УДК 511.36

Н.В. САКОВИЧ

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Проблемы, связанные с приближением нуля целочисленными линейными комбинациями аналитических функций, имеют давнюю историю [1]. Обозначим

$$F(z)=a_4\ f_4(z)+a_3\ f_3(z)+a_2\ f_2(z)+a_1\ f_1(z)+a_0,\ (a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\in Z^5/\ \{0\}),\quad (1)$$

$$H(F)=\max_{0\le j\le 4}\left|a_j\right|.$$

архив библиотеки МГУ имени А

Пусть задана кривая $\Gamma=\{ f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z),\ f_4(z)\colon z\in\mathbf{U}\}$, где $\mathbf{U}$ – некоторая область в $\mathbf{C}$, $f_1, f_2, f_3, f_4\colon \mathbf{U}\to\mathbf{C}$ – аналитические функции комплексной переменной и вронскиан производных функций $f_i(z)$, $i=\overline{1,4}$ для почти всех $z\in\mathbf{U}$ отличен от нуля.

А.С. Пяртли установил первый метрический результат о диофантовых приближениях для точек гладких кривых $\Gamma = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ из R^n, $n\geq 1$: если $H>H_0(x,\varepsilon)$, то $|F(x)|> H^{-n^2-n+1-\varepsilon}$ для почти всех x.

Без ограничения общности можно считать, что z изменяется на некотором замкнутом круге $\mathbf{K}\subset\mathbf{U}$ с центром в некоторой точке z_0 и радиусом $r>0$.

В [2] был доказан аналог теоремы Пяртли для аналитических функций комплексного переменного: для почти всех $z\in\mathbf{C}$ неравенство $|F(z)|< H^{-W}$ имеет при $w>4$,бесконечное число решений только на множестве нулевой меры Лебега. Нами получено усиление этого результата.

Теорема. *Неравенство* $|F(z)|< H^{-3.5-\varepsilon}$ *для почти всех* $z\in\mathbf{C}$ *имеет лишь конечное число решений в функциях* $F(z)$ *вида (1).*

Доказательство. Рассмотрим систему неравенств

$$|F(z)|< H^{-w},\ w>w_0, \tag{2}$$

где w_0 будет выбрано ниже. Ясно, что

$$Im\, z>\mu>0. \tag{3}$$

Не нарушая общности, полагаем $f_1(z)=z$. Пусть σ (F) – множество тех $z\in\mathbf{K}$, для которых при выбранной функции F(z) выполняется равенство $|F(z)|<Q^{-w}$, где

$$|a_j|\leq Q,\ 0\leq j\leq 4. \tag{4}$$

Так как вронскиан функций $f_1'(z),\ldots,f_4'(z)$ для почти всех $z\in\mathbf{U}$, а значит $z\in K(\sigma)$ отличен от нуля, то $|F'(z)|>Q^{\lambda}$. Найдем меру тех $z\in\sigma$(F), для которых неравенство (2) имеет хотя бы одно решение.

Определим круги

$$K_1=\left\{|\ z-\alpha\ |\ <\ \frac{C_1Q^{-w}}{|F'(\alpha)|}\right\} \text{ и}$$

$$K_2=\left\{|\ z-\alpha\ |\ <\ \frac{C_2Q^{-v}}{|F'(\alpha)|}\right\},$$

где α – точка минимума функции $F(z)$ во множестве точек, удовлетворяющих (2). Величина $v_0>0$ будет также выбрана ниже.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Из разложения

$$F(z)=F(\alpha)+F'(\alpha)(z-\alpha)+\frac{1}{2}F''(\varepsilon)(z-\alpha)^2 = F(\alpha)+(z-\alpha)(F'(\alpha)+\frac{1}{2}F''(\varepsilon)(z-\alpha))$$

и оценки $F'(\alpha)>C_3Q^{\frac{1-\nu}{2}}$ получаем

$$F(z)-F(\alpha)=C_4F'(\alpha)(z-\alpha) \qquad (5)$$

Зафиксируем $\overline{a}=(a_4,a_3,a_2)$, $|a_j|\le Q$, $j=0,1$. Множество функций $F(z)$ с фиксированным вектором $\overline{a}$ обозначим $F(Q)$. Пусть $S_1=K_2(F_1)\cap K_2(F_2)\ne\varnothing$ для функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ из $F(Q)$ и $z_0\in S_1$. Тогда в некоторой точке пересечения этих кругов будем иметь:

$$|F_1(z_0)-F_2(z_0)|<2Q^{-w}+4C_2Q^{-\nu},$$

$$|(a_1(F_1)-a_2(F_2))z-(a_0(F_1)-a_0(F_2))|<6\,C_2Q^{-\nu}, \qquad |b_1z-b_0|<6\,C_2Q^{-\nu},$$

$$\left|z-\frac{b_0}{b_1}\right|<\frac{6C_2Q^{-\nu}}{|b_1|}. \qquad (6)$$

Неравенство (6) противоречит (3) при достаточно большом Q. Поэтому $\sum_{F\in F(Q)}\mu K_2 << \mu K << 1$. Из $\frac{r(K_1)}{r(K_2)}<\frac{C_1}{C_2}Q^{-w-\nu}$ получаем

$$\sum_F \mu K_1=\sum_{(a_4,a_3,a_2)}\sum_{F\in F(Q)}\mu K << \sum_{(a_4,a_3,a_2)}Q^{-2w+2\nu} << Q^{-2w+2\nu+3}.$$

Выбираем $\nu=2$ и тогда при $\lambda=\frac{1-\varepsilon}{2}$ получаем следующую оценку для суммы мер.

$$\mu\sigma(\mathrm{F}) << Q^{-2w+2\varepsilon+3}.$$

Теперь осталось рассмотреть систему неравенств

$$\begin{cases}|F(z)|<Q^{-w},\\ Q^{-\lambda_1}<|F'(z)|<Q^{\frac{1-\varepsilon}{2}}.\end{cases}$$

Фиксируем a_4. Множество функций $F(z)$ с фиксированным a_4, $|a_j|\le Q$, $j=\overline{0,3}$ обозначим через $F_1(Q)$. Определим число различных функций $F(z)\in F_1(Q)$ таких, что $|F(z)|<C_5Q^4$. Определим круг

$$K_3=\left\{|z-\alpha|<\frac{C_3Q^{-\nu_0}}{|F'(\alpha)|}\right\},$$

где α – указанная ранее точка минимума функции $F(z)$ во множестве точек, удовлетворяющих (2).

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

Из разложения $F(z)=F(\alpha)+(z-\alpha)(F'(\alpha)+\frac{1}{2}F''(\xi)(z-\alpha))$ и оценки $F'(\alpha)>Q^{\frac{1-\nu_0}{2}}$ получаем равенство, аналогичное (5).

Пусть $S_2=K_2(F_1)\bigcap K_2(F_2)$ функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ из класса $F_1(Q)$. Если

$$\mu S_2<\frac{1}{2}\mu K_2(F_1), \text{ то } \sum_{F\in F_1(Q)}\mu K_2(F)<<1.$$

$$\sum_{F\in F_1(Q)}\mu K_1(F)<<\sum_{a_4}\sum_{F\in F_1(Q)}Q^{-2w+2\nu_1}, \qquad \mu K_2(F)<<Q^{-2w+2\nu+1}.$$

Если $\mu S_2\geq\frac{1}{2}\mu K_2(F_1)$, то для функции

$R(z)=F_1(z)-F_2(z)=b_3f_3+b_2f_2+b_1z+b_0$ на множестве S_2 имеем:

$$|R(z)|<<Q^{-\nu_0},$$

$$|R'(z)|<Q^{-\nu}.$$

Если $\nu_0=1+\delta_1$, то получаем доказательство теоремы на основании результата (3).

Если теперь $|F'(z)|<Q^{-\lambda_1}$, $\lambda_1>1$, то доказательство опять следует из основного результата (3).

Осталось заметить, что при $w>3{,}5$ можно взять $\nu_0>3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Спринджук В.Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел. – Мн.: Наука и техника, 1967. – 194 с.
2. ***Морозова И.М.*** Приближения нуля скалярным произведением целочисленных векторов и аналитической вектор-функции // Весцi АН Беларусi. Серыя фiз.-мат. навук. – 1997. – № 2. – С. 22-27.
3. ***Бересневич В.В. Васильев Д.В.*** *Аналог теоремы Хинчина для кривых в* C^3 // Весцi НАН Беларусi. Серыя фiз.-мат. навук. – 2001 – № 3. – С. 14-19.

SUMMARY

A full analogue of Khintchine's theorem for Diophantine approximation on analytic curves C^4 is proved.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова