МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. А. КУЛЕШОВА"

А. М. Сазонова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Контрольные задания и методические указания к ним

Могилев
МГУ им. А. А. Кулешова
2002

УДК 519.21(075)
ББК 22.3
С12

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент МГУ им. А. А. Кулешова
В. Н. Борбат

Печатается по решению редакционно-издательского и экспертного совета МГУ им. А. А. Кулешова

Сазонова А. М.
С12 Теория вероятности и математическая статистика: Контрольные задания и методические указания к ним. – Могилев: МГУ им. А. А. Кулешова, 2002. – 34 с.

Методические указания отражают практику преподавания предмета в Могилевском государственном университете имени А.А. Кулешова.

Предназначается для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям, преподавателей и слушателей курсов повышения квалификации, применяющих в своей практике вероятностные и статистические методы.

УДК 519.21(075)
ББК 22.3

ВЫБОР КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Номер варианта контрольной работы совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки. В контрольную работу входит 8 задач, номера которых состоят из двух частей: до точки – номер задачи, после точки – номер варианта. Так, студент, у которого номер зачетной книжки оканчивается цифрой 8, должен решить задачи 1.8, 2.8, 3.8, 4.8, 5.8, 6.8, 7.8, 8.8. Перед решением задачи обязательно нужно писать ее условие.

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова
Кафедра алгебры и геометрии

Контрольная работа
по теории вероятностей и математической статистике

студента 2 курса ФЭиП, гр. Э – 001,
зачетная книжка № 001158,
Иванова Ивана Ивановича.

212030, г. Могилев,
ул. Первомайская, д. 31, кв. 7.
дом. тел. 25-31-31
сл. тел. 22-13-13

ЛИТЕРАТУРА

1. Булдык Г. М. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн., 1989.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М., 1962.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М., 1997.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., 1998.
5. Гурский Е. И. Теория вероятностей с элементами математической статистики. – М., 1971.
6. Лихолетов И. И. Высшая математика, теория вероятностей и математическая статистика. – Мн., 1976.

ПРОГРАММА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Случайные события и их классификации.

Классическое определение вероятности.

Статистическое определение вероятности.

Аксиоматическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности.

Теорема сложения вероятностей.

Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.

Наивероятнейшее число наступления события.

Локальная теорема Лапласа.

Функция распределения случайной величины и ее свойства.

Дискретные случайные величины.

Плотность распределения вероятностей и ее свойства.

Функция одной случайной величины.

Случайный вектор. Система случайных величин.

Математическое ожидание дискретной и непрерывной случайных величин и их свойства.

Дисперсия случайной величины и ее свойства.

Биноминальный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по биноминальному закону.

Закон распределения Пуассона. Математическое ожидание и дисперсия.

Равномерный закон распределения, математическое ожидание, дисперсия.

Показательный закон распределения, математическое ожидание, дисперсия.

Нормальный закон распределения, математическое ожидание, дисперсия.

Выражение функции распределения нормальной величины через функцию Лапласа. Вероятность попадания значения нормальной случайной величины в заданный интервал, правило трех сигм.

Корреляционный момент, коэффициент корреляции, их свойства.

Моменты случайной величины. Асимметрия, эксцесс.

Неравенства Маркова и Чебышева.

Закон больших чисел в форме теоремы Чебышева.

Теорема Бернулли.

Понятие о “центральной теореме” (предельной). Теорема Ляпунова.

Понятие “случайный процесс”. Корреляционная функция случайного процесса.

Стационарный случайный процесс. Гармонический анализ стационарного случайного процесса.

Цепи Маркова. Переходные вероятности. Применение цепей Маркова в экономике. Теорема Маркова.

Разрывные Марковские процессы. Уравнение Колмогорова-Чемпена.

Статистическая совокупность. Генеральная и выборочная совокупности. Несмещенная, состоятельная, эффективная оценка параметров.

Основные числовые характеристики статистического распределения.

Среднее арифметическое и статистическая дисперсия и их свойства.

Мода, медиана, полигон, гистограмма.

Выборочный метод. Точечное оценивание.

Интервальное оценивание. Формула доверительной вероятности для большой и малой выборок.

Несмещенные оценки для генерального среднего и генеральной дисперсии. Расчет доверительного интервала и объема выборки (при повторном и бесповторном отборах).

Метод моментов и метод наибольшего правдоподобия получения точечных оценок.

Статистическая проверка гипотез. Нулевая и альтернативная гипотезы.

Ошибка 1-го и 2-го рода при проверке гипотез. Уровень значимости, критическая область. Критерий согласия и его мощность.

Проверка гипотезы о значении среднего значения для нормально распределенной величины при известной и неизвестной генеральных дисперсиях.

Критерий Пирсона. Критерий согласия Фишера-Снедекора и его применения для проверки гипотезы о равенстве дисперсий. Критерий согласия Колмогорова.

Однофакторный дисперсионный анализ. Двуфакторный дисперсионный анализ.

Модели и основные понятия корреляционного и регрессионного анализа.

Линейная корреляционная зависимость и прямые регрессии.

Коэффициент линейной корреляции и его свойства.

Понятие "нелинейная корреляция". Корреляционное отношение и его свойства.

Понятие "множественная регрессия". Уравнение линейной регрессии и определение ее коэффициентов по методу наименьших квадратов.

Совокупный коэффициент корреляции и его свойства.

Частные коэффициенты корреляции и их свойства.

Анализ соответствия регрессионной модели наблюденным данным.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1.0 – 1.9. Студент выполняет работу по статистике, пользуясь пятью пособиями. Вероятность того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем, четвертом и пятом пособиях, соответственно равны p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Найти вероятность того, что интересующие его данные не содержатся:

1) только в k пособиях;
2) более, чем в l пособиях;
3) хотя бы в m пособиях;
4) не менее, чем в s пособиях.

№ варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a
p_1	0,8	0,7	0,9	0,3	0,5	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,4
p_2	0,5	0,8	0,3	0,5	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,4	0,9
p_3	0,6	0,3	0,5	0,4	0,6	0,8	0,7	0,4	0,9	0,8	0,6
p_4	0,4	0,8	0,4	0,6	0,7	0,4	0,3	0,5	0,3	0,5	0,3
p_5	0,7	0,4	0,5	0,7	0,5	0,9	0,4	0,4	0,4	0,7	0,2
k	2	3	1	4	1	2	3	2	2	3	2
l	1	1	2	2	3	2	1	4	1	2	3
m	2	2	1	1	1	2	2	1	3	1	2
s	4	2	3	3	4	5	4	3	2	4	3

Задача 2.0 – 2.9. Покупатель может приобрести нужный ему товар в одной из n секций магазина A, или в одной из m секций магазина B, или в одной из k секций магазина C. Вероятность того, что к моменту прихода покупателя в секциях магазина A имеется в продаже нужный товар, равна p_1, в секциях магазина $B - p_2$, в секциях магазина $C - p_3$.

1) Найти вероятность того, что в наугад выбранной секции имеется в продаже нужный товар;

2) Покупатель приобрел товар. В секции какого магазина он вероятнее всего куплен?

№ варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a
p_1	0,7	0,3	0,3	0,1	0,7	0,8	0,8	0,5	0,6	0,5	0,9
p_2	0,9	0,4	0,9	0,3	0,7	0,3	0,2	0,6	0,8	0,5	0,1
p_3	0,8	0,8	0,1	0,9	0,5	0,3	0,3	0,4	0,6	0,9	0,4
n	4	7	6	10	7	5	4	5	5	10	2
m	3	5	4	8	8	9	8	3	3	10	10
k	2	3	9	6	6	9	7	6	5	4	5

Задача 3.0 – 3.9. Вероятность того, что расход электроэнергии в некотором учреждении окажется нормальным (не превысит определенного числа квт/час в сутки) равна p. Построить ряд распределения случайной величины X – количество дней, для которых расход электроэнергии окажется нормальным в течении n суток. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой СВX.

№ варианта	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a
p	0,8	0,7	0,6	0,8	0,5	0,6	0,9	0,7	0,8	0,6	0,4
n	4	3	5	6	6	5	5	4	4	6	6

Задача 4.0 – 4.9. По данному статистическому материалу опыта требуется:

1) составить статистический ряд распределения;

2) составить интервальный статистический ряд относительных частот, разбив размах варьирования на k интервалов;

3) построить гистограмму и полигон относительных частот;

4) найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

5) вычислить числовые характеристики: среднее арифметическое $\overline{X}$, выборочную дисперсию $S_в^2$, выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$, коэффициент вариации $V_в$;

6) по виду гистограммы и полигона относительных частот, а также по значению $V_в$ сделать предварительный выбор вида закона распределения;

7) найти точечные оценки параметров распределения и функцию распределения СВ X;

8) найти теоретические частоты распределения, проверить согласие эмпирической функции распределения $\hat{F}(x)$ с теоретической $F(x)$ при помощи согласия χ^2.

В случае нормального распределения по заданному уровню значимости α:

9) найти интервальные оценки параметров распределения

10) проверить нулевую гипотезу H_0: $a = a_0$ о математическом ожидании при альтернативной гипотезе H_1: $a \neq a_0$ ($a > a_0$; $a < a_0$)

11) проверить нулевую гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ о дисперсии против альтернативной H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ ($\sigma^2 > \sigma_0^2$; $\sigma^2 < \sigma_0^2$).

Статистические данные:

37	49	43	31	44	38	40	31	28	43	32	44
47	29	51	25	43	38	41	32	38	24	46	49
32	34	31	28	37	46	41	35	43	25	37	46
38	24	41	50	38	29	41	32	34	49	44	37
31	47	50	34	25	37	40	32	35	28	44	43
46	35	41	35	29	43	38	31	26	34	49	32
46	26	38	35	40	51	37	46	38	25	40	34

№ варианта	0	1	2	3	4	5
k	7	8	9	11	10	7
α-уровень значимости	0,01	0,01	0,05	0,05	0,01	0,01
a_0	a_1	a_2	a_2	a_1	a_2	a_2
σ_0^2	S_2^2	S_1^2	S_2^2	S_2^2	S_1^2	S_2^2
гипотезы H_1	$a \neq a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a > a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$a \neq a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a > a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$
i	1	7	15	20	26	30

№ варианта	6	7	8	9	a
k	9	8	10	11	7
α-уровень значимости	0,05	0,05	0,05	0,01	0,05
a_0	a_1	a_2	a_1	a_2	a_1
σ_0^2	S_2^2	S_2^2	S_2^2	S_1^2	S_1^2
гипотезы H_1	$a \neq a_0$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$a \neq a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a \neq a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$a < a_0$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$
i	34	7	26	20	30

a_2, S_2 – соответственно значения a и σ в правом конце доверительного интервала, a_1, S_1 – в левом конце. Объем выборки $n = 50$; i – порядковый номер x_i, от которого ведется отсчет значений СВ X, считая по строке.

Задача 5.0 – 5.9. Банк обслуживает N вкладчиков. Для определения средней суммы вкладов в банке произведено обследование n вкладов. По данным бесповторной выборки найти доверительный интервал для генерального среднего, который можно было бы гарантировать с точностью до p %.

№ варианта	0		1		2	
N	7320		4300		5200	
p %	98		99		93	
	Сумма вкладов	Число вкладов	Сумма вкладов	Число вкладов	Сумма вкладов	Число вкладов
	2 – 8	41	4 – 9	51	3 – 7	41
	8 – 14	32	9 – 14	73	7 – 11	23
	14 – 20	16	14 – 19	19	11 – 15	2
	20 – 26	8	19 – 24	21	15 – 19	14
	26 – 32	77	24 – 29	2	19 – 23	73
	32 – 38	49	29 – 34	41	23 – 27	17

№ варианта	3		4		5	
N	2400		2500		4135	
p %	98		99		97	
	Сумма вкладов	Число вкладов	Сумма вкладов	Число вкладов	Сумма вкладов	Число вкладов
	3 – 8	21	4 – 8	9	10 – 17	14
	8 – 13	9	8 – 12	3	17 – 24	14
	13 – 18	17	12 – 16	7	24 – 31	25
	18 – 23	43	16 – 20	68	31 – 38	75
	23 – 28	17	20 – 24	29	38 – 45	140
	28 – 33	41	24 – 28	13	45 – 52	54

№ варианта	6		7		8	
N	1000		3120		2000	
p %	95,3		96,7		97	
	Сумма вкладов	Число вкладов	Сумма вкладов	Число вкладов	Сумма вкладов	Число вкладов
	2 – 12	29	3 – 9	93	12 – 14	3
	12 – 22	125	8 – 13	13	14 – 16	4
	22 – 32	71	13 – 18	51	16 – 18	2
	32 – 42	4	18 – 23	17	18 – 20	12
	42 – 52	59	23 – 28	47	20 – 22	29
	52 – 62	97	28 – 32	51	22 – 24	13

№ варианта	9		a	
N	3000		2200	
p %	95		93	
	Сумма вкладов	Число вкладов	Сумма вкладов	Число вкладов
	7 – 13	23	8 – 28	2
	13 – 19	10	28 – 48	3
	19 – 25	15	48 – 68	9
	25 – 31	12	68 – 88	27
	31 – 37	49	88 – 108	63
	37 – 43	41	108 – 128	7

Задача 6.0 – 6.9. Даны распределения 100 фирм по производственным средствам X (млн. руб.) и суточной выработке Y (т). Известно, что между случайными величинами существует линейная корреляционная зависимость. По заданной корреляционной таблице определить:

1) Числовые характеристики случайных величин X и Y;
2) Коэффициент корреляции r;
3) Уравнение прямой регрессии Y на X;
4) Построить корреляционное поле и график уравнения регрессии Y на X;
5) Отклонения между теоретическими значениями $\overline{Y_X}$ и экспериментальными $\overline{Y_x}$.

6.0 Y / X	12,5 – 15,5	15,5 – 18,5	18,5 – 21,5	21,5 – 24,5	24,5 – 27,5	27,5 – 30,5	30,5 – 33,5	33,5 – 36,5	m_X
15 – 21	2	4	6						12
21 – 27		2	7	6					15
27 – 33			6	8	5				19
33 – 39				8	14	4			26
39 – 45					3	6	8		17
45 – 51							5	6	11
m_Y	2	6	19	22	22	10	13	6	100

6.1 X \ Y	5,5 – 18,5	18,5 – 31,5	31,5 – 44,5	44,5 – 57,5	57,5 – 70,5	70,5 – 83,5	83,5 – 96,5	96,5 – 109,5	m_X
20 – 21	4	2	5						11
520 – 1020			7	5	2				14
1020 – 1520				9	14	6			29
1520 – 2020				7	8	6			21
2020 – 2520					4	5	7		16
2520 – 3020						33	2	4	9
m_Y	4	2	12	21	28	20	9	4	100

6.2 X \ Y	50 – 62	62 – 74	74 – 86	86 – 98	98 – 110	110 – 122	122 – 134	134 – 146	m_X
7,0 – 11,0	2	3	5						10
11,0 – 15,0		6	3	5					14
15,0 – 19,0			5	8	15				28
19,0 – 23				6	9	10			25
23 – 27					1	6	8		15
27 – 31						3	4	1	8
m_Y	2	9	13	19	25	19	12	1	100

6.3 X \ Y	1,5 – 2,9	2,9 – 4,3	4,3 – 5,7	5,7 – 7,1	7,1 – 8,5	8,5 – 9,9	9,9 – 11,3	11,3 – 12,7	m_X
120 – 280		4	3	5					12
280 – 440		6	7	8					21
440 – 600			10	12	11				33
600 – 760					5	4	3		12
760 – 920						6	8		14
920 – 1080							3	5	8
m_Y	0	10	20	25	16	10	14	5	100

6.4 X \ Y	1,55 – 3,05	3,05 – 4,55	4,55 – 6,05	6,05 – 7,55	7,55 – 9,05	9,05 – 10,55	10,55 – 12,05	12,05 – 13,55	m_X
145 – 275	5	3	4						12
275 – 405		7	8						15
405 – 535			9	10	14				33
535 – 665				8	7	6			21
665 – 795					2	3	2		7
795 – 925							6	6	12
m_Y	5	10	21	18	23	9	8	6	100

6.5 X \ Y	60 – 68	68 – 76	76 – 84	84 – 92	92 – 100	100 – 108	108 – 116	116 – 124	m_X
0,85 – 1,15	2	3	5						10
1,15 – 1,45		6	3	5					14
1,45 – 1,75			5	8	15				28
1,75 – 2,05				6	9	10			25
2,05 – 2,35					1	6	8		15
2,35 – 2,65						3	4	1	8
m_Y	2	9	13	19	25	19	12	1	100

		16	18	20	22	24	26	28	30	
	6.6 X \ Y	15 – 17	17 – 19	19 – 21	21 – 23	23 – 25	25 – 27	27 – 29	29 – 31	m_X
2,3	2,1 – 2,5	3	2	4						9
2,7	2,5 – 2,9		5	6	1					12
3,1	2,9 – 3,3			6	9	4				19
3,5	3,3 – 3,7				8	16	7			31
3,9	3,7 – 4,1					8	6	5		19
4,3	4,1 – 4,5						4	5	1	10
	m_Y	3	7	16	18	28	17	10	1	100

6.7 X \ Y	140 – 180	180 – 220	220 – 260	260 – 300	300 – 340	340 – 380	380 – 420	420 – 460	m_X
8,5 – 11,5	1	4	5						10
11,5 – 14,5		6	7	2					15
14,5 – 17,5			5	8	6				19
17,5 – 20,5				9	13	6			28
20,5 – 23,5					7	8	4		19
23,5 – 26,5							6	3	9
m_Y	1	10	17	19	26	14	10	3	100

6.8 X \ Y	20,85 – 21,15	21,15 – 21,45	21,45 – 21,75	21,75 – 22,05	22,05 – 22,35	22,35 – 22,65	22,65 – 22,95	22,95 – 23,25	m_X
82,5 – 97,5	1	3	2						6
97,5 – 112,5		4	2	3					9
112,5 – 127,5			5	7	6				18
127,5 – 142,5				6	14	9			29
142,5 – 157,5					7	6	7		20
157,5 – 172,5						6	7	5	18
m_Y	1	7	9	16	27	21	14	5	100

6.9 X \ Y	100 – 120	120 – 140	140 – 160	160 – 180	180 – 200	200 – 220	220 – 240	240 – 260	m_X
8,5 – 11,5	1	3	4						8
11,5 – 14,5		5	6	5					16
14,5 – 17,5			4	8	6				18
17,5 – 20,5			6	15	9				30
20,5 – 23,5					5	6	7		18
23,5 – 26,5						1	7	2	10
m_Y	1	8	20	28	20	7	14	2	100

6.а Y / X	10 – 30	30 – 50	50 – 70	70 – 90	90 – 110	110 – 130	130 – 150	150 – 170	m_X
0,5 – 1,5	2	7	3						12
1,5 – 2,5		6	4	5					15
2,5 – 3,5			8	9	7				24
3,5 – 4,5				7	14	5			26
4,5 – 5,5					5	7	4		16
5,5 – 6,5							4	3	7
m_Y	2	13	15	21	26	12	8	3	100

Задача 7.0 – 7.9. В течение пяти лет использовались три различные технологии по изготовлению продукции. Необходимо установить влияние различных технологий на продуктивность по данным таблицы:

2.0 год	Технология (фактор A)			2.1 год	Технология (фактор A)		
	A_1	A_2	A_3		A_1	A_2	A_3
1	1,2	0,9	1,7	1	3,1	3,5	2,5
2	1,4	0,8	1,8	2	3,2	3,7	2,9
3	1,5	1,2	1,0	3	3,1	3,8	3,1
4	1,1	0,9	1,3	4	3,0	3,9	3,4
5	1,3	1,2	1,2	5	3,0	2,8	3,3

2.2 год	Технология (фактор A)			2.3 год	Технология (фактор A)		
	A_1	A_2	A_3		A_1	A_2	A_3
1	1,1	1,5	1,1	1	1,3	1,2	0,9
2	1,3	0,8	1,2	2	1,4	1,3	1,1
3	1,2	1,2	1,0	3	1,3	1,2	1,3
4	1,0	1,4	1,3	4	1,2	1,4	1,5
5	1,3	1,2	1,1	5	1,5	1,1	1,4

2.4 год	Технология (фактор A)			2.5 год	Технология (фактор A)		
	A_1	A_2	A_3		A_1	A_2	A_3
1	5,3	6,1	6,3	1	2,0	3,1	1,2
2	5,2	6,1	6,4	2	2,1	3,1	1,3
3	5,1	6,3	6,5	3	2,2	3,5	1,1
4	5,6	6,4	6,6	4	2,4	3,6	1,5
5	5,7	6,7	6,9	5	2,7	3,7	1,6

2.6 год	Технология (фактор A)		
	A_1	A_2	A_3
1	5,3	3,1	7,0
2	5,4	3,2	7,2
3	5,2	3,7	7,1
4	5,7	3,8	7,9
5	4,9	4,5	7,0

2.7 год	Технология (фактор A)		
	A_1	A_2	A_3
1	3,1	4,2	5,2
2	3,6	4,0	5,3
3	3,8	4,3	5,1
4	3,4	4,5	5,4
5	3,5	4,8	5,2

2.8 год	Технология (фактор A)		
	A_1	A_2	A_3
1	1,3	2,3	1,2
2	1,4	2,1	1,1
3	1,6	2,6	1,3
4	1,5	2,0	1,5
5	1,6	2,2	1,4

2.9 год	Технология (фактор A)		
	A_1	A_2	A_3
1	4,2	3,1	5,3
2	4,5	3,7	5,4
3	4,3	4,5	5,2
4	4,4	4,8	4,9
5	4,1	4,3	5,7

2.а год	Технология (фактор A)		
	A_1	A_2	A_3
1	0,7	0,9	1,3
2	0,8	0,8	0,9
3	1,3	0,9	1,2
4	1,2	1,1	1,5
5	0,8	0,8	1,3

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА “а”

Задача 1а. Студент выполняет работу по статистике, пользуясь пятью пособиями. Вероятность того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем, четвертом и пятом пособиях, соответственно равны p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Найти вероятности того, что интересующие его данные не содержатся:

1) только в k пособиях;
2) более, чем в l пособиях;
3) хотя бы в m пособиях;
4) не менее, чем в s пособиях.

Решение 1а. $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}6$; $p_4 = 0{,}3$; $p_5 = 0{,}2$; $k = 2$; $l = 3$; $m = 2$; $s = 3$.

Вероятность того, что интересующие студента данные не содержатся в первом, втором, третьем, четвертом и пятом пособиях, соответственно равны $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$; $q_5 = 1 - p_5 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

1) Найти вероятность того, что данные не содержатся только в двух пособиях ($k = 2$) – событие A.

Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – элементарные события: интересующие данные находятся соответственно в первом, втором, третьем, четвертом и пятом пособиях. Тогда:

$P(A_1) = p_1 = 0{,}4$, $P(A_2) = p_2 = 0{,}9$, $P(A_3) = p_3 = 0{,}6$, $P(A_4) = p_4 = 0{,}3$, $P(A_5) = = p_5 = 0{,}2$;

$P(\overline{A_1}) = q_1 = 0{,}6$, $P(\overline{A_2}) = q_2 = 0{,}1$, $P(\overline{A_3}) = q_3 = 0{,}4$, $P(\overline{A_4}) = q_4 = 0{,}7$, $P(\overline{A_5}) = = q_5 = 0{,}8$.

$$A = A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5} + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\,\overline{A_5} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4\overline{A_5} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5 +$$
$$+ \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}\,\overline{A_5} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4\overline{A_5} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4\overline{A_5} +$$
$$+ \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}A_5 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4A_5.$$

В силу того, что события A_i для разных i независимы, то согласно теоремам умножения и сложения вероятностей имеем:

$$P(A) = q_1q_2p_3p_4p_5 + p_1q_2q_3p_4p_5 + p_1p_2q_3q_4p_5 + p_1p_2p_3q_4q_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 +$$
$$+ q_1p_2p_3q_4p_5 + q_1p_2p_3p_4q_5 + p_1q_2p_3q_4p_5 + p_1q_2p_3p_4q_5 + p_1p_2q_3p_4q_5 =$$
$$= 0{,}6\cdot 0{,}1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}4\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2 +$$
$$+ 0{,}4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8 + 0{,}6\cdot 0{,}9\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2 + 0{,}6\cdot 0{,}9\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2 +$$
$$+ 0{,}6\cdot 0{,}9\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8 + 0{,}4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}2 + 0{,}4\cdot 0{,}1\cdot 0{,}6\cdot 0{,}3\cdot 0{,}2 +$$
$$+ 0{,}4\cdot 0{,}9\cdot 0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8 = 0{,}00216 + 0{,}001056 + 0{,}02016 + 0{,}12096 +$$
$$+ 0{,}01296 + 0{,}04536 + 0{,}0776 + 0{,}00336 + 0{,}00144 + 0{,}03456 = 0{,}25928 \approx 0{,}26.$$

2) Событие B – интересующие студента данные не содержатся более, чем в трех пособиях. Это равносильно тому, что интересующие студента данные не содержатся в четырех или пяти пособиях.

$$B = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4\overline{A_5} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\,\overline{A_5} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5} +$$
$$+ A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}.$$

$$P(B)=q_1q_2q_3q_4p_5+q_1q_2q_3p_4q_5+q_1q_2p_3q_4q_5+q_1p_2q_3q_4q_5+p_1q_2q_3q_4q_5+$$
$$+q_1q_2q_3q_4q_5=0{,}6\cdot0{,}1\cdot0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}2+0{,}6\cdot0{,}1\cdot0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}8+$$
$$+0{,}6\cdot0{,}1\cdot0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}8+0{,}6\cdot0{,}9\cdot0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}8+0{,}4\cdot0{,}1\cdot0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}8+$$
$$+0{,}6\cdot0{,}1\cdot0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}8=0{,}20996\approx0{,}21$$

3) Событие C – интересующиеся данные не содержатся хотя бы в двух ($m=2$) пособиях, т. е. не содержатся в двух (событие A) или трех (событие F) или четырех или пяти пособиях (событие B).

$$C=A+\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4A_5+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}A_5+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4\overline{A_5}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5+$$
$$+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4\overline{A_5}+\overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}\,\overline{A_5}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4\overline{A_5}+$$
$$A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}+A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\,\overline{A_5}+B=A+F+B;$$

$$P(C)=P(A)+P(B)+P(F).$$

$$P(C)=P(A)+P(B)+q_1q_2q_3p_4p_5+q_1q_2p_3q_4p_5+q_1q_2p_3p_4q_5+q_1p_2q_3q_4p_5+$$
$$+q_1p_2q_3p_4q_5+q_1p_2p_3q_4q_5+p_1q_2q_3q_4p_5+p_1q_2q_3p_4q_5+p_1p_2q_3q_4q_5+p_1q_2p_3q_4q_5=$$
$$=0{,}26+0{,}21+0{,}6\cdot0{,}1\cdot0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}2+0{,}6\cdot0{,}1\cdot0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}2+$$
$$+0{,}6\cdot0{,}1\cdot0{,}6\cdot0{,}3\cdot0{,}8+0{,}6\cdot0{,}9\cdot0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}2+0{,}6\cdot0{,}9\cdot0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}8+$$
$$+0{,}6\cdot0{,}9\cdot0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}8+0{,}4\cdot0{,}1\cdot0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}2+0{,}4\cdot0{,}1\cdot0{,}4\cdot0{,}3\cdot0{,}8+$$
$$+0{,}4\cdot0{,}9\cdot0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}8+0{,}4\cdot0{,}1\cdot0{,}6\cdot0{,}7\cdot0{,}8=0{,}85.$$

4) Событие D – интересующиеся данные не содержатся не менее, чем в трех ($s=3$) пособиях, т. е. в трех или в четырех или в пяти пособиях.

$$D=F+B$$
$$P(D)+P(F)+P(B)=0{,}59.$$

Задача 2а. Покупатель может приобрести нужный ему товар в одной из n секций магазина A, или в одной из m секций магазина B, или в одной из k секций магазина C. Вероятность того, что к моменту прихода покупателя в секциях магазина A имеется в продаже нужный товар, равна p_1, в секциях магазина $B-p_2$, в секциях магазина $C-p_3$.

1) Найти вероятность того, что в наугад выбранной секции имеется в продаже нужный товар;

2) Покупатель купил товар. В секции какого магазина он вероятнее всего куплен?

Решение 2а. $p_1=0{,}9$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}4$, $n=2$, $m=10$, $k=5$.

1) Применим для решения задачи формулу полной вероятности.

Пусть H_i – событие, состоящее в том, что товар имеется в магазине A, B, C ($i=1, 2, 3$);

Событие D – имеется в продаже нужный товар для покупки.

$$P(H_1) = \frac{2}{2+10+5} = \frac{2}{17} \approx 0{,}12 \qquad = \frac{n}{n+m+k}$$

$$P(H_2) = \frac{10}{2+10+5} = \frac{10}{17} \approx 0{,}6 \qquad = \frac{m}{n+m+k}$$

$$P(H_3) = \frac{5}{2+10+5} = \frac{\cancel{2}5}{17} \approx 0{,}3 \qquad = \frac{k}{n+m+k}$$

$P(D) = P(H_1) \cdot P(D/H_1) + P(H_2) \cdot P(D/H_2) + P(H_3) \cdot P(D/H_3) = 0{,}12 \cdot 0{,}9 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 +$
$+ 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}108 + 0{,}06 + 0{,}12 = 0{,}126.$

2) Используя формулу Байеса, т. к. событие D совершилось, то

$$P(H_1/D) = \frac{P(H_1) \cdot P(D/H_1)}{P(D)} = \frac{0{,}12 \cdot 0{,}9}{0{,}126} = \frac{108}{126} \approx 0{,}86,$$

$$P(H_2/D) = \frac{P(H_2) \cdot P(D/H_2)}{P(D)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}1}{0{,}126} = \frac{60}{126} \approx 0{,}48,$$

$$P(H_3/D) = \frac{P(H_3) \cdot P(D/H_3)}{P(D)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}126} = \frac{120}{126} \approx 0{,}95.$$

Вероятнее, что покупка сделана в третьем магазине C, т. к.

$$\frac{120}{126} > \frac{108}{126} > \frac{60}{126}.$$

Задача 3а. Вероятность того, что расход электроэнергии в некотором учреждении окажется нормальным (не превысит определенного числа квт/час в сутки) равна p. Построить ряд распределения случайной величины X – количество дней, для которых расход электроэнергии окажется нормальным в течении n суток. Найти функцию распределения СВ X и построить ее график. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой СВ X.

Решение 3а. $p = 0{,}4$, $n = 6$.

Так как вероятность того, что расход электроэнергии окажется нормальным, постоянна и не зависит от исходов предыдущих испытаний, то случайная величина X – количество дней, для которых расход электроэнергии окажется нормальным, подчиняется биноминальному закону распределения.

$X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ – формула Бернулли.

