УДК 511.36

О.С. КУКСО, Н.В. САКОВИЧ

ПРИБЛИЖЕНИЕ НУЛЯ ЗНАЧЕНИЯМИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА

Пусть U – область в **C**, $f_1(z),\ldots,f_n(z)$ – некоторые фиксированные функции, аналитические на U, причем такие, что величина

$$W(z) = \det\begin{pmatrix} f_1'(z)\ldots f_n'(z) \\ \ldots \\ f_1^{(n)}(z)\ldots f_n^{(n)}(z) \end{pmatrix}$$

отлична от нуля для почти всех $z \in U$.

Пусть $\mathcal{F}_n$ – множество функций вида

$$F_n(z) = a_n f_n(z) + \ldots + a_1 f_1(z) + a_0, \tag{1}$$

где $a_j \in Z, j = \overline{0,n}$. Положим

$$H = H(F) = \max_{0 \le j \le n} |a_j|.$$

Без ограничения общности можно считать, что z изменяется на некотором круге $K \subset U$ с центром в некоторой точке z_0 и радиусом $r > 0$. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\omega)$ множество тех точек $z \in K$, для которых неравенство

$$|F(z)| < H(F)^{-\omega} \tag{2}$$

имеет бесконечное число решений в функциях $F_n(z)$.

Пусть M – произвольное множество комплексных чисел. Для некоторого $\rho \in [0;1]$ и любого $\delta > 0$ определим величину

$$\mu(\rho,\delta,M) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} (diam I_j)^{\rho},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества M кругами $I_1, I_2, \ldots$, для которых $diam I_j \le \delta$. Величина $\mu(\rho,\delta,M)$ не возрастает, когда δ убывает, оставаясь при этом положительной (возможно равной бесконечности). Поэтому существует предел

$$\mu(\rho,M) = \lim_{\delta \to 0} \mu(\rho,\delta,M),$$

называемый внешней ρ-мерой Хаусдорфа множества M.

Существует единственное число $\rho_0 \in [0;1]$ такое, что для всех ρ, $0 \le \rho < \rho_0$ верно $\mu(\rho,M) = \infty$, в то время как для всех ρ, $\rho_0 < \rho \le 1$ верно $\mu(\rho,M) = 0$. Это число и называется размерностью Хаусдорфа множества M и обозначается $\dim M$.

Ярник [1] и Безикович [2] доказали, что при $\omega > 1$ $\dim L_1(\omega) = \frac{2}{\omega+1}$, где $L_1(\omega)$ – множество действительных чисел α, для которых неравенство $|q_1\alpha + q_0| < q_1^{-\omega}$ имеет бесконечное число решений в целых q_0 и $q_1 > 0$.

Пусть аналогично (1) $F_n(x)$ будет обозначать ненулевую линейную форму с целыми коэффициентами вида $a_n f_n(x) + \ldots + a_1 f_1(x) + a_0$, где $a_j \in Z, 0 \le j \le n, H = H(F) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$.

Пусть $M_n(\omega)$ – множество $x \in [a; b]$, для которых неравенство

$$|F_n(x)| < H(F)^{-\omega}$$

имеет бесконечное число решений в функциях $F_n(x)$.

Доказано, что $M_n(\omega)$ имеет ненулевую меру Лебега при $\omega > n$. Р. Бейкер [3], основываясь на результатах В. Шмидта, установил, что $\dim M_2(\omega) = \frac{3}{\omega}$ при $\omega > 2$. Однако даже при $n = 3$ не удавалось найти точное значение размерности Хаусдорфа множества $M_n(\omega)$ ни при каком $\omega > n$. В тоже время точная нижняя оценка была получена для задачи Хаусдорфа линейно приближаемых точек на любом экстремальном многообразии [3]. Согласно этому результату $\dim M_2(\omega) \ge \frac{n+1}{\omega+1}$ при любом $\omega > n$. Также хорошо известна гипотеза о том, что $\frac{n+1}{\omega+1}$ является верхней оценкой для $\dim M_2(\omega)$.

В.В. Бересневич, В.И. Берник, М.М. Додсон доказали эту гипотезу для показателей аппроксимации, близких к n.

В настоящей работе мы доказываем несколько теорем о размерности Хаусдорфа в комплексном случае.

В основе доказательства лежат следующие три леммы.

Лемма 1. *Пусть U – область в **C**,*

$$F_n(z) = a_n f_n(z) + \ldots + a_1 f_1(z) + a_0,$$

*где функции $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ – аналитические на U, линейно независимые над **C**. Тогда в каждой точке $z \in U$ существует j, $1 \le j \le n$, такое что*

$$\left|F_n^{(j)}(z)\right| > cH$$

Доказательство леммы 1 имеется в [5].

Лемма 2. *Пусть в круге K задана аналитическая функция $\varphi(z)$ и при некоторых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $z_0 \in K$ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} &|\varphi^{(k)}(z)| > \delta, \\ &|\varphi(z)| < \varepsilon \end{aligned} \quad \text{для всех } z \in K. \tag{3}$$

Тогда если z_0 – решение системы неравенств (3), то

$$|z-z_0|<c(\varepsilon/\delta)^{\frac{1}{k}}.$$

Доказательство леммы 2 имеется в [5].

Лемма 3. *Пусть B есть объединение непересекающихся кругов K_j. Обозначим через K_0 один из кругов наименьшей площади. $\mu K_0=\beta^2$ (μ – мера Лебега). Тогда, если $\mu B<\alpha$, $\max\mu K_j\le 1$ и $0\le\rho\le 1$, то*

$$\sum|K_j|^\rho\le c\beta^{2\rho-2}\alpha.$$

Доказательство. Покроем каждый круг K_j кругами диаметра $\frac{2B}{\sqrt{\pi}}$. Число таких кругов, необходимых для покрытия, обозначим через η_j.

Ясно, что $\eta_j\le 2|K_j|/\beta^2$. Поскольку $0\le\rho\le 1$, то

$$|K_j|^\rho=|K_0\eta_j|^\rho\le|K_0|^\rho\eta_j\le\beta^{2\rho}\frac{2|K_j|}{\beta^2}=2\beta^{2\rho-2}|K_j|. \tag{4}$$

Суммируя (4) по всем j и учитывая, что $B=\bigcup_j K_j$ и $\sum_j|K_j|\le\alpha$, получаем требуемое.

Теорема 1. *Мера тех $z\in K$, для которых неравенство $|F(z)|<H(F)^{-\omega}$ имеет бесконечное число решений, равна нулю при $\omega>\frac{n^2+n-2}{2}$.*

Доказательство. Определим класс функций

$$\mathrm{P}(H)=\{F_n(z)\mid a_n=H,|a_j|\le H\}.$$

Пусть $F_n(z)\in\mathrm{P}(H)$ и $\sigma(F)$ – множество тех $z\in K$, для которых при выбранной функции $F_n(z)$ выполняется неравенство $|F_n(z)|<H^{-\omega}$. По лемме 2 $\sigma(F)$ находится внутри круга K. $|z-z_0|<<H^{-\frac{\omega+1}{k}}$, площадь $S(K)$ которого не превосходит $H^{-\frac{2(\omega+1)}{k}}$.

Просуммируем эту оценку по всем $F_n(z)\in\mathrm{P}(H)$.

$$\sum_{F_n\in\mathrm{P}(H)}S(K)<<H^{-\frac{2(\omega+1)}{k}+n}$$

Возьмем $k=n$. Ряд $\sum_{H=1}^{\infty}H^{-\frac{2(\omega+1)}{k}+n}$ сходится при $\omega>\frac{n^2+n-2}{2}$, что и доказывает

Теорему 2. *Для размерности Хаусдорфа множества $L_n(\omega)$ верно неравенство*

$$\dim \mathcal{L}_n(\omega) \le \min\left\{2,\ \frac{n^2+n}{\omega+1}\right\}.$$

Доказательство. Так как $\mathcal{L}_n(\omega)$ – множество тех точек $z \in K$, для которых неравенство $|F_n(z)| < H^{-\omega}$ имеет бесконечное число решений в функциях $F_n(z)$ и $|z - z_0| << H^{-\frac{\omega+1}{k}}$, то ρ-мера покрытия множества $\mathcal{L}_n(\omega)$ оценивается следующим образом:

$$\sum_{H=1}^{\infty} H^{-\frac{\omega+1}{k}\rho+n} < \infty.$$

Возьмем $k = n$. Тогда $\frac{\omega+1}{n}\rho - n > 1$, откуда $\rho > \frac{n^2+n}{\omega+1}$.

Оценка $\dim \mathcal{L}_n(\omega) \le 2$ следует из того, что множество $\mathcal{L}_n(\omega)$ принадлежит комплексной плоскости, размерность которой равна 2.

Теорема 2 при небольших значениях производных $F_n'(z)$ может быть улучшена.

Теорема 3.

Если
$$\begin{cases} |F_n(z)| < H^{-\omega} \\ H^{-(l+1)\varepsilon} < |F_n'(z)| \le H^{-l\varepsilon} \end{cases} \tag{5}$$

где $l = \frac{n^2}{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, *то*

$$\dim \mathcal{L}_n(\omega) \le \frac{n+1}{\omega-(l+1)\varepsilon} \tag{6}$$

Доказательство. Класс функций, для которых выполняется система (5) обозначим $P_l(H)$.

Пусть $F_n(z) \in P_l(H)$. По лемме 2

$$|z - z_0| << H^{-\omega+(l+1)\varepsilon}.$$

Тогда ρ-мера покрытия множества $P_l(H)$ оценивается следующим образом.

$\sum_{H=1}^{\infty} H^{(-\omega+(l+1))\rho+n} < \infty$, откуда

$\rho > \frac{n+1}{\omega-(l+1)\varepsilon}$. Значит,

$\dim \mathcal{L}_n(\omega) \le \frac{n+1}{\omega-(l+1)\varepsilon}$.

Оценка (6) при небольших l лучше оценки в теореме 2. При больших l воспользуемся методом, изложенным в [4]. Далее будем пользоваться несколько другим определением размерности Хаусдорфа, основанном не на диаметре круга, а на его площади. Как правило, при оценках размерности Хаусдорфа уже известны метрические характеристики изучаемых множеств.

Определим $\mathcal{L}_n(Q,\omega)=\left\{z\in K \mid \left|F_n(z)\right|\le Q^{-\omega}, \left|a_j\right|\le Q\right\}$.

Пусть при некотором $\lambda(\omega)>0$ справедливо неравенство

$$|\mathcal{L}_n(Q,\omega)|\le Q^{-\lambda(\omega)}.$$

Применим к этому множеству лемму 3.

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|K_j\right|^{\rho}\le c\cdot Q^{(-\omega+l\varepsilon)(2\rho-2)-\lambda(\omega)} \qquad (7)$$

Найдем значение ρ, при котором показатель степени в (7) отрицателен.

$$(\omega-l\varepsilon)(2-2\rho)-\lambda(\omega)<0$$
$$2\rho(\omega-l\varepsilon)>2(\omega-l\varepsilon)-\lambda(\omega)$$
$$\rho>\frac{2(\omega-l\varepsilon)-\lambda(\omega)}{2(\omega-l\varepsilon)}$$

Отсюда следует, что

$$\dim\mathcal{L}_n(Q,\omega)\le\frac{2(\omega-l\varepsilon)-\lambda(\omega)}{2(\omega-l\varepsilon)}.$$

Тем самым мы доказали **теорему 4**:

Размерность Хаусдорфа множества $\mathcal{L}_n(Q,\omega)\le\frac{2(\omega-l\varepsilon)-\lambda(\omega)}{2(\omega-l\varepsilon)}$.

Оценка (7) при $\lambda(\omega)>0$ незначительно отличается от $2\omega+n-1$ и дает значительно более сильные результаты, чем теорема 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Jarnik V.*** Prace Mat. – Fiz. 1929. – P. 91-106.
2. ***Besicovich A.S.*** J. Lond. Math. Soc. 1934. – Vol. 9. – P. 126-131.
3. ***Baker A., Schmidt W.M.*** Proc. Math. Soc. 1970. – Vol. 21. – P. 1-11.
4. ***Береснeвич В.В., Берник В.И., Додсон М.М.*** О размерности Хаусдорфа множеств хорошо приближаемых точек на невырожденных кривых // Докл. НАН Беларуси, 2002. – Т. 46. – № 6.
5. ***Спринджук В.Г.*** Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.

SUMMARY

Approximation characteristics of points lying on curves in C^n space have been considered in this paper with the help of the Hausdorff dimension. When $\omega>\frac{n^2+n-2}{2}$, upper bounds of the Hausdorff dimension for $\mathcal{L}_n(\omega), \mathcal{L}_n(Q,\omega)$ sets with prescribed degree of transcendence have been found.