Берник В.И., Сакович Н.В.

ТРАНСФИНИТНЫЙ ДИАМЕТР И РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В данной заметке мы будем рассматривать множество комплексных чисел

$$M_\varepsilon(F) = \{ z \in \mathbb{C} : |F(z)| < \varepsilon \}$$

Функции $F(z)$ будут многочленами комплексной переменной z. Мы дадим характеристики множества $M_\varepsilon(F)$ с точки зрения трансфинитного диаметра (емкости) и размерности Хаусдорфа. Эти понятия, особенно размерность Хаусдорфа, пока еще не очень часто используются в комплексном анализе и поэтому начнем с определений. Затем мы установим связь между двумя характеристиками и покажем, как из оценок емкости некоторых множеств можно получить оценки размерности Хаусдорфа.

Пусть E есть ограниченное бесконечное замкнутое множество точек на плоскости z. Положим

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \prod_{\substack{k,l=1 \\ k<l}}^{n} (z_k - z_l), \quad n \geq 2,$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n \in E$. $V(z_1, \ldots, z_n)$ равно, как известно, определителю Вандермонда для чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Пусть $V_n = V_n(E)$ есть максимум модуля $|V(z_1, \ldots, z_n)|$, когда $z_1, \ldots, z_n$ пробегает различные системы n точек, принадлежащих множеству E.

Положим $d_n = V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}$.

Величина d_n не возрастает с возрастанием n. Кроме того d_n, при всех n, очевидно, не превосходит диаметра множества E. Следовательно, d_n при $n \to \infty$ стремится к определенному конечному пределу. Этот предел называется трансфинитным диаметром множества E. Обозначим

$$cap\, E = \lim_{n \to \infty} V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

Следующие свойства вытекают из определения:

а) монотонность: если $E \in F$, то $cap\, E \le cap\, F$

б) однородность: если $z_1 = az + b$ отображает E в E_1, то $cap\, E_1 = |a|\, cap\, E$.

Произвольное множество S комплексных чисел покроем множеством кругов $J_1, J_2, \dots, J_k, \dots$, $S \subset \cup J_k$ с диаметром $diam\, J_i \le \delta$ с некоторым $\delta > 0$. Положим

$$l(S; p, \delta) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} (diam\, J_i)^p,$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества S. Поскольку с убыванием δ нижняя грань может разве что увеличиться, то существует конечный или бесконечный предел

$$l(S; p) = \lim_{\delta \to 0} l(S, p, \delta)$$

Можно доказать существование такого действительного числа β, что $\ell(S;\rho)=0$ для $\beta<\rho\le 2$ и $\ell(S,\rho)=\infty$ при $0<\rho<\beta$. Это число и называется размерностью Хаусдорфа множества S.

Лемма I. Если $P(z)=z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\ldots+a_0$, то

$$cap\{z:|P(z)|\le 1\}=1.$$

Лемма 2. Множество точек z, определяемых неравенством $|P(z)|\le\varepsilon$, где $P(z)=z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\ldots+a_0$, имеет трансфинитный диаметр равный $\varepsilon^{1/m}$

$$cap\{z:|P(z)|\le\varepsilon\}=\varepsilon^{1/m}.$$

Доказательство лемм I и 2 в [4] (глава УII, § I, теорема 2).

Лемма 3. Если

$$P_1(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0, \qquad (1)$$

то

$$cap\{z:|P_1(z)|\le\varepsilon\}=\left(\frac{\varepsilon}{|a_n|}\right)^{1/n} \qquad (2)$$

Доказательство следует из предыдущей леммы и однородности трансфинитного диаметра.

Лемма 4. Если множество E есть континуум, то

$$diam\, E\le 4\, cap\, E \qquad (3)$$

Доказательство см. в [4] (глава УII, § 2, теорема2).

Лемма 5. Для (2) выполняется неравенство

$$\max_{0 \le \ell \le n} |P_1(\ell)| > c(n) \max_{0 \le i \le n} |a_i| \qquad (4)$$

Доказательство см. в [I] (лемма 7).

Лемма 6. Множество M имеет ρ -меру Хаусдорфа, равную нулю, тогда и только тогда, когда возможно выбрать покрытие $\{S_i\}$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} S_i)^{\rho} < \infty,$$

и такое, что каждая точка множества M принадлежит бесконечному числу множеств S_i.

Доказательство см. в [3] (глава I, § I, предложение 4).

Теорема. Если $w > n(n+1)-1$ и C_w есть множество точек $\{z \in \mathbb{C} : |P(z)| < (H(P))^{-w}\}$ для бесконечного числа разложений $P(z) \in \mathbb{Z}(z)$, то

$$\dim C_w \le \frac{n(n+1)}{w+1} \qquad (5)$$

Заметим, что для некоторого полинома $P(z)$ множество $L(P) = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| < (H(P))^{-w}\}$ состоит из неболее чем n простых связных областей. Поэтому достаточно рассмотреть одну из них. От полиномов $P(z)$ перейдем к полиномам $P_3(z)$ с ограничением $|a_n(P_3)| > c(n) H$. Возможность такого перехода основана на лемме 5.

Доказательство теоремы.

Пусть в (4) $\max |P_1(\ell)|$ достигается при $\ell = \ell_0$. Перейдем от $P_1(z)$ к полиному

$$P_2(z) = P_1(z + \ell_0) \tag{6}$$

и далее к

$$P_3(z) = z^{\kappa} P_2(1/z) \tag{7}$$

Преобразование (6) и (7) не меняют размерности Хаусдорфа и приводят к неравенству

$$a_n(P_3) > c(n) H$$

Класс полиномов с фиксированным a_n обозначим через $A_n(P)$

Для $P > \frac{n(n+1)}{w+1}$ имеем

$$\sum_{a_n=1}^{\infty} \sum_{P \in A_n(P)} (diam\, C_1(P_3))^{p} < c(n) \sum_{a_n=1}^{\infty} H^{-(w+1)/np+n} < \infty,$$

откуда следует неравенство (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Спринджук В.Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Мн., 1967, 181 с.
2. Пяртли А.С. Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функциональный анализ и его приложени 1969. Т. 3. Вып. 4. С. 59--62.
3. Берник В.И., Мельничук Ю.В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. Мн., "Наука и техника", 1988, 143 с.
4. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1952, 540 с.
5. Rogers C. A. Hausdorf measures. Cambr.: Univ. Press, 1970, 179 p.