УДК 517+530.1

***С.В.ЖЕСТКОВ***

# О ПОСТРОЕНИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В [1–7] развит математический метод построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных. В настоящей работе на его основе строятся волновые решения многомерных уравнений современной математической физики в виде плоских волн. Эти решения представляют определенный физический интерес, т.к.волны, описываемые ими, могут распространяться между параллельными конечными границами [8], если на них выполняется условие непротекания.

## 1. Многомерное обобщенное уравнение Шредингера

Рассмотрим многомерное обобщенное уравнение Шредингера вида

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j,k=1}^{\ell} p_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + 2\chi|u|^2 u = 0, \qquad i = \sqrt{-1} \tag{1}$$

где $p_{jk}$, $\chi > 0$ – произвольные действительные числа. Обобщая солитонную форму решения одномерной модели, будем искать решение в виде:

$$u = ce_1(k_0 + Ae_2)^{-1} \tag{2}$$

$$e_1 \equiv \exp\left\{\sum_{k=1}^{\ell}(\alpha_k x_k - 2\alpha_k\beta_k t) + h + i\left[\sum_{k=1}^{\ell}\left(\beta_k x_k + \alpha_k^2 t - \beta_k^2 t\right) + \theta\right]\right\},$$

$$e_2 \equiv \exp\left\{\sum_{k=1}^{\ell}(2\alpha_k x_k - 4\alpha_k\beta_k t) + 2h\right\},$$

где $c, k_0, A, \alpha_k, \beta_k, h, \theta$ – произвольные действительные числа, причем $c > 0$, $k_o > 0$, $A > 0$. Подставляя (2) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях экспонент, получим следующие дисперсионные соотношения:

$$A = 1, \qquad 4k_0 P_{11} = \chi c^2, \tag{3}$$

$$P_{12} + P_{21} = 2I_{11}, \quad P_{11} = I_{20}, \quad P_{22} = I_{02}, \tag{4}$$

где

$$I_{11} = \sum_{k=1}^{\ell}\alpha_k\beta_k, \qquad I_{20} = \sum_{k=1}^{\ell}\alpha_k^2, \qquad I_{02} = \sum_{k=1}^{\ell}\beta_k^2,$$

$$P_{11} = \sum_{j,k=1}^{\ell}p_{jk}\alpha_j\alpha_k, P_{22} = \sum_{j,k=1}^{\ell}p_{jk}\beta_j\beta_k, P_{12} = \sum_{j,k=1}^{\ell}p_{jk}\alpha_j\beta_k, P_{21} = \sum_{j,k=1}^{\ell}p_{jk}\beta_j\alpha_k.$$

Отметим, что при $p_{jk} = \delta_{jk}$, где $\delta_{jk}$ – символ Кронекера, соотношения (4) превращаются в тождества, а уравнение (1) принимает классический вид:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\ell}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + 2\chi|u|^2 u = 0$$

В теории солитонов [9] известны так называемые рациональные решения, представляющие интерес с точки зрения приложений. Установим следующий факт. Уравнение Шредингера вида:

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j,k=1}^{\ell}p_{jk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} - 2\chi|u|^2 u = 0, \quad \chi > 0, \tag{5}$$

допускает решение рационального типа, а уравнение (1) таких решений не допускает. С этой целью в решении (2) положим:

$$k_0 = 1, \qquad \alpha_k = \alpha A_k, \quad k = \overline{1,\ell},$$

где $A_k, \alpha$ – произвольные действительные числа. Тогда его можно преобразовать к виду (ср. с [10]):

$$u = \frac{\frac{1}{2} c \exp i \left[ \sum_{k=1}^{\ell} \left( \beta_k x_k + \alpha^2 A_k^2 t - \beta_k^2 t \right) + \theta \right]}{\operatorname{ch} \left[ \sum_{k=1}^{\ell} \left( \alpha A_k x_k - 2\alpha A_k \beta_k t \right) + h \right]} \qquad (6)$$

причем справедливо следующее дисперсионное соотношение:

$$4 P_{11} = \chi c^2,$$

вытекающее из (3). Следовательно, имеем:

$$c = 2 \left( \frac{P_{11}}{\chi} \right)^{1/2} = 2\alpha \left( \frac{1}{\chi} \sum_{j,k=1}^{\ell} p_{jk} A_j A_k \right)^{1/2} \equiv 2\alpha B, \qquad (7)$$

$$\left( B \equiv \frac{1}{\chi} \sum_{j,k=1}^{\ell} p_{jk} A_j A_k \right)^{1/2}$$

Подставляя (7) в (6), получим:

$$u = \frac{\alpha B \exp i \left[ \sum_{k=1}^{\ell} \left( \beta_k x_k + \alpha^2 A_k^2 t - \beta_k^2 t \right) + \theta \right]}{\operatorname{ch} \left[ \sum_{k=1}^{\ell} \left( \alpha A_k x_k - 2\alpha A_k \beta_k t \right) + h \right]}. \qquad (8)$$

Воспользуемся теперь свободой выбора параметра $h$ и возможностью выхода на комплексную плоскость, т.е. положим в (8) $h = \frac{\pi}{2} i$. Тогда получим:

$$u = \frac{\alpha B \exp i \left[ \sum_{k=1}^{\ell} \left( \beta_k x_k + \alpha^2 A_k^2 t - \beta_k^2 t \right) + \theta \right]}{i \operatorname{sh} \left[ \sum_{k=1}^{\ell} \left( \alpha A_k x_k - 2\alpha A_k \beta_k t \right) \right]}. \qquad (9)$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ в (9), найдем:

$$u = \frac{B \exp i\left[\sum_{k=1}^{\ell}\left(\beta_k x_k - \beta_k^2 t\right) + \theta\right]}{i\sum_{k=1}^{\ell}\left(A_k x_k - 2A_k\beta_k t\right)} \tag{10}$$

Нетрудно проверить, что выражение (10) не удовлетворяет уравнению (1), а удовлетворяет уравнению (5), причем, дисперсионные соотношения принимают вид:

$$\sum_{k=1}^{\ell}\beta_k^2 = \sum_{j,k=1}^{\ell} p_{jk}\beta_j\beta_k,\ 2\sum_{k=1}^{\ell} A_k\beta_k = \sum_{j,k=1}^{\ell} p_{jk}\left(A_j\beta_k + \beta_j A_k\right),\ \sum_{j,k=1}^{\ell} p_{jk}A_j A_k = \chi B^2.$$

Таким образом, уравнение Шредингера (5) обладает решением рационального типа (10). Такой же результат можно получить исходя из солитонного решения, приведенного в [10] для одномерного уравнения Шредингера.

**2. Многомерное обобщенное уравнение Кортевега-де Фриза (КДФ)**

Рассмотрим многомерное обобщенное уравнение КДФ (ср. с [9]):

$$p_0 \frac{\partial u}{\partial t} + u^{\nu}\sum_{i=1}^{\ell} q_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j,k,s=1}^{\ell} r_{jks}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_k \partial x_s} = 0, \tag{11}$$

где $p_0, \nu, q_i, r_{jks}$ – произвольные действительные числа. Обобщая солитонную форму решения одномерной модели, будем искать аналог односолитонного решения в виде

$$u = A\left\{\mathrm{ch}\left(\alpha_0 t + \sum_{k=1}^{\ell}\alpha_k x_k + \varphi\right)\right\}^{-\frac{2}{\nu}}, \tag{12}$$

где $A, \alpha_0, \alpha_k, \varphi$ – произвольные действительные числа. Подставляя (12) в (11), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\alpha_0 p_0 = -\frac{4}{\nu^2} I_{111},\quad A^{\nu} I_1 = \frac{2}{\nu^2} I_{111}\left(\nu^2 + 3\nu + 2\right), \tag{13}$$

где

$$I_1 = \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i q_i,\qquad I_{111} = \sum_{j,k,s=1}^{\ell} r_{jks}\alpha_j\alpha_k\alpha_s.$$

Для построения рационального решения уравнения (11) положим $\alpha_k = \alpha A_k$, $k = \overline{1,\ell}$, где $A_k, \alpha$ – произвольные действительные числа. Далее, воспользуемся свободой выбора параметра $\varphi$ и возможностью выхода на комплексную плоскость, т.е. положим в (12) $\varphi = \frac{\pi}{2} i$. Тогда получим:

$$u = A\left\{ i\,\mathrm{sh}\left( \alpha_0 t + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha A_k x_k \right)\right\}^{-\frac{2}{\nu}}. \qquad (14)$$

Из дисперсионных соотношений (13) имеем:

$$A = \left[ \frac{2}{\nu^2}\left(\nu^2 + 3\nu + 2\right)\frac{J_{111}}{J_1} \right]^{\frac{1}{\nu}} \alpha^{\frac{2}{\nu}} \equiv B\alpha^{\frac{2}{\nu}},$$

$$\alpha_0 = -\frac{4}{p_0 \nu^2} I_{111} = -\frac{4\alpha^3}{p_0 \nu^2} J_{111}, \qquad (15)$$

где

$$J_1 = \sum_{i=1}^{\ell} A_i q_i, \quad J_{111} = \sum_{j,k,s=1}^{\ell} r_{jks} A_j A_k A_s, \quad B = \left[ \frac{2}{\nu^2}\left(\nu^2 + 3\nu + 2\right)\frac{J_{111}}{J_1} \right]^{\frac{1}{\nu}}.$$

Подставляя (15) в (14), получим:

$$u = B\alpha^{\frac{2}{\nu}}\left\{ i\,\mathrm{sh}\left( \alpha_0 t + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha A_k x_k \right)\right\}^{-\frac{2}{\nu}}. \qquad (16)$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ в (16), найдем

$$u = B\left\{ i \sum_{k=1}^{\ell} A_k x_k \right\}^{-\frac{2}{\nu}}. \qquad (17)$$

Выражение (17) и является искомым рациональным решением уравнения (11), что согласуется с одномерным случаем [9]. Дисперсионное соотношение имеет вид:

$$B^{\nu} J_1 = \left( \frac{2}{\nu} + 1 \right)\left( \frac{2}{\nu} + 2 \right) J_{111}.$$

Отметим, что выражение (17) является, вообще говоря, комплекснозначной функцией.

### 3. Многомерное обобщенное уравнение типа Буссинеска

Рассмотрим многомерное обобщенное уравнение типа Буссинеска (ср. с [9])

$$p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{k,s=1}^{\ell} q_{ks} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_s} + \sum_{i,j,k,s=1}^{\ell} r_{ijks} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_s} + \sum_{k,s=1}^{\ell} h_{ks} \frac{\partial^2 \left(u^2\right)}{\partial x_k \partial x_s} = 0, \qquad (18)$$

где $p_0, q_{ks}, r_{ijks}, h_{ks}$ – произвольные действительные числа. Обобщая солитонную форму решения одномерной модели, будем искать аналог односолитонного решения в виде

$$u = A\,\mathrm{ch}^{-2}\left\{\alpha_0 t + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k x_k + \delta\right\}, \tag{19}$$

где $A, \alpha_0, \alpha_k, \delta$ – произвольные действительные числа. Подставляя (19) в (18), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$p_0\alpha_0^2 + Q + 4R = 0, \qquad AH = 6R, \tag{20}$$

где

$$Q = \sum_{k,s=1}^{\ell} q_{ks}\alpha_k\alpha_s, \quad R = \sum_{i,j,k,s=1}^{\ell} r_{ijks}\,\alpha_i\alpha_j\alpha_k\alpha_s, \quad H = \sum_{k,s=1}^{\ell} h_{ks}\alpha_k\alpha_s .$$

Для построения рационального решения уравнения (18) положим $\alpha_k = \alpha A_k$, $k = \overline{1,\ell}$, где $A_k, \alpha$ – произвольные действительные числа. Воспользуемся свободой выбора параметра $\delta$ и возможностью выхода на комплексную плоскость, т.е. положим в (19) $\delta = \frac{\pi}{2}i$. Тогда получим:

$$u = -A\,\mathrm{sh}^{-2}\left\{\alpha_0 t + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha A_k x_k\right\}. \tag{21}$$

