УДК 511.36

О.С. КУКСО, Н.В. САКОВИЧ, Н.В. ШАМУКОВА

ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ВЕКТОРОВ ЗНАЧЕНИЯМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В НЕМОНОТОННОМ СЛУЧАЕ

Получено обобщение известной теоремы В.Г. Спринджука о приближении нуля значениями целочисленных многочленов. Доказано, что аналогичный результат справедлив для приближения любого действительного числа при немонотонной правой части.

Обозначим через $H = H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$ высоту целочисленного многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Классической задачей метрической теории трансцендентных чисел является задача о нахождении теоретико-множественных характеристик множества решений неравенства

$$|P(x)| < \Psi(H). \tag{1}$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

В (1) функция $\Psi(H)$ задана на $\mathbb{R}^+$, x принадлежит некоторому интервалу $I=[a,b]$. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x\in I$, для которых неравенство (1) имеет бесконечно много решений в $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$, а через μA меру Лебега измеримого множества $A\subset\mathbb{R}$. Оказывается [1], что $\mathcal{L}_n(\Psi)=I$ для $\Psi(x)=x^{-n}$, $\mu\mathcal{L}_n(\Psi)=0$ при $\Psi(x)=x^{-n-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. В работах В.И. Берника и В.В. Бересневича был получен полный аналог теоремы Хинчина о приближении действительных чисел рациональными. Было доказано, что для монотонно убывающей функции $\Psi(H)$

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi)=\begin{cases}0, \sum\limits_{H=1}^{\infty}\Psi(H)H^{n-1}<\infty,\\ \mu I, \sum\limits_{H=1}^{\infty}\Psi(H)H^{n-1}=\infty.\end{cases}$$

В работе [2] решена неоднородная задача: доказано, что при $\forall d\in\mathbb{R}$ и $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)H^{n-1}<\infty$ неравенство

$$|P(x)+d|<\Psi(H) \tag{2}$$

имеет бесконечное число решений только на множестве нулевой меры. Далее $\bar{d}=(d_1,\ldots,d_k)\in\mathbb{R}^k$. Вопрос о разрешимости неравенства (1) для немонотонной функции $\Psi(H)$ долгое время оставался открытым. В 2005 г. В.В. Бересневич доказал аналог теоремы Хинчина в случае сходимости и для немонотонной функции [3]. В данной работе мы обобщаем его результат на немонотонные функции в многомерном случае.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{L}_n(\Psi_1,\bar{d})$ множество $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_k)\in[a,b]^k$, для которых система неравенств*

$$\begin{cases}|P(x_1)+d_1|<\Psi_1(H),\\ \ldots\\ |P(x_k)+d_k|<\Psi_k(H)\end{cases}$$

имеет бесконечное число решений при некоторой (не обязательно монотонной функции $\Psi_1(H)$). Тогда, если ряд $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi^k(H)H^{n-k}$ сходится, то для $\forall\bar{d}\in\mathbb{R}^k$

$$\mu\mathcal{L}_n(\Psi_1,\bar{d})=0.$$

Приведем схему доказательства теоремы при $k=1$. От произвольных полиномов $P(x)+d$ можно перейти к полиномам $T(x)=(b_n+d)x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x^1+a_0$, для которых выполнено неравенство $|b_n+d|>c_1H(T)$. Это приводит к ограниченности корней $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ полиномов $T(x)$. Кроме этого, полиномы $T(x)$ можно поделить на конечное число классов, внутри которых полиномы имеют близкие по ве-

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

личине производные, расстояния между корнями и т.д. Обоснование таких переходов можно найти в [1]. Из неравенства (2) следует, что для корня α_1, ближайшего к x

$$|x-\alpha_1|<c_2|P(x)||T'(\alpha_1)|^{-1}<c_2\Psi(H)|T'(\alpha_1)|^{-1}, \qquad (3)$$

Определим число $p_1=p_1(T)$ как решение неравенства $H^{1-p_1-\varepsilon}<|T'(\alpha_1)|<H^{1-p_1}$ при достаточно малом $\varepsilon=M^{-1}$, где $M>M_0(n)\in\mathbb{Z}$, p_1 – рациональное число со знаменателем M. Множество решений неравенства (3) обозначим через $\sigma(T)$. Наряду с интервалом $\sigma(T)$ будем рассматривать и интервалы $\sigma_i(T)$, $i=1,2,3$, как множество решений неравенств

$$|x-\alpha_1|<c_{i+2}H^{-u_i}|T(\alpha_1)|^{-1}, \qquad (4)$$

где $u_i\geq 0$ будут выбираться в зависимости от величины p_1.

Если $0\leq p_1<0,5-\varepsilon$, то положим $u_1=0$. Разложим многочлены $T(x)$ в ряд Тейлора на $\sigma_1(T)$ и оценим их модули сверху. Получим $|T(x)|<2c_6$. Если у многочленов $T(x)$ зафиксировать коэффициенты $(b_n,b_{n-1},\ldots,b_1)=\bar{b}$, то при $c_6=\frac{1}{4}$ интервалы $\sigma_1(T)$, построенные для $T(x)$ с одним и тем же вектором $\bar{b}$, не пересекаются. Это позволяет получить для суммы мер $\mu\sigma(T)$ многочленов $T(x)$ с условием $H(T)\leq K$ оценку $s_K=c_6\Psi(K)K^{n-1}$. Ряд с таким общим членом s_K сходится по условию. По лемме Бореля – Кантелли, получаем доказательство теоремы.

Если $0,5-\varepsilon\leq p_1<1-\varepsilon$, то положим $u_2=1$. Опять оценим $T(x)$ на $\sigma_2(T)$ сверху после разложения $T(x)$ в ряд Тейлора. Получим $|T(x)|<2c_7K^{-1}$. Зафиксируем вектор $\bar{b}_1=(b_n,b_{n-1},\ldots,b_2)$ и если $\sigma_2(T_1)\cap\sigma_2(T_2)\neq\varnothing$, то на пересечении интервалов для полинома первой степени получим $R_1(x)=T_2(x)-T_1(x)=m_1x+m_0$ выполнение оценки $|m_1x+m_0|<c_8K^{-1}$, $|m_1|<K^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. По теореме Хинчина такая оценка может выполняться бесконечно часто только на множестве нулевой меры. В том случае, если пересечение $\sigma_2(T_1)\cap\sigma_2(T_2)=\varnothing$, вновь непосредственно подсчитаем сумму мер $\mu\sigma(T)$ многочленов $T(x)$. Получаем оценку $c_9\Psi(K)K^{n-1}$. Применив лемму Бореля – Кантелли, получаем доказательство теоремы.

Если $1-\varepsilon\leq p_1<1,5-\varepsilon$, то положим $u_3=2$. Зафиксируем вектор $\bar{b}_2=(b_n,b_{n-1},\ldots,b_3)$. В случае если $\sigma_3(T_1)\cap\sigma_3(T_2)\neq\varnothing$, то на пересечении для многочлена $R_2(x)$ второй степени с целыми коэффициентами получим выполнение неравенства $|R_2(x)|=|T_2(x)-T_1(x)|<2c_5K^{-2}$. Для нахождения оценки $|x-\alpha(R_2)|$ применим дискриминант $D(R_2)$ [1]. Для производной $R_2'(x)$ будем иметь оценку $|R_2'(x)|<c_{10}K^{\varepsilon}$. $|m_1|<K^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. По теореме Хинчина такая оценка может выполняться бесконечно часто только на множестве нулевой меры. Если $\sigma_3(T_1)\cap\sigma_3(T_2)=\varnothing$, то опять под-

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова

считаем сумму мер $\mu\sigma T$ многочленов $T(x)$. Получаем оценку $c_{11}\Psi(K)K^{n-1}$. Применив лемму Бореля – Кантелли, получаем доказательство теоремы.

Если $p_1 \geq 1,5-\varepsilon$, то из сходимости ряда $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)H^{n-1}$ следует, что $\Psi(H)=o(H^{-n+1})<c_{12}H^{-n+1}$. Применим теорему 1.3 из [4] к системе неравенств

$$\begin{cases} |P(x)|<c_{12}H^{-n+1}, \\ |P'(x)|<c_{13}H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}. \end{cases}$$

Данная система имеет бесконечное число решений на множестве меры нуль.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Спринджук, В.Г.*** Проблема Малера в метрической теории чисел / В.Г. Спринджук. – М. : Наука и Техника, 1967.
2. ***Берник, В.И.*** Приближение действительных чисел значениями целочисленных полиномов / В.И. Берник, Х. Диккинсон, М. Додсон // Доклады НАН Беларуси. – 1998. – 42/4. – С. 51–54.
3. ***Beresnevich, V.V.*** On a theorem of V. Bernik in the metric theory of Diophantine approximation / V.V. Beresnevich // Acta Arith. – 2005. – 117/1. – P. 71–80.
4. ***Kleinbock, D.Y.*** Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds / D.Y. Kleinbock, G.A. Margulis // Ann. Math. – 1998. – 148. – P. 339–360.

Поступила в редакцию 06.08.2011 г.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова