Н.В. Сакович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Контрольные задания
и методические указания к ним

Могилев 2007

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.А. КУЛЕШОВА"

Н.В. Сакович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Контрольные задания и методические указания к ним

Могилев 2007

УДК 519.85(076.1/075.8)
ББК 22.18я73
С15

Печатается по решению редакционно-издательского и экспертного совета МГУ им. А.А. Кулешова

Рецензент
кандидат физико-математических наук доцент
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
МГУ им. А.А. Кулешова
Б.Д. Чеботаревский

Сакович, Н.В.

С15 Высшая математика. Математическое программирование: контр. задания и метод. указания к ним / Н.В. Сакович. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2007. – 48 с.

Данное издание по математическому программированию предназначено для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям. Контрольные задания дополнены подробными решениями типовых задач, что создает достаточную базу для самостоятельной работы студентов. Выполнение студентами предлагаемых контрольных заданий позволяет получить навыки математического моделирования несложных экономических процессов, а также усвоить методы решения задач на экстремум, возникающих при планировании и организации производства.

УДК 519.85(076.1/075.8)
ББК 22.18я73

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1

В следующей задаче линейного программирования (ЗЛП) целевая функция содержит параметр a:

$$Z(X) = ax_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2(k+1), \\ \quad x_3 + x_4 = k+1; \end{cases}$$

$x_j \geq 0$, $(j = \overline{1,4})$, k – номер варианта.

Требуется:

1) доказать, что данную ЗЛП можно решить графически;
2) привести задачу к стандартной задаче линейного программирования;
3) построить область допустимых решений;
4) определить, при каких значениях параметра a задача будет иметь:
   а) бесконечное множество решений;
   б) единственное решение;
   в) не имеет решений;
5) при одном из значений параметра a в случае, когда задача имеет бесконечное множество решений, решить ее графически и проверить выполнимость основных свойств решений ЗЛП.

Замечание: Во всех контрольных заданиях k – номер варианта.

Задача 2

Предприятие может выпускать продукцию двух видов. Используются три вида ресурсов R_1, R_2, R_3. Норма расходов, объемы имеющихся единиц продукции представлены в таблице.

Ресурсы	Нормы расхода на единицу продукции		Объем ресурса
	$П_1$	$П_2$	
R_1	4	5	30+ k
R_2	1	3	15+ k
R_3	2	1	20+ k
Прибыль	10	k+1	

Требуется:

1) составить математическую модель прямой и двойственной задачи;

2) найти оптимальный план выпуска продукции;

3) используя теорию двойственности, выписать оптимальное решение двойственной задачи;

4) дать содержательный экономический анализ основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач;

5) проверить условие о дополняющей нежесткости;

6) установить, как изменится прибыль, если незначительно (на единицу) увеличить или уменьшить объем одного ресурса.

Задача 3

Решить следующую ЗЛП симплексным методом с искусственным базисом:

$$\max(\min)\ Z(\mathbf{X}) = -x_1 - x_2;$$

$$\begin{cases} -(k+1)\cdot x_1 + x_2 \le 5, \\ 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 - (1+\kappa)\cdot x_2 \le 5; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

Задача 4

Определить план перевозок продукции из трех пунктов отправления в пять пунктов назначения так, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными. Запасы, потребности и стоимость перевозки 1 единицы продукции приведены в таблице.

Пункты отправления	Пункты назначения					Запас груза (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	$5+k$	7	11	8	180
A_2	8	12	$k+1$	6	5	240
A_3	$k+1$	20	15	10	11	$50+k$
Потребность в грузе (b_j)	150	100	180	$2(k+15)$	75	

Начальный опорный план построить различными методами.

Задача 5

Два предприятия выделяют денежные средства на строительство четырех объектов. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль первого предприятия в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы:

$$\begin{pmatrix} -(5+k) & 15 & k & 20 \\ -(2+k) & 8 & 1+k & 5 \\ k & 10+k & -(3+k) & 90 \\ -(4+k) & 3 & -k & -(4+k) \end{pmatrix}.$$

Для упрощения задачи принять, что убыток второго предприятия равен прибыли первого.

Требуется:

1) определить максиминную и минимаксную стратегии предприятий;

2) произвести возможные упрощения платежной матрицы;

3) решить матричную игру:

а) используя графический метод решения;

б) сведя матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования.

Задача 6

Руководство универмага заказывает товар вида А. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от $11 + k$ до $14 + k$ единиц. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения покупательского спроса, то руководство может срочно заказать и завезти недостающее количество. Причем расходы по срочному заказу и завозу единицы товара составляют $0{,}5(k + 5)$ денежных единиц. Если же спрос будет меньше наличного количества товара, то нереализованный товар хранится на складе в универмаге, причем расходы за хранение единицы товара составляют 8 денежных единиц.

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу игры;

2) найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь:

а) критерием Байеса (считать вероятности, соответственно, равными 0,1; 0,3; 0,4; 0,2);

б) критерием Лапласа;

в) критерием Вальда;

г) критерием Сэвиджа;

д) критерием Гурвица (взяв значение параметра в критерии Гурвица равным 0,7).

Задача 7

Найти оптимальное целочисленное решение следующей задачи:

$$Z(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le k + 2, \\ 2x_1 \le 2k + 3; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0;$$

$$x_j \in Z, \;\; j = 1,2.$$

Задача 8

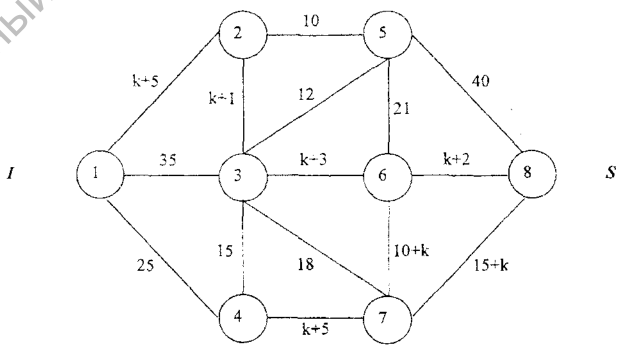
Коммивояжер должен посетить каждый из пяти городов только один раз и вернуться в исходный пункт. Матрица расстояний между городами следующая:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 15 & 40 & 5+k & 18 \\ 22 & \infty & 10+k & 35 & \infty \\ 7 & 10+k & \infty & 9 & 20 \\ \infty & 15 & 6 & \infty & k+1 \\ 18 & 4+k & 5 & 40 & \infty \end{pmatrix}.$$

Требуется найти маршрут минимальной суммарной длины (гамильтонов контур минимальной длины).

Задача 9

На заданной сети сформировать поток максимальной мощности, направленный от истока I в сток S при условии, что пропускные способности ребер сети в обоих направлениях одинаковы. Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.



Задача 10

В следующей таблице представлен список комплекса операций по реконструкции цеха.

Операции	Непосредственно предшествующие операции	Продолжительность (дни)	Потребность в специалистах (чел.)
A	–	k+1	10
B	–	12	5
C	–	9	2
D	*A*	6	9
E	*B*, *D*	–	–
F	*A*	6	3
M	*B*, *D*	k+3	8
N	*F*, *E*	21	6

Требуется:

1) построить сетевой график выполнения комплекса работ и пронумеровать события в соответствии с алгоритмом Фалкерсона;

2) вычислить непосредственно на сетевом графике сроки свершения событий, сроки начала и окончания работ, полные и свободные резервы времени работ (полученные результаты занести в таблицу); выделить на сетевом графике критический путь;

3) построить линейный график комплекса работ и определить по нему критический срок и критический путь;

4) построить шкалу занятости специалистов в ходе выполнения работ комплекса;

5) используя метод выравнивания потребностей в ресурсах (количество специалистов, занятых одновременно, не *должно* превышать значение $R=20$), определить время осуществления комплекса работ.

Задача 11

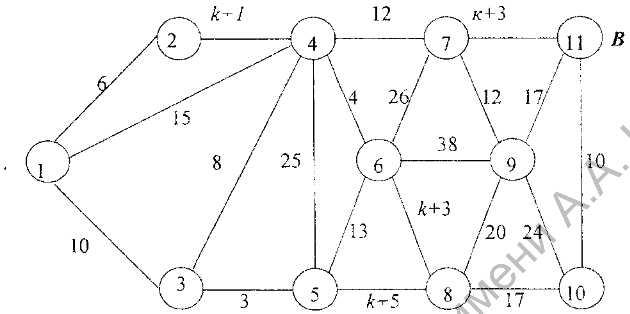
Методом множителей Лагранжа найти условные экстремумы функции:

$$Z(X) = 4x_1+5x_2,\ X \in \left\{(x_1, x_2) \in R^2 \middle| x_1^2 + x_2^2 = k+1\right\}$$

Дать экономическую интерпретацию задачи, считая Z – как доход, а $(k+1)$ – как затраты на ресурсы.

Задача 12

Задана транспортная сеть, на которой указаны пункт отправления A и пункт назначения B. Между ними имеются промежуточные пункты, соединенные участками пути с указанием расстояния между ними. Методами динамического программирования найти маршрут минимальной длины из пункта отправления в пункт назначения.



Образцы решения задач (решение нулевого варианта $k = 0$)

Задача 1

В следующей задаче линейного программирования (ЗЛП) целевая функция содержит параметр a:

$$Z(X) = ax_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ \quad x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ (j = \overline{1,4}).$$

Требуется:

1) доказать, что данную ЗЛП можно решить графически;
2) привести задачу к стандартной задаче линейного программирования;
3) построить область допустимых решений;
4) определить, при каких значениях параметра a задача будет иметь:
   а) бесконечное множество решений;
   б) единственное решение;
   в) не имеет решений;

5) при одном из значений параметра a в случае, когда задача имеет бесконечное множество решений, решить ее графически и проверить выполнимость основных свойств решений ЗЛП.

Решение

1) Данную задачу можно решить графически, если в ее канонической записи присутствует не более двух свободных переменных, т.е. $n-r\le 2$, где n – число переменных, r – ранг матрицы системы ограничений задачи.

В системе ограничений выразим базисные неизвестные x_2, x_4 через свободные x_1, x_3:

$$\begin{cases} x_2=-2x_1-x_3+2, \\ x_4=-x_3+1. \end{cases}$$

Т.к. $n-r=4-2=2$, то данную задачу можно решить графически.

2) Подставив выражения для x_2 и x_4 в целевую функцию и учитывая неотрицательность переменных, перейдем к следующей эквивалентной ЗЛП с двумя переменными:

$$Z=ax_1+2(-2x_1-x_3+2)+4x_3+3(-x_3+1)=$$

$$=ax_1-4x_1-2x_3+4+4x_3-3x_3+3=(a-4)x_1-x_3+7;$$

$$\begin{cases} x_2=-2x_1-x_3+2\ge 0, \\ x_4=-x_3+1\ge 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1-x_3+2\ge 0, \\ -x_3+1\ge 0. \end{cases}$$

Таким образом, эквивалентная ЗЛП с двумя переменными имеет вид:

$$\min Z=(a-4)x_1-x_3+7;$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_3\le 2, \\ x_3\le 1; \end{cases}$$

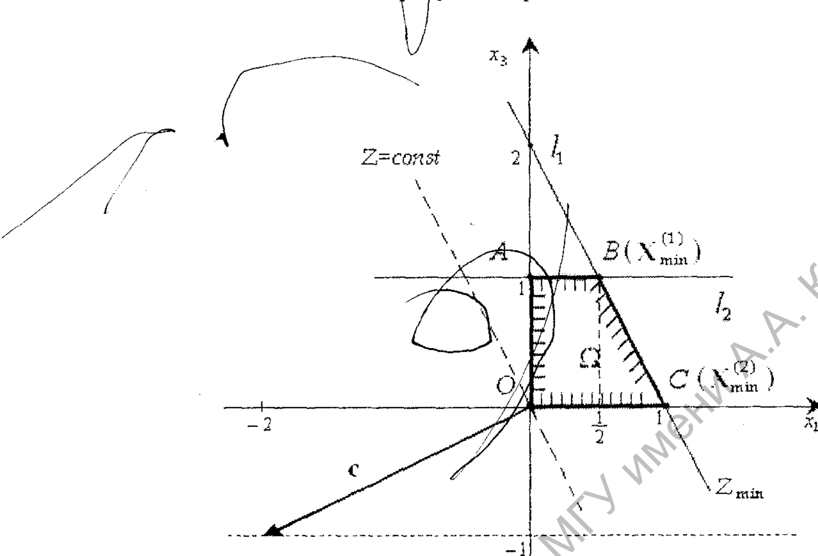
$$x_1\ge 0,\ \ x_3\ge 0.$$

3) Построим область допустимых решений, для чего построим прямые:

$$-2x_1-x_3+2=0 \quad (l_1),$$
$$-x_3+1=0 \quad (l_2).$$

Определим полуплоскости, в которых выполняются неравенства.

Прямая l_1 разбивает плоскость на две полуплоскости, одна из которых содержит начало координат. Так как $-2\cdot 0-0+2>0$, то неравенство $-2x_1-x_3+2\ge 0$ определяет ту из двух полуплоскостей, которая содержит начало координат. Аналогично можно установить, что неравенство $-x_3+1\ge 0$ определяет полуплоскость, содержащую начало координат. Так как $x_1\ge 0, x_2\ge 0$, то многоугольник решений должен находиться в первой координатной четверти. Решением системы заданных неравенств является пересечение указанных полуплоскостей. Область допустимых значений выделена на рисунке штриховкой.



4) Вектор **c** $(a-4;-1)$ – вектор наискорейшего возрастания целевой функции (вектор градиентного направления).

а) В случае, когда вектор **c** будет перпендикулярен прямой BC $(-2x_1 - x_3 + 2 = 0)$, то линия уровня $Z = const$ будет параллельна прямой BC, и задача будет иметь бесконечное множество решений, принадлежащих отрезку BC. Это произойдет в случае, когда

$$\frac{a-4}{2} = \frac{-1}{1}, \text{ т.е. при } a = 2.$$

Задача также будет иметь бесконечное множество решений, принадлежащих отрезку AB, в случае, когда вектор **c** будет перпендикулярен прямой AB ($-x_3 + 1 = 0$). Это произойдет в случае, когда первая координата вектора **c** равна 0, т.е. когда $a - 4 = 0$, т.е. когда $a = 4$.

б) Задача будет иметь единственное решение при всех значениях а, кроме 2 и 4.

в) Значения параметра, при котором данная задача не имеет решений, нет.

5) Решим задачу графически при $a = 2$.

В этом случае: $Z_{\min} = -2x_1 - x_3 + 7$.

a) строим градиентный вектор $\mathbf{c}\,(-2;-1)$;

b) проводим перпендикулярно градиентному вектору $\mathbf{c}$ произвольную линию уровня $Z = const$, в данном случае строим прямую $-2x_1 - x_3 = 0$;

c) перемещаем прямую $-2x_1 - x_3 = 0$ в антиградиентном направлении до крайней точки встречи с областью Ω, получаем бесконечное множество решений, принадлежащих отрезку BC. В подобных случаях говорят, что задача имеет ***альтернативный оптимум.***

Найдем два опорных решения (точки B и C).

$$B = l_1 \cap l_2 : \begin{cases} -2x_1 - x_3 + 2 = 0, \\ -x_3 + 1 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 1, \\ -2x_1 = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$$C = l_1 \cap Ox_1 : \begin{cases} x_3 = 0, \\ -2x_1 - x_3 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_1 = 1; \end{cases}$$

Значит, $B(\frac{1}{2};\quad 1)$, $C(1;\quad 0)$.

Подставляя значения свободных переменных x_1 и x_2 в исходную ЗЛП, определим оптимальные значения оставшихся переменных x_2, x_4.

Для точки B: $\quad x_1^* = \dfrac{1}{2}, x_3^* = 1$;

$$x_2^* = -2 \cdot \frac{1}{2} - 1 + 2 = 0;$$

$$x_4^* = -1 + 1 = 0.$$

Значит, $X_{\min}^{(1)} = \left(\dfrac{1}{2};\quad 0;\quad 1;\quad 0\right)$, $Z(X_{\min}^{(1)}) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 5$.

Для точки C: $\quad x_1^* = 1, x_3^* = 0$;

$$x_2^* = -2 \cdot 1 - 0 + 2 = 0;$$

$$x_4^* = 0 + 1 = 1.$$

Значит, $X_{min}^{(2)} = (1;\quad 0;\quad 0;\quad 1)$, $Z(X_{\min}^{(2)}) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 5$.

Опорные планы $X_{\min}^{(1)}$ и $X_{\min}^{(2)}$ являются невырожденными, т.к. нулевых координат у них ровно $n-r=2$.

По основной теореме линейного программирования: если ЗЛП достигает экстремального значения более чем в одной угловой точке, то этого значения ЗЛП достигает и в выпуклой линейной комбинации этих угловых точек.

$$X_{\min}^{*} = \lambda X_{\min}^{(1)} + (1-\lambda) X_{\min}^{(2)} = \left(\frac{\lambda}{2};\quad 0;\quad \lambda;\quad 0\right) + (1-\lambda;\quad 0;\quad 0;\quad 1-\lambda) =$$

$$= \left(\frac{2-\lambda}{2};\quad 0;\quad \lambda;\quad 1-\lambda\right), \text{ где } 0 \le \lambda \le 1.$$

$$Z_{\min}^{*} = Z(X_{\min}^{*}) = 2\cdot\frac{2-\lambda}{2} + 2\cdot 0 + 4\cdot\lambda + 3\cdot(1-\lambda) = 2-\lambda+4\lambda+3-3\lambda = 5.$$

Ответ: $X_{\min}^{*} = \left(\frac{2-\lambda}{2};\quad 0;\quad \lambda;\quad 1-\lambda\right)$, где $0 \le \lambda \le 1$, $Z_{\min}^{*} = 5$.

Задача 2

Предприятие может выпускать продукцию двух видов. Используются три вида ресурсов R_1, R_2, R_3. Норма расходов, объемы имеющихся единиц продукции представлены в таблице.

Ресурсы	Нормы расхода на единицу продукции		Объем ресурса
	$П_1$	$П_2$	
R_1	4	5	30
R_2	1	3	15
R_3	2	1	20
Прибыль	10	1	

Требуется:

1) составить математическую модель прямой и двойственной задачи;

2) найти оптимальный план выпуска продукции;

3) используя теорию двойственности, выписать оптимальное решение двойственной задачи;

4) дать содержательный экономический анализ основных и дополнительных переменных прямой и двойственной задач;

5) проверить условие о дополняющей нежесткости;

6) установить, как изменится прибыль, если незначительно (на единицу) увеличить или уменьшить объем одного ресурса.

Решение

1) Обозначим через $\mathbf{X} = (x_1; x_2)$ план выпуска продукции, показывающий, какие виды продукции и в каких количествах нужно производить, чтобы обеспечить максимальную прибыль от реализации.

Так как c_j – цена реализации продукции *j*-го вида, то цена реализованных x_j единиц будет равна $c_j x_j$, а общая цена $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$. Это выражение – целевая функция, которую нужно максимизировать.

Так как $a_{ij} x_j$ – расход *i*-го вида сырья на изготовление x_j единиц продукции вида *j*, то, просуммировав расход *i*-го вида сырья на выпуск двух видов продукции, получим общий расход этого сырья, который не должен превосходить b_i единиц:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i\,(i = \overline{1,3}).$$

Так как x_j – объемы выпуска продукции, то $x_j \ge 0, (j = 1,2)$.

Таким образом, экономико-математическая модель данной задачи примет вид:

$$\max Z(\mathbf{X}) = 10x_1 + x_2;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 30, \\ x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 + x_2 \le 20; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = 1,2).$$

Составим модель двойственной задачи.
Напишем матрицу исходной задачи

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 30 \\ 1 & 3 & 15 \\ 2 & 1 & 20 \\ \hline 10 & 1 & Z_{\max} \end{array}\right)$$

и транспонируем ее. В результате получим матрицу двойственной задачи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 10 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 30 & 15 & 20 & F_{\min} \end{array}\right).$$

При этой матрице напишем модель задачи, двойственной к исходной задаче:

$$F(\mathbf{Y}) = 30y_1 + 15y_2 + 20y_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 10, \\ 5y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ (i = \overline{1,3}).$$

2) Решим исходную задачу симплекс-методом.

Преобразуем задачу к каноническому виду. Введем три дополнительных неотрицательных переменных x_3, x_4, x_5 и добавим их к левым частям неравенств, преобразуя их в равенства.

Получаем задачу: $\max Z = 10x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 30, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 15, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 20; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,5}).$$

Каждая из переменных x_3, x_4, x_5 входит только в одно из уравнений системы. Возьмем эти переменные в качестве базисных, а переменные x_1, x_2 – в качестве свободных. Составляем первую симплекс-таблицу.

Таблица 2.1

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B	θ	
		10	1	0	0	0			
x_3	0	4	5	1	0	0	30	$\frac{15}{2}$	← min
x_4	0	1	3	0	1	0	15	15	
x_5	0	2	1	0	0	1	20	10	
Δ_j		–10	–1	0	0	0	0		

Запишем начальный опорный план: $X^0 = (0;0 \mid 30;15;20)$, $Z(X^0) = 0$. Этот план не является оптимальным, так как в индексной строке есть отрицательные элементы.

Чтобы получить новый опорный план, выполним симплексные преобразования таблицы 2.1. Введем в базис переменную x_1, которой соответствует наибольшая по модулю отрицательная индексная оценка. В качестве разрешающего в предстоящем симплексном преобразовании возьмем 1-й столбец. Чтобы определить переменную, выводимую из базиса, составим симплексные отношения и выберем наименьшее из них:

$$\min\left\{\frac{30}{4};\frac{15}{1};\frac{20}{2}\right\}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}.$$

Следовательно, из базиса следует вывести переменную x_3. На пересечении разрешающих столбца и строки находится разрешающий элемент $a_{11}=4$, относительно которого выполнятся симплексные преобразования. При переходе к новой симплексной таблице будем пользоваться следующими правилами:

$$a'_{ij}=\begin{cases} a_{ij}-\dfrac{a_{i_0j}a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}}, если\ i\neq i_0 \\ \dfrac{a_{i_0j}}{a_{i_0j_0}}, если\ i=i_0. \end{cases}$$

Аналогично определяются элементы индексной строки и столбца свободных членов.

В результате приходим к таблице 2.2:

Таблица 2.2

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
		10	1	0	0	0	
x_1	10	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{15}{2}$
x_4	0	0	$\frac{7}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{15}{2}$
x_5	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	5
Δ_j		0	$\frac{23}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	0	75

Так как в индексной строке нет отрицательных элементов, то полученный план $\left(\frac{15}{2};0\mid 0;\frac{15}{2};5\right)$ является оптимальным, а соответствующее ему значение целевой функции Z = 75 максимальным.

3) Из теоремы двойственности следует, что если решена одна из пары двойственных задач, то одновременно найдено решение и другой задачи. Компоненты оптимального плана двойственной задачи находятся в индексной строке последней симплексной таблицы уже решенной задачи.

Запишем каноническую форму математической модели двойственной задачи, введя дополнительные (базисные) переменные y_4, y_5.

$$F = 30y_1 + 15y_2 + 20y_3 + 0 \cdot y_4 + 0 \cdot y_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 + 2y_3 - y_4 = 10, \\ 5y_1 + 3y_2 + y_3 - y_5 = 1; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ \ (i = \overline{1,5}).$$

Соответствие между переменными двойственных задач примет вид:

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{x_1 \quad\quad x_2}^{СП} & & \overbrace{x_3 \quad\quad x_4 \quad\quad x_5}^{БП} \\ \updownarrow \quad\quad \updownarrow & & \updownarrow \quad\quad \updownarrow \quad\quad \updownarrow \\ \underbrace{y_4 \quad\quad y_5}_{БП} & & \underbrace{y_1 \quad\quad y_2 \quad\quad y_3}_{СП} \end{array}.$$

В данном случае:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \frac{23}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}.$$

Следовательно, оптимальный план двойственной задачи имеет вид $\overline{\mathbf{Y}^*} = \left(\frac{5}{2};\ \ 0;\ \ 0 \,|\ \ 0;\ \frac{23}{2}\right)$. Из теоремы двойственности следует, что экстремальные значения целевых функций разрешимых двойственных задач совпадают, поэтому $F_{min} = 75$.

4) Таким образом, для получения максимального дохода предприятию необходимо выпустить $\frac{15}{2} = 7{,}5$ единиц продукции первого вида. Продукцию второго вида выпускать не следует. При этом доход предприятия составит 75 денежных единиц. При этом в плане производства ресурсы первого вида будут израсходованы полностью, но останется 7,5 единиц ресурсов второго вида и 5 единиц ресурсов третьего вида.

Сформулируем в экономических терминах двойственную задачу.

Пусть некоторая организация может закупить все ресурсы, которыми располагает предприятие. Необходимо определить оптимальные цены y_i^* на эти ресурсы, исходя из условия, что покупающая организация стремится минимизировать общую оценку ресурсов. При этом за ресурсы покупающая организация должна уплатить сумму, не меньшую той, которую может выручить предприятие при организации собственного производства.

Оценка для первого вида ресурса положительна, что указывает, что этот вид ресурса наиболее дефицитный. Увеличение объема ресурса первого вида на одну единицу позволило бы получить оптимальный план, для которого доход увеличился бы на $\frac{5}{2} = 2{,}5$ денежных единиц.

Равенство нулю оценок для ресурсов второго и третьего видов говорит о том, что дальнейшее увеличение объема этих видов ресурсов не повлияет на оптимальный план производства и на сумму доходов.

Дополнительные двойственные переменные являются мерой убыточности продукции, которую согласно оптимальному плану нецелесообразно выпускать. Так как $y_5^* = \frac{23}{2}$, то стоимость ресурсов, расходуемых на производство одной единицы продукции второго вида (в оптимальных оценках), превосходит стоимость единицы этой продукции ($c_2 = 1$) на $y_5^* = \frac{23}{2}$. Следовательно, при необходимости ее производства цена должна быть не менее $c_2 = \frac{23}{2}$ денежных единиц.

5) Проверим условие о дополняющей нежесткости:

$$y_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0 \quad \left(i = \overline{1,3}\right);$$

$$y_1^* \cdot \left(4x_1^* + 5x_2^* - 30\right) = \frac{5}{2} \cdot \left(4 \cdot \frac{30}{4} + 5 \cdot 0 - 30 \right) = 0$$

$$y_2^* \cdot \left(x_1^* + 3x_2^* - 15\right) = 0 \cdot \left(\frac{30}{4} + 3 \cdot 0 - 15 \right) = 0$$

$$y_3^* \cdot \left(2x_1^* + x_2^* - 20\right) = 0 \cdot \left(2 \cdot \frac{30}{4} + 0 - 20 \right) = 0$$

Условие о дополняющей нежесткости выполняется.

6) Если объем первого ресурса увеличить на единицу, то прибыль, соответственно, увеличится на $y_1^* = \frac{5}{2}$ денежных единиц.

Увеличение или уменьшение объема второго или третьего ресурса ни к чему не приведет, так как они избыточны $\left(y_2^* = y_3^* = 0\right)$.

Ответ: $\mathbf{X}^*_{\max} = \left(\dfrac{15}{2};\ 0\right)$, $Z^*_{\max} = 75$, $\mathbf{Y}^*_{\min} = \left(\dfrac{5}{2};\ 0;\ 0\right)$, $F^*_{\min} = 75$.

Задача 3

Решить следующую ЗЛП симплексным методом с искусственным базисом:

$$\max(\min)\ Z(\mathbf{X}) = -x_1 - x_2;$$

$$\begin{cases} -(k+1)\cdot x_1 + x_2 \le 5, \\ 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 - (1+\kappa)\cdot x_2 \le 5; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0.$$

Решение

Перейдем к каноническому виду путем введения дополнительных переменных x_3, x_4, x_5. Получаем следующую систему:

$$\max(\min) Z(\mathbf{X}) = -x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 + x_2 - x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 (j = \overline{1,5}).$$

В первом и третьем ограничениях в качестве базисных переменных можно взять дополнительные переменные x_3 и x_5. Во втором ограничении базисная переменная не выделена, в этом случае переходим к задаче с искусственным базисом (M-задаче). Для этого во второе ограничение введем искусственную переменную $\nu > 0$, которая в функцию цели войдет с коэффициентом $\pm M$. Получаем следующую задачу:

$$\max\ \overline{Z}(X) = -x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 - M\nu;$$

$$\min\ \overline{Z}(X) = -x_1 - x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + M\nu;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5, \\ 5x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 - x_2 \le 5; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0\ \ (i = \overline{1,5}),\ \ \nu \ge 0.$$

Решим задачу на максимум.

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ν	B	θ
		–1	–1	0	0	0	–M		← min
x_3	0	–1	1	1	0	0	0	5	–
ν	–M	5	1	0	–1	0	1	5	1
x_5	0	1	–1	0	0	1	0	5	5
Δ_j		–5M+1	–M+1	0	M	0	0	–5M	
x_3	0	0	$\frac{6}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0		6	
x_1	–1	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0		1	
x_5	0	0	$-\frac{6}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1		4	
Δ_j		0	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0		–1	

Все элементы в индексной строке неотрицательны. Значит, получаем оптимальное решение:

$$X^*_{max} = (1;0 \mid 6;0;4)\,,\ Z^*_{max} = -1\,.$$

Решим задачу на минимум.

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ν	B	θ
		–1	–1	0	0	0	M		← min
x_3	0	–1	1	1	0	0	0	5	–
ν	M	5	1	0	–1	0	1	5	1
x_5	0	1	–1	0	0	1	0	5	5
Δ_j		5M+1	M+1	0	–M	0	0	5M	
x_3	0	0	$\frac{6}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0		6	5
x_1	–1	1	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0		1	5
x_5	0	0	$-\frac{6}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	1		4	–
Δ_j		0	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0		–1	
x_2	–1	0	1	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0		5	
x_1	–1	1	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0		0	
x_5	0	0	0	1	0	1		10	
Δ_j		0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0		–5	

В индексной строке есть положительный элемент $\frac{1}{3}$, но в соответствующем столбце нет положительных элементов. Поэтому нельзя выбрать разрешающий элемент. Значит, данная задача не имеет оптимального решения в силу неограниченности целевой функции: $Z^*_{\min} \to -\infty$.

Ответ: $X^*_{\max} = (1;0)$, $Z^*_{\max} = -1$, $Z^*_{\min} \to -\infty$.

Задача 4

Определить план перевозок продукции из трех пунктов отправления в пять пунктов назначения так, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными. Запасы, потребности и стоимость перевозки 1 единицы продукции приведены в таблице.

Пункты отправления	Пункты назначения					Запас груза (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	5	7	11	8	180
A_2	8	12	1	6	5	240
A_3	1	20	15	10	11	50
Потребность в грузе (b_j)	150	100	180	30	75	

Начальный опорный план построить различными методами.

Решение

Проверим условие закрытости модели $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 180 + 240 + 50 = 470,\quad \sum_{j=1}^{5} b_j = 150 + 100 + 180 + 30 + 75 = 535.$$

Условие закрытости модели не выполняется, поэтому надо вводить фиктивный пункт отправления A_4 с запасом груза в $a_4 = 65$ единиц продукции. Расходы на перевозку единицы продукции из пункта A_4 принимаем равными М (М – достаточно большое положительное число). Составим распределительную таблицу закрытой модели задачи.

Составим начальный опорный план методом “минимального элемента”.

Первой заполняется клетка с минимальным значением тарифа. Наименьшие тарифы имеют клетки (3; 1) и (2; 3). В случае равенства выбираем любую. В клетку (3; 1) записываем максимально возможное значение поставки:

$$x_{31} = \min\{50;150\} = 50.$$

Так как запасы третьего поставщика полностью израсходованы, то третья строка в дальнейшем из рассмотрения исключается.

Второй заполняется клетка, имеющая наименьший тариф из оставшихся. Это клетка (2; 3). Значение поставки:

$$x_{23} = \min\{240; 180\} = 180.$$

Процесс распределения заканчивается, когда все запасы поставщиков исчерпаны, а опрос потребителей полностью удовлетворен.

b_j a_i	150	100	180	30	75
180	10 35 6	5 100 4	7	11 30 7	8 15 5
240	8	12	1 180 2	6	5 60 3
50	1 50 1	20	15	10	11
65	M 65 8	M	M	M	M

Таким образом, начальным опорным планом, построенным по методу "минимального элемента", является план:

$$\overline{X}_0^1 = \begin{pmatrix} 35 & 100 & 0 & 30 & 15 \\ 0 & 0 & 180 & 0 & 60 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 65 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{Z}(\overline{X}_0^1) = 35 \cdot 10 + 100 \cdot 5 + 30 \cdot 11 + 15 \cdot 8 + 180 \cdot 1 + 60 \cdot 5 + 50 \cdot 1 + 65 \cdot M = 1830 + 65M.$$

Составим начальный опорный план методом Фогеля.

По строкам и столбцам определяется разность между двумя наименьшими тарифами. В ряд с наибольшей разностью заполняется клетка с наименьшим тарифом. В третьей строке с наибольшей разностью $\Delta = 9$ клетка (3; 1) имеет наименьший тариф $C_{11} = 1$. В клетку (3; 1), как и в методе "минимального элемента", записывают максимально возможное значение поставки. Ряды с нулевыми остаткам груза в дальнейшем в расчет не принимаются. Последующее распределение груза производится по вышеуказанному правилу.

b_j / a_i	150	100	180	30	75	I	II	III	IV	V	VI
180	35 10 (7)	100 5 (2)	7	11	45 8 (6)	2	2	1	2	2	2
240	8	12	180 1 (3)	30 6 (4)	30 5 (5)	4	4	4	1	3	—
50	50 1 (1)	20	15	10	11	$\boxed{9}$	—	—	—	—	—
65	65 M (8)	M	M	M	M	0	0	0	0	0	0
I	7	7	6	4	3						
II	2	$\boxed{7}$	6	5	3						
III	2	—	$\boxed{6}$	5	3						
IV	2	—	—	$\boxed{5}$	3						
V	2	—	—	—	$\boxed{3}$						
VI	M – 10	—	—	—	$\boxed{M-8}$						

Таким образом, начальным опорным планом, построенным по методу Фогеля, является план:

$$\overline{X}_0^2 = \begin{pmatrix} 35 & 100 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 180 & 30 & 30 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 65 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве начального опорного плана выберем план $\overline{X}_0^2$. Он является невырожденным, так как содержит $m+n-1=8$ ненулевых базисных клеток.

a_i \ b_j	150	100	180	30	75	
180	35; 10	100; 5	7; +3	11; +2	45; 8	$u_1 = 0$
240	8; +1	12; +10	180; 1	30; 6	30; 5	$u_2 = -3$
50	50; 1	20; +24	15; +20	10; +10	11; +12	$u_3 = -9$
65	65; M	M; +5	M; +6	M; +1	M; +2	$u_4 = M - 10$
	$v_1 = 10$	$v_2 = 5$	$v_3 = 4$	$v_4 = 9$	$v_5 = 8$	

Для исследования составленного плана на оптимальность найдем потенциалы u_i и v_j, поставщиков и потребителей.

Для заполненных клеток таблицы должно выполняться условие:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Получаем следующую систему уравнений относительно u_i и v_j.

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 10, \\ u_1 + v_2 = 5, \\ u_1 + v_5 = 8, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 6, \\ u_2 + v_5 = 5, \\ u_3 + v_1 = 1, \\ u_4 + v_1 = M. \end{cases}$$

Эта система совместная и определенная. Полагая $u_1 = 0$, найдем остальные значения потенциалов.

$u_2 = -3$, $u_3 = -9$, $u_4 = M - 10$, $v_1 = 10$, $v_2 = 5$, $v_3 = 4$, $v_4 = 9$, $v_5 = 8$.

Вычисляем оценки свободных клеток по формуле $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$s_{13} = 7 - (0 + 4) > 0$; $s_{14} = 11 - (0 + 9) > 0$;

$s_{21} = 8 - (-3 + 10) > 0$; $s_{22} = 12 - (-3 + 5) > 0$;

$s_{32} = 20 - (-9 + 5) > 0;\ \ s_{33} = 15 - (-9 + 4) > 0;\ \ s_{34} = 10 - (-9 + 9) > 0;$

$s_{35} = 11 - (-9 + 8) > 0;$

$s_{42} = \mathrm{M} - (\mathrm{M} - 10 + 5) > 0;\ \ s_{43} = M - (M - 10 + 4) > 0;$

$s_{44} = \mathrm{M} - (\mathrm{M} - 10 + 9) > 0;$

$s_{45} = \mathrm{M} - (\mathrm{M} - 10 + 8) > 0.$

Оценки свободных клеток записаны в таблице в нижнем левом углу. Так как среди оценок нет отрицательных, то полученный опорный план является оптимальным. По этому плану минимальные суммарные затраты составляют:

$$Z_{\min} = 35 \cdot 10 + 100 \cdot 5 + 45 \cdot 8 + 180 \cdot 1 + 30 \cdot 6 + 30 \cdot 5 + 50 \cdot 1 = 1770.$$

При этом пункт назначения B_1 недополучит 65 единиц продукции.

Ответ: $\mathrm{X}^* = \begin{pmatrix} 35 & 100 & 0 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 180 & 30 & 30 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ Z_{\min} = 1770.$

Задача 5

Два предприятия выделяют денежные средства на строительство четырех объектов. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль первого предприятия в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы:

$$\begin{pmatrix} -5 & 15 & 0 & 20 \\ -2 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -3 & 90 \\ -4 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Для упрощения задачи принять, что убыток второго предприятия равен прибыли первого.

Требуется:

1) определить максиминную и минимаксную стратегии предприятий;

2) произвести возможные упрощения платежной матрицы;

3) решить матричную игру:

а) используя графический метод решения;

б) сведя матричную игру к паре двойственных задач линейного программирования.

Решение

1) Запишем платежную матрицу:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	-5	15	0	20	-5
A_2	-2	8	1	5	$\boxed{-2}$
A_3	0	10	-3	90	-3
A_4	-4	3	0	-4	-4
β_j	$\boxed{0}$	15	1	90	

Определим максиминную и минимаксную стратегии следующим образом:

$$\alpha = \max_i \{\alpha_i\} = \max_i \min_j \{\alpha_{ij}\}$$

$$\beta = \min_j \{\beta_j\} = \min_j \max_i \{\alpha_{ij}\}.$$

Значит, $\alpha = -2$, $\beta = 0$, при этом выигрыш $-2 < v < 0$.

Так как $\alpha \neq \beta$, то данная игра не разрешима в чистых стратегиях.

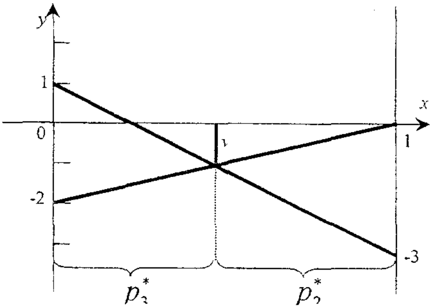
2) Упростим платежную матрицу. Так как $a_{i1} < a_{i2}$ и $a_{i1} < a_{i4}$, $i = \overline{1,4}$, то стратегия B_1 доминирует над стратегиями B_2 и B_4, значит, $q_2^* = q_4^* = 0$. Так как $a_{2j} > a_{1j}$ и $a_{2j} > a_{4j}$, $j = \overline{1,3}$, то стратегия A_2 доминирует над стратегиями A_1 и A_4, значит, $p_1^* = p_4^* = 0$. Удаляем из платежной матрицы 2-й и 4-й столбцы и 1-ю и 4-ю строки. В результате упрощения получаем матрицу размера 2×2:

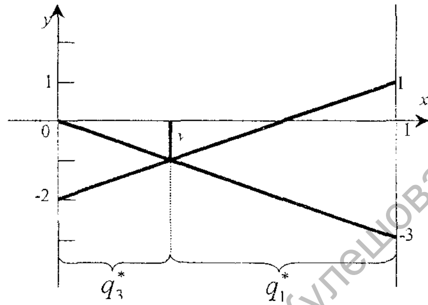
$A \backslash B$	B_1	B_3
A_2	-2	1
A_3	0	-3

3 а) Решим задачу графическим способом.

По критерию оптимальности можно записать:

$$\begin{cases} -2p_2^* + 0 \cdot p_3^* = v, \\ p_2^* - 3p_3^* = v, \\ p_2^* + p_3^* = 1. \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} -2q_1^* + q_3^* = v, \\ 0 \cdot q_1^* - 3q_3^* = v, \\ q_1^* + q_3^* = 1. \end{cases} \quad (2)$$





Если решить системы (1) и (2), то найдем:

$$p_2^* = p_3^* = \frac{1}{2},\ v = -1;$$

$$q_1^* = \frac{2}{3},\ q_3^* = \frac{1}{3},\ \ v = -1.$$

Следовательно, $p^* = \left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $q^* = \left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3};0\right)$, $v = -1$.

3 б) Решим данную задачу, сведя ее к паре двойственных ЗЛП.

Преобразуем платежную матрицу $[a_{ij}]_{2\times 2}$ в матрицу $[a'_{ij}]_{2\times 2}$ следующим образом: $a'_{ij} = a_{ij} + 3$, тогда $v' = v + 3$. Так как $-2 < v < 0$, то $v' > 0$.

Обозначим: $\frac{p_2^*}{v'} = x_1$; $\frac{p_3^*}{v'} = x_2$; $\frac{q_1^*}{v'} = y_1$; $\frac{q_3^*}{v'} = y_2$.

Так как цель первого предприятия – максимизировать свою прибыль v, а значит, и v', то обратная величина $\frac{1}{v'} = F$ будет минимизироваться.

Цель второго предприятия – минимизировать свои убытки v, а значит и v', то обратная величина $\frac{1}{v'} = F$ будет максимизироваться.

В результате получим пару двойственных ЗЛП:

$\min Z = x_1 + x_2;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 1, \\ 4x_1 \ge 1, \end{cases}$$

$x_1,\ \ x_2 \ge 0.$

$\max F = y_1 + y_2;$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \le 1, \\ 3y_1 \le 1, \end{cases}$$

$y_1,\ \ y_2 \ge 0.$

Решим одну из задач симплекс-методом.

$$\max F = y_1 + y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4;$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 + y_3 = 1, \\ 3y_1 + y_4 = 1; \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Составим симплексную таблицу.

БП	$C_Б$	y_1	y_2	y_3	y_4	B	θ
		1	1	0	0		
y_3	0	1	4	1	0	1	$\frac{1}{4}$
y_4	0	3	0	0	1	1	–
Δ_i		-1	-1	0	0	0	
y_2	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1
y_4	0	3	0	0	1	1	$\frac{1}{3}$
Δ_i		$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	
y_2	1	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	
y_1	1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
Δ_i		0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	

В последней симплексной таблице индексные оценки $\Delta_i \geq 0$, поэтому полученный план является оптимальным. Значит, $y_1^* = \frac{1}{3}$; $y_2^* = \frac{1}{6}$; $F^* = \frac{1}{2}$.

С учетом обозначений: $v' = \frac{1}{F^*} = 2, \; v = 2 - 3 = -1$.

Имеем $q_1^* = y_1 \cdot v' = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$; $q_3^* = y_2 \cdot v' = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}$.

Так как $q_2^* = q_4^* = 0$, то $\mathbf{q}^* = \left(\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3}; 0\right)$. Переходя к двойственной задаче, с учетом соответствия между переменными двойственных задач получаем:

$$x_1^* = \frac{1}{4},\ x_2^* = \frac{1}{4}.$$

С учетом обозначений: $p_2^* = x_1 \cdot v' = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$; $p_3^* = x_2 \cdot v' = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$.

Так как $p_1^* = p_4^* = 0$, то $\mathbf{p}^* = \left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right)$.

Ответ: $\mathrm{q}^* = \left(\frac{2}{3};\ 0;\ \frac{1}{3};\ 0\right)$, $\mathbf{p}^* = \left(0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right)$, $v = -1$.

Задача 6

Руководство универмага заказывает товар вида А. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от 11 до 14 единиц. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения покупательского спроса, то руководство может срочно заказать и завезти недостающее количество. Причем расходы по срочному заказу и завозу единицы товара составляют 2,5 денежных единиц. Если же спрос будет меньше наличного количества товара, то нереализованный товар хранится на складе в универмаге, причем расходы за хранение единицы товара составляют 8 денежных единиц.

Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу игры;

2) найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь:

а) критерием Байеса (считать вероятности, соответственно, равными 0,1; 0,3; 0,4; 0,2);

б) критерием Лапласа;

в) критериями Вальда;

г) критерием Сэвиджа;

д) критерием Гурвица (взяв значение параметра в критерии Гурвица равным 0,7).

Решение

1) В данной задаче в качестве игрока A (статистик) выступает руководство универмага, которое заинтересовано в получении оптимального выигрыша. В

качестве игрока B (объективная реальность) выступает покупательский спрос на товар. Таким образом, имеем статистическую игру.

Игрок B может иметь 4 состояния, т.е. спрос на товар может быть равен 11, 12, 13 и 14 единицам. Игрок A при выборе стратегии также может ориентироваться на 4 состояния покупательского спроса.

Таким образом получим платежную матрицу $[a_{ij}]_{4\times4}$, где a_{ij} – выигрыш, который может получить игрок A, если он воспользуется i-й стратегией, а спрос на товар окажется в j-м состоянии.

Вычислим элементы платежной матрицы.

Вычислим элемент a_{11}. В данном случае руководство универмага заказывает 11 единиц товара и покупательский спрос оказывается равный 11 единицам, т.е. руководству универмага не приходится срочно завозить товар или хранить нереализованный товар на складе. Таким образом, выигрыш игрока A в ситуации $(A_1; B_1)$ равен нулю, т.е. $a_{11} = 0$. Аналогичная ситуация возникает и в случае $(A_i; B_j)$, когда $i = j$ ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,4}$). То есть в платежной матрице по главной диагонали будут стоять нули.

Вычислим элемент a_{12}. В данном случае руководство универмага заказывает 11 единиц товара, однако спрос на товар оказывается равным 12 единицам, поэтому руководству необходимо срочно завозить еще 1 единицу товара, на что расходуется $1 \cdot 2{,}5 = 2{,}5$ денежных единиц, т.е. $a_{12} = -2{,}5$.

Вычислим элемент a_{21}. Руководство универмага заказывает 12 единиц товара, однако покупательский спрос оказывается равный 11 единицам. Поэтому 1 нереализованную единицу товара необходимо хранить на складе, на что расходуется $1 \cdot 8 = 8$ денежных единиц, т.е. $a_{21} = -8$.

Аналогично вычисляем остальные элементы:

$a_{13} = -2 \cdot 2{,}5 = -5$; $a_{14} = -3 \cdot 2{,}5 = -7{,}5$;

$a_{23} = -1 \cdot 2{,}5 = -2{,}5$; $a_{24} = -2 \cdot 2{,}5 = -5$;

$a_{31} = -2 \cdot 8 = -16$; $a_{32} = -1 \cdot 8 = -8$; $a_{34} = -1 \cdot 2{,}5 = -2{,}5$;

$a_{41} = -3 \cdot 8 = -24$; $a_{42} = -2 \cdot 8 = -16$; $a_{43} = -1 \cdot 8 = -8$.

					Вальда	Байеса	Лапласа	Гурвица
$A \backslash B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$	α_i	$\overline{a_i}$	$\sum_j a_{ij}$	$0{,}7 \min_j a_{ij}$
$A_1(11)$	0	– 2,5	– 5	– 7,5	– 7,5	– 4,25	– 15	– 5,25
$A_2(12)$	– 8	0	– 2,5	– 5	– 8	– 2,8	– 15,5	– 5,6
$A_3(13)$	– 16	–8	0	– 2,5	– 16	– 4,5	– 26,5	– 11,2
$A_4(14)$	– 24	– 16	– 8	0	– 24	– 10,4	– 48	– 16,8
q	0,1	0,3	0,4	0,2				

2) Определим оптимальные чистые стратегии, пользуясь различными критериями.

а) Согласно критерию Байеса оптимальной считается стратегия, соответствующая максимальному среднему выигрышу, т.е. соответствующая

$$\bar{a} = \max_i \{\bar{a}_i\} = \max_i \{\sum_j a_{ij} q_j\}.$$

Вычислим

$$\bar{a}_1 = 0 \cdot 0{,}1 - 2{,}5 \cdot 0{,}3 - 5 \cdot 0{,}4 - 7{,}5 \cdot 0{,}2 = -4{,}25;$$

$$\bar{a}_2 = -8 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3 - 2{,}5 \cdot 0{,}4 - 5 \cdot 0{,}2 = -2{,}8;$$

$$\bar{a}_3 = -16 \cdot 0{,}1 - 8 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 - 2{,}5 \cdot 0{,}2 = -4{,}5;$$

$$\bar{a}_4 = -24 \cdot 0{,}1 - 16 \cdot 0{,}3 - 8 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}2 = -10{,}4.$$

Значит, $\bar{a} = -2{,}8$. Следовательно по критерию Байеса в качестве оптимальной чистой стратегии следует взять стратегию A_2, то есть руководству универмага следует заказывать и завозить 12 единиц товара.

б) Согласно критерию Лапласа оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимум выигрыша при равновероятных состояниях покупательского спроса на товар (т. е. при $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \frac{1}{4}$) т.е., обеспечивающая $a = \frac{1}{n} \max_i \left\{ \sum_j a_{ij} \right\}$.

$$a_1 = \frac{1}{4}(0 - 2{,}5 - 5 - 7{,}5) = -\frac{15}{4} = -3{,}75;$$

$$a_2 = \frac{1}{4}(-8 + 0 - 2{,}5 - 5) = -3{,}875;$$

$$a_3 = \frac{1}{4}(-16 - 8 + 0 - 2{,}5) = -6{,}625;$$

$$a_4 = \frac{1}{4}(-24 - 16 - 8 + 0) = -12.$$

Значит, $a = -3{,}75$. Таким образом, по критерию Лапласа в качестве оптимальной чистой стратегии следует взять стратегию A_1, т.е. руководству универмага следует заказывать и завозить 11 единиц товара.

в) По критерию Вальда в качестве оптимальной чистой стратегии выбирается стратегия, которая гарантирует в наихудших условиях максимальный выигрыш, т.е. соответствующая $\alpha = \max_i \min_j \{a_{ij}\}$.

Так как $\alpha = -7{,}5$ (ранее найдено), то и по критерию Вальда в качестве оптимальной чистой стратегии следует взять стратегию A_1 и руководству универмага следует завозить 11 единиц товара.

г) Критерий Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной ту стратегию, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, т.е. обеспечивается $\min_i \max_j \{r_{ij}\}$.

Построим матрицу риска, элементы которой вычисляются по формуле:

$$r_{ij} = \max_i \{a_{ij}\} - a_{ij}.$$

A \ B	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$	$\max_j r_{ij}$
$A_1(11)$	0	2,5	5	7,5	7,5
$A_2(12)$	8	0	2,5	5	8
$A_3(13)$	16	8	0	2,5	16
$A_4(14)$	24	16	8	0	24

Таким образом, $\min_i \max_j \{r_{ij}\} = 7{,}5$. А значит, и по критерию Сэвиджа в качестве оптимальной выбираем стратегию A_1, т.е. руководству универмага следует завозить 11 единиц товара.

д) По критерию Гурвица в качестве оптимальной выбирается стратегия, соответствующая числу

$$\gamma = \max_i \{\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij}\},\ 0 \le \lambda \le 1.$$

В нашем случае $\max_j a_{ij} = 0$ для любого $j = \overline{1,4}$, значит, данная формула примет вид:

$$\gamma = \max_i \{\lambda \min_j a_{ij}\}\ (\lambda = 0{,}7).$$

Следовательно, $\gamma = -5{,}25$ (расчеты в таблице). А это значит, что и по критерию Гурвица в качестве оптимальной выбираем стратегию A_1. Поэтому руководству универмага следует заказывать и завозить 11 единиц товара.

Ответ: Руководству универмага следует заказывать и завозить 11 единиц товара.

Задача 7

Найти оптимальное целочисленное решение следующей задачи:

$Z(\mathbf{X}) = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ 2x_1 \le 3; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$

$x_j \in \mathrm{Z}, \quad j = 1,2.$

Решение

Решим данную задачу симплекс-методом с отброшенным условием целочисленности. Приведем задачу к каноническому виду:

$$Z(X) = x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_4 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1,4}.$$

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	B
		1	2	0	0	
x_2	2	–2	1	1	0	2
x_4	0	2	0	0	1	3
Δ_j		–5	0	2	0	4
x_2	2	0	1	1	1	5
x_1	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
Δ_j		0	0	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{23}{2}$

Получаем оптимальный план $X^*_{н.ц.} = \left(\frac{3}{2};\; 5\right)$, $Z^* = \frac{23}{2}$, однако $x_1^* = \frac{3}{2}$ не удовлетворяет условию целочисленности.

Следуя методу Гомори, по второй строке последней таблицы строим дополнительное линейное ограничение: $\{0\}x_3 + \left\{\frac{1}{2}\right\}x_4 \geq \left\{\frac{3}{2}\right\}$, где x_3 и x_4 – свободные переменные, $\frac{1}{2} \cdot x_4 \geq \frac{1}{2}$, или $x_4 \geq 1$.

Введем в это ограничение дополнительную переменную.
Припишем полученное ограничение к последней таблице.

БП	$C_Б$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**В**
		1	2	0	0	0	
x_2	2	0	1	1	1	0	5
x_1	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	0	0	1	–1	1
Δ_j		0	0	2	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{23}{2}$

Выполним симплексные преобразования с разрешающим элементом $a_{34} = 1$.

x_2	2	0	1	1	0	1	4
x_1	1	1	0	0	0	$+\frac{1}{2}$	1
x_4	0	0	0	0	1	–1	1
Δ_j		0	0	2	0	$\frac{5}{2}$	9

Получаем оптимальное целочисленное решение: $X^*_{ц} = (1;\ 4)$, $Z^*_{\max} = 9$.

Ответ: $X^*_{ц} = (1;\ 4)$, $Z^*_{\max} = 9$.

Задача 8

Коммивояжер должен посетить каждый из пяти городов только один раз и вернуться в исходный пункт. Матрица расстояний между городами следующая:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 15 & 40 & 5 & 18 \\ 22 & \infty & 10 & 35 & \infty \\ 7 & 10 & \infty & 9 & 20 \\ \infty & 15 & 6 & \infty & 1 \\ 18 & 4 & 5 & 40 & \infty \end{pmatrix}.$$

Требуется найти маршрут минимальной суммарной длины (гамильтонов контур минимальной длины).

Решение

Запишем математическую модель задачи:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,5},$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,5},$$

$$x_{ij} \in \{0;1\}.$$

Гамильтонов контур минимальной длины будем искать методом ветвей и границ.

Определим множество Ω как множество всех гамильтоновых контуров. Определим нижнюю границу множества гамильтоновых контуров. Для этого матрицу расстояний приведем по строкам (C'), а затем по столбцам (C''):

$$c'_{ij} = c_{ij} - \min_j a_{ij},$$

$$c''_{ij} = c'_{ij} - \min_j a'_{ij},$$

$$\gamma = \sum_i u_i + \sum_j v_j \text{, где } u_i = \min_j a_{ij}, \quad v_j = \min_i a'_{ij}.$$

c	1	2	3	4	5	u_i
1	∞	15	40	5	18	5
2	22	∞	10	35	∞	10
3	7	10	∞	9	20	7
4	∞	15	6	∞	1	1
5	18	4	5	40	∞	4

C'	1	2	3	4	5
1	∞	10	35	0	13
2	12	∞	0	25	∞
3	0	3	∞	2	13
4	∞	14	5	∞	0
5	14	0	1	36	∞
v_j	0	0	0	0	0

C''	1	2	3	4	5
1	∞	10	35	0^{12}	13
2	12	∞	0^{13}	25	∞
3	0^{14}	3	∞	2	13
4	∞	14	5	∞	0^{18}
5	14	0^{4}	1	36	∞

Значит, $\gamma = 5 + 10 + 7 + 1 + 4 = 27$.

В последней матрице определим степени нуля. Степень нуля – это сумма минимальных элементов строки и столбца за исключением данного нулевого элемента.

В качестве перспективной дуги выбираем дугу (4;5), так как она имеет наибольшую степень нуля. По этой дуге производим разбиение множества Ω на два подмножества:

Ω^1_{45} – это множество контуров, содержащее данную дугу (4;5), и

$\Omega^1_{\overline{45}}$ – это множество всех гамильтоновых контуров, не содержащее данную дугу.

Определим нижние границы данных подмножеств.

Ω^1_{45}:

C	1	2	3	4	u_i
1	∞	10	35	0	0
2	12	∞	0	25	0
3	0	3	∞	2	0
5	14	0	1	∞	0

C'	1	2	3	4
1	∞	10	35	0
2	12	∞	0	25
3	0	3	∞	2
5	14	0	1	∞
v_j	0	0	0	0

C''	1	2	3	4
1	∞	10	35	0^{12}
2	12	∞	0^{13}	25
3	0^{14}	3	∞	2
5	14	0^{4}	1	∞

$\gamma^1_{45} = \gamma + 0 = 27 + 0 = 27.$

$\Omega^1_{\overline{45}}$

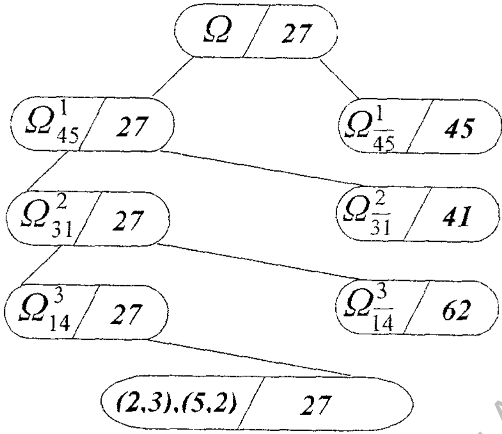
C	1	2	3	4	5	u_i
1	∞	10	35	0	13	0
2	12	∞	0	25	∞	0
3	0	3	∞	2	13	0
4	∞	14	5	∞	∞	5
5	14	0	1	36	∞	0

C'	1	2	3	4	5
1	∞	10	35	0	13
2	12	∞	0	25	∞
3	0	3	∞	2	13
4	∞	9	0	∞	∞
5	14	0	1	36	∞
v_j	0	0	0	0	13

C''	1	2	3	4	5
1	∞	10	35	0	0
2	12	∞	0	25	∞
3	0	3	∞	2	0
4	∞	9	0	∞	∞
5	14	0	1	36	∞

$\gamma^1_{\overline{45}} = \gamma + 5 + 13 = 27 + 18 = 45.$

Дальнейшему ветвлению подлежит множество с меньшей нижней границей, т.е. множество Ω^1_{45}.



Аналогично определяем перспективную дугу (3; 1). Разбиваем множество Ω^1_{45} на два подмножества Ω^2_{31} и $\Omega^2_{\overline{31}}$, и определяем их нижние границы.

Ω^2_{31}:

C	2	3	4	u_i
1	10	∞	0	0
2	∞	0	25	0
5	0	1	∞	0

C'	2	3	4
1	10	∞	0
2	∞	0	25
5	0	1	∞
v_j	0	0	0

C''	2	3	4
1	10	∞	0^{35}
2	∞	0^{26}	25
5	0^{11}	1	∞

$\gamma^2_{31} = \gamma^1_{45} + 0 = 27 + 0 = 27.$

$\Omega^2_{\overline{31}}$

C	1	2	3	4	u_i
1	∞	10	35	0	0
2	12	∞	0	25	0
3	∞	3	∞	2	2
5	14	0	1	∞	0

C'	1	2	3	4
1	∞	10	35	0
2	12	∞	0	25
3	∞	1	∞	0
5	14	0	1	∞
v_j	12	0	0	0

C''	1	2	3	4
1	∞	10	35	0
2	0	∞	0	25
3	∞	1	∞	0
5	2	0	1	∞

$\gamma^2_{\overline{31}} = \gamma^1_{45} + 2 + 12 = 27 + 14 = 41.$

Дальнейшему ветвлению подлежит множество Ω_{31}^2 как множество с наименьшей нижней границей. Дуга (1; 4) – перспективная дуга. Разбиваем множество Ω_{31}^2 на два подмножества: Ω_{14}^3 и $\Omega_{\overline{14}}^3$, и находим их нижние границы.

Ω_{14}^3:

C	2	3	u_i
2	∞	0	0
5	0	1	0

C'	2	3
2	∞	0
5	0	1
v_j	0	0

C''	2	3
2	∞	0
5	0	1

$$\gamma_{14}^3 = \gamma_{31}^2 + 0 = 27 + 0 = 27.$$

$\Omega_{\overline{14}}^3$:

C	2	3	4	u_i
1	10	∞	∞	10
2	∞	0	25	0
5	0	1	∞	0

C'	2	3	4
1	0	∞	∞
2	∞	0	25
5	0	1	∞
v_j	0	0	25

C''	2	3	4
1	0	∞	∞
2	∞	0	0
5	0	1	∞

$$\gamma_{\overline{14}}^3 = \gamma_{31}^2 + 10 + 25 = 27 + 35 = 62.$$

Выпишем дуги гамильтонова контура: $\Gamma = \langle (4;5), (3;1), (1;4), (2;3), (5;2) \rangle$.

Получаем следующий гамильтонов контур: $\Gamma = \langle 1 - 4 - 5 - 2 - 3 - 1 \rangle$.

Ему соответствует план: $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Для полученного гамильтонова контура выполняются соотношения:

$$Z(X) = \gamma_{14}^3 < \gamma_{\overline{45}}^1 \ (27 < 45),$$

$$\gamma_{14}^3 < \gamma_{\overline{31}}^2 \ (27 < 41),$$

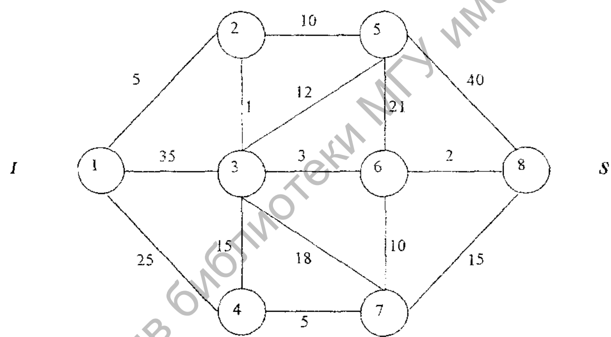
$$\gamma_{14}^3 < \gamma_{\overline{14}}^3 \ (27 < 62).$$

Значит, план X является оптимальным планом задачи, а соответствующий ему гамильтонов контур – контуром минимальной длины.

Ответ: $X^*_{\min} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Z^*_{\min} = Z(X^*_{\min}) = 27$.

Задача 9

На заданной сети сформировать поток максимальной мощности, направленный от истока *I* в сток *S*, при условии, что пропускные способности ребер сети в обоих направлениях одинаковы. Выписать ребра, образующие на сети разрез минимальной пропускной способности.