Из дисперсионных соотношений (20) имеем:

$$A = \frac{6}{H}R \equiv B\alpha^2, \quad \left(B = 6\sum_{i,j,k,s=1}^{\ell} r_{ijks}\,A_iA_jA_kA_s \Bigg/ \left(\sum_{k,s=1}^{\ell} h_{ks}A_kA_s\right)\right),$$

$$\alpha_0 = \pm\sqrt{-\frac{Q+4R}{p_0}} = \pm\sqrt{-\frac{\widetilde{Q}\alpha^2 + 4\widetilde{R}\alpha^4}{p_0}}, \tag{22}$$

$$\widetilde{Q} = \sum_{k,s=1}^{\ell} q_{ks}A_kA_s, \quad \widetilde{R} = \sum_{i,j,k,s=1}^{\ell} r_{ijks}\,A_iA_jA_kA_s .$$

Подставляя (22) в (21), получим:

$$u = -B\alpha^2\,\mathrm{sh}^{-2}\left\{\alpha_0 t + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha A_k x_k\right\}. \tag{23}$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ в (23), найдем

$$u = -B\left\{\pm\left(-\frac{\tilde{Q}}{p_0}\right)^{1/2} t + \sum_{k=1}^{\ell} A_k x_k\right\}^{-2} \tag{24}$$

Выражение (24) и является искомым рациональным решением уравнения (18), что согласуется с одномерным случаем [9]. Дисперсионное соотношение имеет вид:

$$B\sum_{k,s=1}^{\ell} h_{ks} A_k A_s = 6 \sum_{i,j,k,s=1}^{\ell} r_{ijks} A_i A_j A_k A_s .$$

Отметим, что выражение (24) является, вообще говоря, комплекснозначной функцией.

### 4. Многомерное обобщенное уравнение типа Кадомцева-Петвиашвили (К-П)

Рассмотрим многомерное обобщенное уравнение типа К-П (ср. с [9]):

$$\sum_{i=1}^{\ell} p_i \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} + u \cdot \sum_{i,j=1}^{\ell} q_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{\ell} r_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{\ell} \theta_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j,k,s}^{\ell} h_{ijks} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_s} = 0, \tag{25}$$

где $p_i, q_{ij}, r_i, \theta_{ij}, h_{ijks}$ – произвольные действительные числа. Обобщая солитонную форму решения классического уравнения К–П, будем искать аналог односолитонного решения в виде:

$$u = ce(k_0 + k_1 e)^{-2}, \qquad e = \exp\left\{\alpha_0 t + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i x_i + \varphi\right\}, \tag{26}$$

где $c, k_0, k_1, \alpha_0, \alpha_i, \varphi$ – произвольные действительные числа. Подставляя (26) в (25), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\alpha_0 P + \Theta + H = 0, \quad cQ = 12H(k_0 k_1), \quad Q = R, \tag{27}$$

где

$$P = \sum_{i=1}^{\ell} p_i \alpha_i, Q = \sum_{i,j=1}^{\ell} q_{ij} \alpha_i \alpha_j, R = \sum_{i=1}^{\ell} r_i \alpha_i^2, \Theta = \sum_{i,j=1}^{\ell} \theta_{ij} \alpha_i \alpha_j, H = \sum_{i,j,k,s}^{\ell} h_{ijks} \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_s,$$

что согласуется с классической теорией уравнения К-П [9].

Для построения рационального решения уравнения (25) положим:

$$k_0 = k_1 \equiv k, \quad \alpha_i = \alpha A_i, \qquad i = \overline{1, \ell},$$

где $A_i, \alpha$ – произвольные действительные числа. Используя свободу выбора параметра $\varphi$ и возможность выхода на комплексную плоскость, выберем в (26) $\varphi = \pi i,\ i = \sqrt{-1}$. Тогда получим:

$$u = -\frac{12\widetilde{H}\alpha^2 \cdot \exp\left\{\alpha_0 t + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha A_k x_k\right\}}{\widetilde{Q}\left(1 - \exp\left\{\alpha_0 t + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha A_k x_k\right\}\right)^2}, \tag{28}$$

где

$$\widetilde{Q} = \sum_{i,j=1}^{\ell} q_{ij} A_i A_j, \qquad \widetilde{H} = \sum_{i,j,k,s=1}^{\ell} h_{ijks} A_i A_j A_k A_s .$$

Из дисперсионных соотношений (27) следует, что:

$$\alpha_0 = -\frac{1}{P}(H + \Theta) = -\frac{1}{\widetilde{P}}\left(\widetilde{H}\alpha^3 + \widetilde{\Theta}\alpha\right), \quad \left(\widetilde{P} = \sum_{i=1}^{\ell} p_i A_i\right).$$

Учитывая этот факт и переходя к пределу при $\alpha \to 0$ в (28), получим:

$$u = -\frac{12\widetilde{H}}{\widetilde{Q}} \frac{1}{\left(-\frac{\widetilde{\Theta}}{\widetilde{P}} t + \sum_{k=1}^{\ell} A_k x_k\right)^2}, \tag{29}$$

$$\left(\widetilde{\Theta} = \sum_{i,j=1}^{\ell} \theta_{ij} A_i A_j\right).$$

Выражение (29) и является искомым рациональным решением уравнения (25). Дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\sum_{i,j=1}^{\ell} q_{ij} A_i A_j = \sum_{i=1}^{\ell} r_i A_i^2 .$$

**5. Многомерное обобщенное уравнение типа Клейна-Гордона (К-Г)**

Рассмотрим многомерное обобщенное уравнение типа К-Г (ср. с [8]):

$$p_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j,k=1}^{\ell} p_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = \lambda u^3 - m^2 u, \qquad \lambda > 0, \tag{30}$$

где $p_0, p_{jk}, \lambda, m$ – произвольные действительные числа. Обобщая форму решения одномерной модели, будем строить многомерный аналог в виде:

$$u = A \operatorname{ch}^{-1} \left\{ \alpha_0 t + \sum_{s=1}^{\ell} \alpha_s x_s + \varphi \right\}, \tag{31}$$

где $A, \alpha_0, \alpha_s, \varphi$ – произвольные действительные числа. Подставляя (31) в (30), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$P_{11} = m^2 + p_0 \alpha_0^2, \quad A^2 = \frac{2m^2}{\lambda}, \tag{32}$$

где $P_{11} = \sum_{j,k=1}^{\ell} p_{jk} \alpha_j \alpha_k$.

Для построения рационального решения уравнения (30) положим:

$$\alpha_s = \alpha A_s, \qquad s = \overline{1, \ell},$$

где $A_s, \alpha$ – произвольные действительные числа. Используя свободу выбора параметра $\varphi$ и возможность выхода на комплексную плоскость, выберем в (31) $\varphi = \frac{\pi}{2} i$, $i = \sqrt{-1}$. Тогда получим:

$$u = \frac{A}{i \operatorname{sh}\left( \alpha_0 t + \sum_{s=1}^{\ell} \alpha A_s x_s \right)}. \tag{33}$$

Выберем $p_0 = -1$ и перейдем к пределу при $\alpha \to 0$ в соотношениях (32), (33). Тогда получим:

$$\alpha_0^2 = m^2, \qquad A^2 = \frac{2m^2}{\lambda},$$

$$u = \frac{A}{i \operatorname{sh}(\alpha_0 t)}. \tag{34}$$

Выражение (34) и является искомым решением рационального типа уравнения (30).

### 6. Многомерное обобщенное уравнение типа Перегрина-Бенжамена-Бона-Махони (ПББМ)

Рассмотрим многомерное уравнение типа ПББМ:

$$p_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{\ell} q_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \cdot \sum_{j=1}^{\ell} r_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - \sum_{k,s=1}^{\ell} h_{ks} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x_k \partial x_s} = 0, \qquad (35)$$

где $p_0, q_i, r_j, h_{ks}$ – произвольные действительные числа. Обобщая форму решения одномерной модели, будем строить многомерный аналог в виде:

$$u = A\,\mathrm{ch}^{-2}\left\{\alpha_0 t + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha_k x_k + \delta\right\}, \qquad (36)$$

где $A, \alpha_0, \alpha_k, \delta$ – произвольные действительные числа. Подставляя (36) в (35), получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\alpha_0 p_0 + Q = 4\alpha_0 H, \qquad AR = 12\alpha_0 H, \qquad (37)$$

где

$$Q = \sum_{i=1}^{\ell} q_i \alpha_i, \qquad R = \sum_{i=1}^{\ell} r_i \alpha_i, \qquad H = \sum_{k,s=1}^{\ell} h_{ks} \alpha_k \alpha_s.$$

Для построения рационального решения уравнения (35) положим:

$$p_0 = 1, \qquad \alpha_k = \alpha A_k, \qquad k = \overline{1, \ell},$$

где $\alpha, A_k$ – произвольные действительные числа. Из дисперсионных соотношений (37) следует, что

$$\alpha_0 = \frac{Q}{4H - 1}, \qquad A = \frac{12HQ}{R(4H - 1)}. \qquad (38)$$

Используя свободу выбора параметра $\delta$ и возможность выхода на комплексную плоскость, выберем в (36) $\delta = \frac{\pi}{2} i, i = \sqrt{-1}$. Тогда с учетом (38) получим:

$$u = -\frac{12\widetilde{H}\widetilde{Q}}{\widetilde{R}(4H - 1)}\left[\frac{\alpha}{\mathrm{sh}\left(\alpha_0 t + \sum_{k=1}^{\ell} \alpha A_k x_k\right)}\right]^2, \qquad (39)$$

где $\widetilde{Q} = \sum_{i=1}^{\ell} q_i A_i, \widetilde{R} = \sum_{i=1}^{\ell} r_i A_i, \widetilde{H} = \sum_{k,s=1}^{\ell} h_{ks} A_k A_s$.

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ в формуле (39), получим:

$$u = \frac{12\widetilde{H}\widetilde{Q}}{\widetilde{R}}\left\{\sum_{k=1}^{\ell} A_k x_k - \widetilde{Q}t\right\}^{-2} \tag{40}$$

Выражение (40) и является искомым рациональным решением уравнения (35).

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. ***Жесткое С.В., Кувшинов В.И.*** Об одном варианте распространения метода Хироты на многомерный случай // Докл. НАНБ. 1998. – Т. 42, №5. – С. 51–54.
2. ***Жестков С.В.*** О многомерном математическом варианте метода Хироты для нелинейного уравнения Шредингера // Тезисы докл. Междунар. мат. конфер. "Еругинские чтения – VI". Часть I. – Гомель, 1999. – С.132–133.
3. ***Жесткое С.В.*** О распространении метода Хироты на многомерное нелинейное уравнение типа Кадомцева–Петвиашвили // Тезисы докл. Междунар. мат. конфер. "Еругинские чтения — VI". Часть I. – Гомель, 1999. – С.133–134.
4. ***Жестков С.В., Кувшинов В.И.*** О существовании решений квазисолитонного типа для многомерных аналогов уравнения Ландау–Гинзбурга // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук, 1999. – №2. – С.72–76.
5. ***Жестков С.В.*** Математический анализ современных методов построения солитонных решений и их обобщение // Тезисы докл. Междунар. конфер. "AMADE99". Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. – Минск, 1999. – С. 87–88.
6. ***Жестков С.В., Кувшинов В.И.*** О распространении метода Хироты на многомерное нелинейное уравнение Шредингера // Докл. НАНБ. 1999. – Т. 43, №5. – С.41–43.
7. ***Жестков С.В., Кувшинов В.И.*** Об одном замечании к методу обратной задачи рассеяния // Докл. НАНБ. 1999. – Т. 43, №6. – С.48–52.
8. ***Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.*** Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М., 1988.
9. ***Абловиц М., Сигур Х.*** Солитоны и метод обратной задачи. – М., 1987.
10. ***Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.*** Гамильтонов подход в теории солитонов. – М., 1986.