде

$$\frac{\partial \ddot{\varphi}}{\partial x_i} = \frac{\partial (A^{-1} f)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (26)$$

По правилу дифференцирования произведения и дифференцирования обратной матрицы получим:

$$\frac{\partial (A^{-1} f)}{\partial x_i} = (-A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x_i} A^{-1}) f + A^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (27)$$

Полученные уравнения позволяют автоматизировать процедуру вычислительных операций определения частных производных вектор-матрицы $\ddot{\varphi}$ по обобщенным координатам и обобщенным скоростям в компьютерной программе для ПЭВМ.

Структура частных производных в соотношениях

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (28)$$

достаточно проста и приводить ее в развернутой записи не будем.

В момент времени $t=T$ для краевых условий соблюдается равенство

$$g_i(T, x(T))=0, \quad (29)$$

где g_i - функции, описывающие заданные краевые условия.

Условия окончания процесса также можно задать в виде функции

$$h(T, x(T))=0, \quad (30)$$

где h - заданная функция, служащая условием, определяющим момент T окончания процесса. Как видно из (30), h может являться непосредственно как функцией времени, так и функцией фазового состояния системы. Это допускает определенный произвол в задании h , связанный с логикой протекающего процесса.

Минимизируемый функционал, который рассматривается в исследуемом процессе в аспекте критерия качества двигательного действия, в достаточно общем случае имеет вид

$$J=F(T, x(T)). \quad (31)$$

Как видно из его математического представления, функционал является функцией фазового состояния системы в момент времени $t=T$. То есть функционал определяет качество выполнения упражнения в момент окончания процесса по какому-либо биомеханическому показателю движения.

Пусть управляемая биомеханическая система по-прежнему описывается системой дифференциальных уравнений (11), а условия в конце процесса и минимизируемый функционал имеют вид (29,30,31). В этом случае вместо условия (9) для $p(t)$ будем иметь следующие условия трансверсальности при $t=T$:

$$p(T) = \left(\frac{dF}{dt} - \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{dg_i}{dt} \right) \left(\frac{dh}{dt} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial x} + \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (32)$$

В данной записи условия трансверсальности $\frac{\partial}{\partial x}$ – оператор градиента по фазовым координатам x , $\frac{d}{dt}$ – полная производная вдоль траектории системы

(11). В предположении, что полная производная $\frac{dh}{dt}$ в нуль не обращается, из

(32) определяются $p(T)$ в точке T .

В разработанной нами компьютерной программе “Optimal Control” [3]

предусмотрен и случай отсутствия краевых условий. Производные $\frac{d}{dt}$ определяются по последнему шагу интегрирования системы (11) через конечно-разностные отношения.

Серия проведенных вычислительных экспериментов показала корректность разработанной для ПЭВМ программы “Optimal Control”. Программа составлена на языке Pascal, прошла тестирование и используется нами в научно-исследовательских целях. Дальнейший этап исследования предполагает построение оптимальной техники спортивных упражнений на ПЭВМ для конкретных исполнителей и разработку соответствующей методики обучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Загревский В.И.** Программирование обучающей деятельности спортсменов на основе имитационного моделирования движений человека на ЭВМ. Дисс. на соискание ученой степени доктора педагогических наук. -М., 1994. – С. 108-117.
2. **Зинковский А.В., Трофимова И.А., Чистяков В.А.** Проблема оптимального построения техники спортивных движений в спорте. Вопросы физического воспитания студентов. – Изд-во ЛГУ, 1983. Выпуск XV.-С. 101-110.
3. **Лавшук Д.А.** Синтез оптимального управления динамическими системами на основе принципа максимума Понтрягина. Материалы исследований молодых ученых, аспирантов, соискателей и студентов. -Изд-во МГУ им.А.А.Кулешова, 1997. -С. 98-101.
4. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. – М., “Наука”, 1966. – 366 с.
5. **Черноустько Ф.А., Баничук Н.В.** Вариационные задачи механики и управления. – М., 1973. – С. 186-206.