Решение

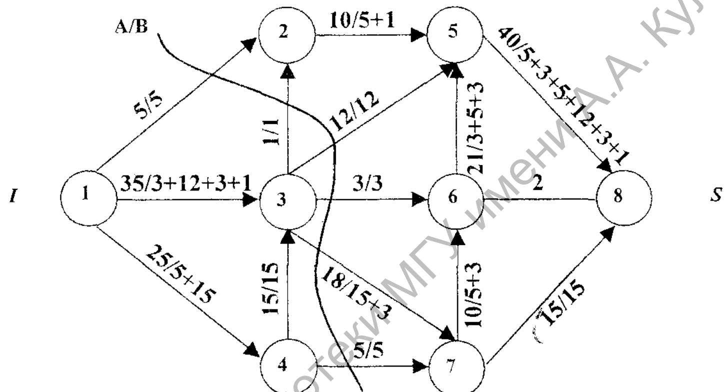
Решим задачу табличным методом.

Построим матрицу пропускной способности *R*:

R	1	2	3	4	5	6	7	8
1		5	35	25				
2	5		1		10			
3	35	1		15	12	3	18	
4	25		15				5	
5		10	12			21		40
6			3		21		10	2
7			18	5		10		15
8					40	2	15	

Сформируем на сети какой-либо начальный поток. Выпишем полные пути от истока I к истоку S и укажем, сколько вещества перемещается по данному пути. Учитываем, что поток по каждому ребру (i, j) не может превышать его пропускной способности.

L_1: 1-2-5-8 : 5 ед. L_2: 1-4-3-7-8 : 15 ед.
L_3: 1-3-6-5-8 : 3 ед. L_4: 1-3-5-8 : 12 ед.
L_5: 1-4-7-6-5-8 : 5 ед. L_6: 1-3-7-6-5-8 : 3 ед.
L_7: 1-3-2-5-8 : 1 ед.



Считаем, что если поток из вершины i в вершину j равен x_{ij}, то поток из вершины j в вершину i будет равен x_{ij}. Строим матрицу начального потока:

X_0	1	2	3	4	5	6	7	8
1		5	19	20				
2	−5		−1		6			
3	−19	1		−15	12	3	18	
4	−20		15				5	
5		−6	−12			−11		29
6			−3		11		−8	
7			−18	−5		8		15
8					29		−15	

Составим матрицу $R-X_0$:

$R-X_0$	1	2	3	4	5	6	7	8
1			16	5				
2	10		2		4			
3	54			30				
4	45							
5		16	24			32		11
6			6		10		18	2
7			36	10		2		
8					69	2	30	

Строим множество A – множество вершин, достижимых из истока I по ненасыщенным ребрам. Из истока по ненасыщенным ребрам можно попасть в вершину 3 и 4, так как $r_{13}-x_{13}=16$, $r_{14}-x_{14}=5$. Запишем это в виде истока вершин: $I//3,4$. Далее рассматриваем вершины 3 и 4. Для этих вершин составляем свой список вершин. При этом вершины, встречающиеся в прежних списках, повторно не записываются. Поэтому 3//. и 4//. Множество A состоит из трех вершин $A=\{1;3;4\}$. Сток $S \notin A$. В множество B войдут остальные вершины, не вошедшие в множество A. Множество $B=\{2;5;6;7;8\}$.

Получаем следующий разрез на сети:

$$A/B=\{(1,2);(2,3);(3,5);(3,6);(3,7);(4,7)\}.$$

Найдем величину потока, проходящего через разрез A/B:

$$X(A/B)=\sum_{(i,j)\in A/B} x_{ij}=5+1+12+3+18+5=44.$$

Пропускная способность разреза A/B:

$$R(A/B)=\sum_{(i,j)\in A/B} r_{ij}=5+1+12+3+18+5=44.$$

$X(A/B)=R(A/B)=44$, значит, по теореме Форда-Фалкерсона данный поток является потоком максимальной мощности. Разрез

$$A/B=\{(1,2);(2,3);(3,5);(3,6);(3,7);(4,7)\} -$$

разрез минимальной пропускной способности.

Ответ: $X^*_{\max} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 19 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ -19 & 1 & 0 & -15 & 12 & 3 & 18 & 0 \\ -20 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & 0 & -11 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 11 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -5 & 0 & 8 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -29 & 0 & -15 & 0 \end{bmatrix}$, $F^*_{\max} = 44.$

Задача 10

В следующей таблице представлен список комплекса операций по реконструкции цеха.

Операции	Непосредственно предшествующие операции	Продолжительность (дни)	Потребность в специалистах (чел)
A	–	1	10
B	–	12	5
C	–	9	2
D	*A*	6	9
E	*B, D*	–	–
F	*A*	6	3
M	*B, D*	3	8
N	*F, E*	21	6

Требуется:

1) построить сетевой график выполнения комплекса работ и пронумеровать события в соответствии с алгоритмом Фалкерсона;

2) вычислить непосредственно на сетевом графике сроки свершения событий, сроки начала и окончания работ, полные и свободные резервы времени работ (полученные результаты занести в таблицу); выделить на сетевом графике критический путь;

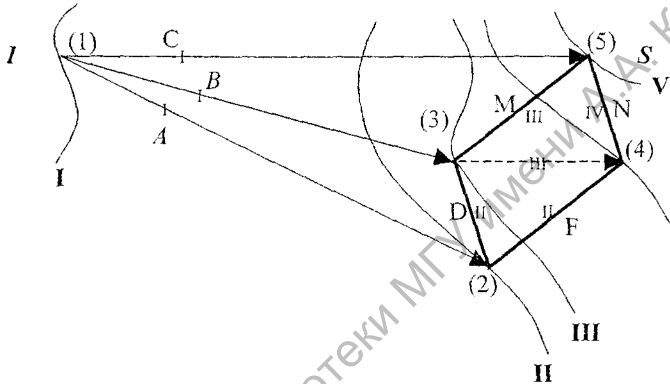
3) построить линейный график комплекса работ и определить по нему критический срок и критический путь;

4) построить шкалу занятости специалистов в ходе выполнения работ комплекса;

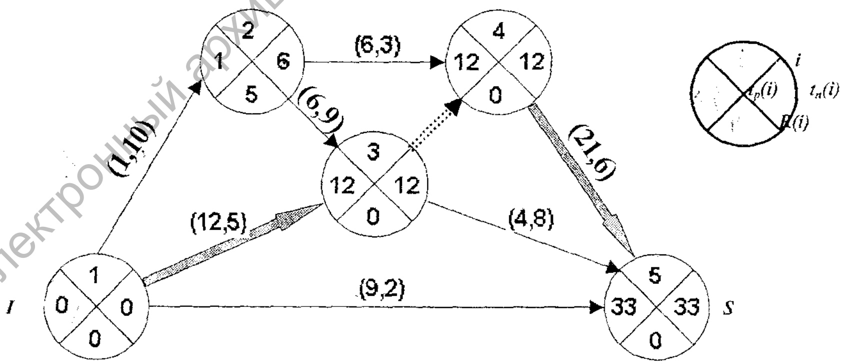
5) используя метод выравнивания потребностей в ресурсах (количество специалистов, занятых одновременно, не должно превышать значение R=20), определить время осуществления комплекса работ.

Решение:

1) Построим сетевой график выполнения работ и пронумеруем события в соответствии с алгоритмом Фалкерсона.



2) Вычислим непосредственно на сетевом графике ранние и поздние сроки свершения событий, а также резервы времени событий:



Критический путь: 1-3-4-5. Критические работы: $(1,3),(3,4),(4,5)$.

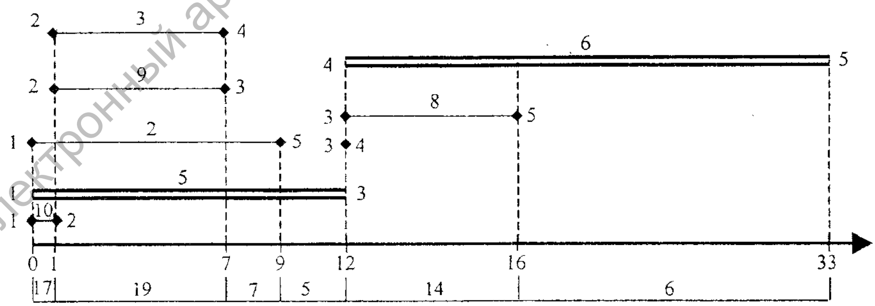
Для критических работ полные и свободные резервы времени работ равны 0. Для остальных работ временные параметры вычисляются по следующим формулам:

$$t_{р.н.}(i, j) = t_р(i);$$
$$t_{р.о.}(i, j) = t_р(i) + t(i, j);$$
$$t_{п.н.}(i, j) = t_п(j) - t(i, j);$$
$$t_{п.о.}(i, j) = t_п(j);$$
$$R_п(i, j) = t_п(j) - t_р(i) - t(i, j);$$
$$R_с(i, j) = t_р(j) - t_р(i) - t(i, j).$$

Вычислим временные параметры работ.

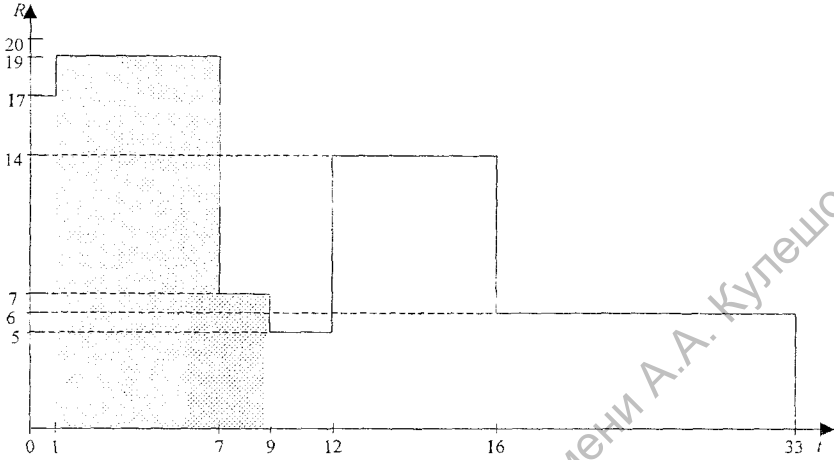
(i, j)	$(1,2)$	$(1,5)$	$(2,4)$	$(2,3)$	$(3,5)$
t	1	9	6	6	4
$t_{р.н.}$	0	0	1	1	12
$t_{р.о.}$	1	9	7	7	16
$t_{п.н.}$	5	24	6	6	29
$t_{п.о.}$	6	33	12	12	33
$R_п$	5	24	5	5	17
$R_с$	0	24	5	5	17

3) Построим линейный график комплекса работ.



Критический путь: 1-3-4-5. $t_{кр} = 33$ дня.

4) Построим шкалу занятости специалистов.



5) При выполнении комплекса операций количество специалистов не превосходит 20.

Ответ: $t_{кр} = 33$ дня, $L_{\min} = <1-3-4-5>$.

Задача 11

Методом множителей Лагранжа найти условные экстремумы функции:

$$Z(X) = 4x_1 + 5x_2,\ X \in \left\{(x_1, x_2) \in R^2 \middle| x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}.$$

Дать экономическую интерпретацию задачи, считая Z – как доход, а $k = 1$ – как затраты на ресурсы.

Решение

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = Z(x_1, x_2) + \lambda(\beta_i - \varphi_i(x_1, x_2)),\quad i = 1,2.$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + 5x_2 + \lambda(1 - x_1^2 - x_2^2).$$

Стационарные точки найдем из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4 - 2\lambda x_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 5 - 2\lambda x_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{\lambda}, \\ x_2 = \dfrac{5}{2\lambda}, \\ 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0. \end{cases}$$

$$1 - \frac{4}{\lambda^2} - \frac{25}{4\lambda^2} = 0;$$

$$4\lambda^2 - 16 - 25 = 0;$$

$$\lambda^2 = \frac{41}{4}, \lambda = \pm\frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Получаем следующие системы решений:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\sqrt{41}}{2} \\ x_1 = \dfrac{4}{\sqrt{41}} \\ x_2 = \dfrac{5}{\sqrt{41}} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \lambda_2 = -\dfrac{\sqrt{41}}{2} \\ x_1 = -\dfrac{4}{\sqrt{41}} \\ x_2 = -\dfrac{5}{\sqrt{41}} \end{cases}.$$

Для определения локального максимума и минимума определим знак d^2L:

$$d^2L = \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}dx_1^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}dx_2^2;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -2\lambda, \ \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -2\lambda;$$

$$d^2L = -2\lambda(dx_1^2 + dx_2^2), \ \left(dx_1^2 + dx_2^2 \neq 0\right).$$

Если $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$, то $d^2L < 0 \Rightarrow A\left(\dfrac{4}{\sqrt{41}}; \dfrac{5}{\sqrt{41}}\right)$ – точка условного максимума.

Если $\lambda_2 = -\dfrac{\sqrt{41}}{2}$, то $d^2L > 0 \Rightarrow B\left(-\dfrac{4}{\sqrt{41}}; -\dfrac{5}{\sqrt{41}}\right)$ – точка условного минимума.

При этом:

$$Z^*_{\max} = 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} + 5 \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{41}{\sqrt{41}} = \sqrt{41};$$

$$Z^*_{\min} = -\sqrt{41}.$$

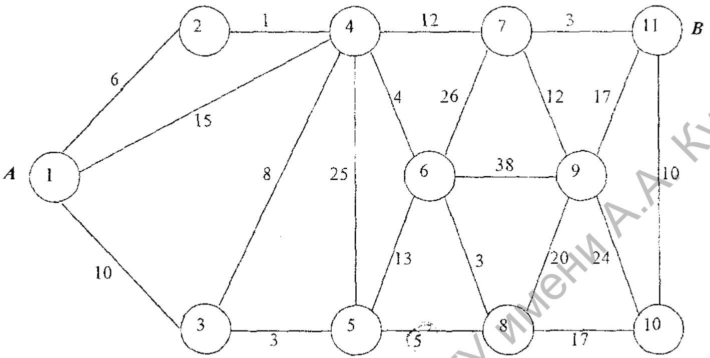
Экономическая интерпретация:

при изменении затрат на ресурсы на единицу доход изменится на величину $\lambda = \dfrac{\sqrt{41}}{2}$.

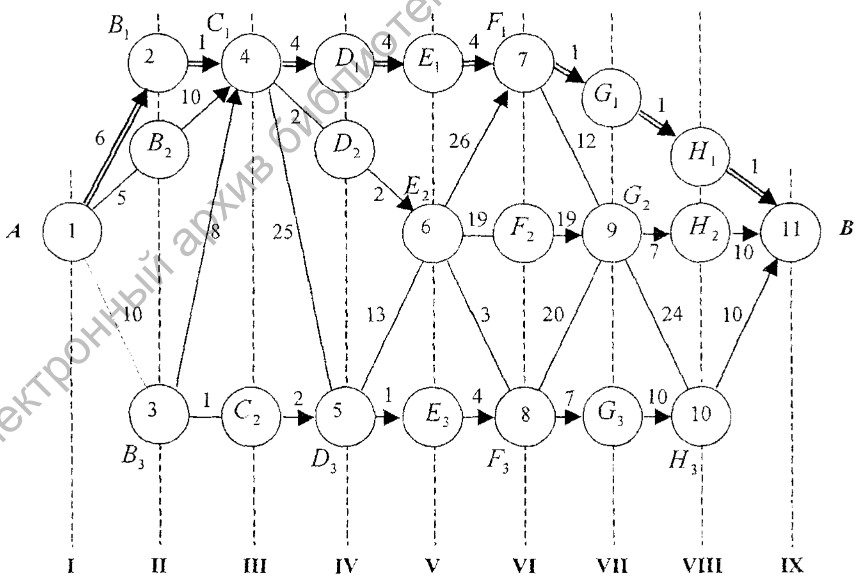
Ответ: $Z^*_{\max} = \sqrt{41}$, $Z^*_{\min} = -\sqrt{41}$.

Задача 12

Задана транспортная сеть, на которой указаны пункт отправления A и пункт назначения B. Между ними имеются промежуточные пункты, соединенные участками пути с указанием расстояния между ними. Методами динамического программирования найти маршрут минимальной длины из пункта отправления в пункт назначения.



Решение



Разобьем все пункты на группы.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	2	4	D_1	E_1	7	G_1	H_1	11
	B_2	C_2	D_2	6	F_2	9	H_2	
	3		5	E_3	8	G_3	10	

Будем оптимизировать каждый шаг, начиная с последнего.

Итак, на 8-м шаге в пункт 11 можно попасть из пунктов H_1, H_2 или пункта 10, причем из каждого пункта только одним способом. Так, из пункта H_1 можно двигаться только дорогой (H_1 – 11) и придется преодолеть 1 км, из пункта H_2 – дорогой (H_2 – 11) и преодолеть 10 км, из пункта 10 – дорогой (10 – 11) и преодолеть 10 км. Результат оптимизации 8-го шага – 3 стрелки (на ребрах (H_1; 11), (H_2; 11) и (10; 11)).

7-й шаг. Из пункта G_1 можно следовать только через пункт H_1 и преодолеть при этом 1+1=2 км. Значит, оптимальный маршрут для пункта G_1 – (G_1 – H_1 – 11) с расстоянием до пункта 11 в 2 км.

Из пункта 9 можно следовать либо через пункт H_2, либо через пункт 10. В первом случае расстояние до пункта 11 равно 7+10=17 км, во втором – 24 + 10 = 34 км. За оптимальный маршрут принимаем путь (9 – H_2 – 11) с расстоянием до пункта 11 в 17 км.

Из пункта G_3 можно следовать только через пункт 10 и преодолеть при этом 10+10=20 км. Значит, оптимальный маршрут для пункта G_1 – (G_1 – 10 – 11) с расстоянием до пункта 11 в 20 км.

6-й шаг. Для пункта 7 оптимальным будет маршрут, проходящий через пункт G_1 (а не через пункт 9), т.к. этому маршруту отвечает минимальная из сумм (1+2) и (12+17), т.е. этот маршрут имеет протяженность 3 км.

Из пункта F_2 можно следовать только через пункт 9 и преодолеть при этом расстояние в 19+17=36 км.

Для пункта 8 оптимальный маршрут имеет протяженность $\min\{20+17, 7+20\}=27$ км и проходит через пункт G_3.

5-й шаг. Для пункта E_1 оптимальный маршрут проходит через пункт 7 и имеет протяженность 4+3=7 км.

Для пункта 6 оптимальный маршрут имеет протяженность

$\min\{26+3, 19+36, 3+27\} = 29$ км и проходит через пункт 7.

Для пункта E_3 оптимальный маршрут проходит через пункт 8 и имеет протяженность 4+27=31 км.

4-й шаг. Для пункта D_1 оптимальный маршрут проходит через пункт E_1 и имеет протяженность 4+7=11 км.

Для пункта D_2 оптимальный маршрут проходит через пункт 6 и имеет протяженность 2+29=31 км.

Для пункта 5 оптимальный маршрут имеет протяженность

$\min\{13+29, 1+31\} = 32$ км и проходит через пункт E_3.

<u>3-й шаг</u>. Для пункта 4 оптимальный маршрут имеет протяженность

$\min\{4+11, 2+31, 25+32\} = 15$ км и проходит через пункт D_1.

Для пункта G_2 оптимальный маршрут проходит через пункт 5 и имеет протяженность 2+32=34 км.

<u>2-й шаг</u>. Для пункта 2 оптимальный маршрут проходит через пункт 4 и имеет протяженность 1+15=16 км.

Для пункта B_2 оптимальный маршрут проходит через пункт 4 и имеет протяженность 10+15=25 км.

Для пункта 3 оптимальный маршрут имеет протяженность

$\min\{8+15, 1+34\} = 23$ км и проходит через пункт 4.

<u>1-й шаг</u>. Наикратчайшим будет маршрут, проходящий через пункт 2, как маршрут, отвечающий минимальной из сумм: (6 + 16), (5 + 25), (10 + 23), равной 22 км. Значит, самый короткий маршрут из A в B – это:

$$1-2-4-D_1-E_1-7-G_1-H_1-11,$$

или

$$1-2-4-7-11.$$

Его длина 22 км.

Ответ: $Z^*_{\min} = 22$, $L^*_{\min} = <1-2-4-7-11>$.

Рекомендуемая литература

1. *Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И.* Высшая математика. Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1994.

2. *Кузнецов А.В.* Высшая математика. Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1995.

3. *Кузнецов А.В.* Сборник задач по высшей математике. Математическое программирование. – Мн.: Выш. шк., 1995.

4. *Сакович В.А.* Исследование операций. – Мн.: Выш. шк., 1986.

5. *Сакович В.А.* Оптимальные решения экономических задач. – Мн.: Выш. шк., 1985.

6. *Конюховский П.* Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Питер, 2000.

Учебное издание

Сакович Наталья Владимировна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Контрольные задания
и методические указания к ним

Редактор *В.Н. Борбат*
Технический редактор *А.Н. Гладун*
Компьютерная верстка *В.С. Малявко*
Корректор *Н.С. Осмоловская*

Подписано в печать 24.05.07. Формат 60x84/16.
Гарнитура Times New Roman.
Усл.-печ. л. 2,8. Уч.-изд. л. 2,9. Тираж 170 экз. Заказ № 213.

Учреждение образования "Могилевский государственный университет
им. А.А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1.
ЛИ № 02330/278 от 30.04.2004

Отпечатано на ризографе отдела оперативной полиграфии
МГУ им. А.А. Кулешова.
212022, Могилев, Космонавтов, 1.