$P(X=0)=C_6^0\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^6=0{,}6^6=0{,}047$

$P(X=1)=C_6^1\cdot 0{,}4^1\cdot 0{,}6^5=6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^5=0{,}187$

$$P(X=2)=C_6^2\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^4=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^4=0{,}31$$

$$P(X=3)=C_6^3\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0{,}4^3\cdot 0{,}6^3=0{,}28$$

$$P(X=4)=C_6^4\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot 0{,}4^4\cdot 0{,}6^2=0{,}14$$

$P(X=5)=C_6^5\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^1=6\cdot 0{,}4^5\cdot 0{,}6^1=0{,}036$

$P(X=6)=C_6^6\cdot 0{,}4^6\cdot 0{,}6^0=0{,}4^6=0{,}004$

Проверка: $0{,}047 + 0{,}187 + 0{,}31 + 0{,}28 + 0{,}14 + 0{,}036 + 0{,}004 = 1.$

Ряд распределения примет вид:

X	0	1	2	3	4	5	6
P	0,047	0,187	0,31	0,28	0,14	0,36	0,004

Математическое ожидание случайной величины X равно:

$$M_в(X)=\sum_{i=0}^{6}x_i p_i=0\cdot 0{,}047+1\cdot 0{,}187+2\cdot 0{,}31+3\cdot 0{,}28+4\cdot 0{,}14+5\cdot 0{,}036+$$

$+6\cdot 0{,}04=2{,}627\approx 2{,}63$ (экспериментальное значение).

Проверка для биноминального закона распределения:

$M(X)=n\cdot p=6\cdot 0{,}4=2{,}4$ (теоретическое значение).

Дисперсию $D(X)$ вычисляем по формуле:

$$D_в(X)=\sum_{i=0}^{6}x_i^2 p_i-M^2(X)=0\cdot 0{,}047+1\cdot 0{,}187+4\cdot 0{,}31+9\cdot 0{,}28+16\cdot 0{,}14+$$

$+25\cdot 0{,}036+36\cdot 0{,}04-2{,}63^2=8{,}527-6{,}92=1{,}611$ (эмпирическое значение).

Проверка для биномиального закона распределения:

$D(X)=n\cdot p\cdot q=6\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=1{,}44$ (теоретическое значение).

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ этой случайной величины X вычисляем по формуле:

$$\sigma_в(X)=\sqrt{D_в(X)}=\sqrt{1{,}611}\approx 1{,}27.$$

Теоретическое $\sigma(X)=\sqrt{1{,}44}=1{,}2.$

Задача 4а.

Решение. $k = 7$, $\alpha = 0{,}05$, $a_0 = a_1$; $\sigma = S_2$; $H_1: a \neq a_0$ для $H_0: a = a_0$ и $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ для $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$.

Статистические данные ($n = 50$) считаем от $i = 30$ по строкам:

46	41	35	43	25	37	46	38	24	41
50	38	29	41	32	34	49	44	37	31
47	50	34	25	37	40	32	35	28	44
43	46	35	41	35	29	43	38	31	26
34	49	32	46	26	38	35	40	51	37

Наблюденные значения СВ X	24	25	26	28	29	31	32	34	35	37	38	40	41	43	44	46	47	49	50	51
Подсчет частот	•	••	••	•	••	••	•••	•••	•••••	••••	••••	••	••••	•••	••	••••	•	••	••	•
Частоты (m_i)	1	2	2	1	2	2	3	3	5	4	4	2	4	3	2	4	1	2	2	1

Проверка $\sum m_i = n$ – несгруппированных значений

$1 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 5 + 4 + 4 + 2 + 4 + 3 + 2 + 4 + 1 + 2 + 2 + 1 = 50.$

Теперь считаем $n_1 = 20$ сгруппированных значений.

2) $X_{min} = 24$, $X_{max} = 51$;

Размах варьирования $R = X_{max} - X_{min} = 51 - 24 = 27$. ?

Число интервалов $k = 7$;

Длина интервала $d = \dfrac{27}{7} \approx 4.$

Составим интервальный статистический ряд относительных частот:

№ интервала	1	2	3	4	5	6	7
Интервалы	[24 – 28]	(28 – 32]	(32 – 36]	(36 – 40]	(40 – 44]	(44 – 48]	(48 – 52]
Относительные частоты $\frac{m_i}{n}$	$\frac{6}{50} = 0{,}12$	$\frac{7}{50} = 0{,}14$	$\frac{8}{50} = 0{,}16$	$\frac{10}{50} = 0{,}2$	$\frac{9}{50} = 0{,}18$	$\frac{5}{50} = 0{,}1$	$\frac{5}{50} = 0{,}1$

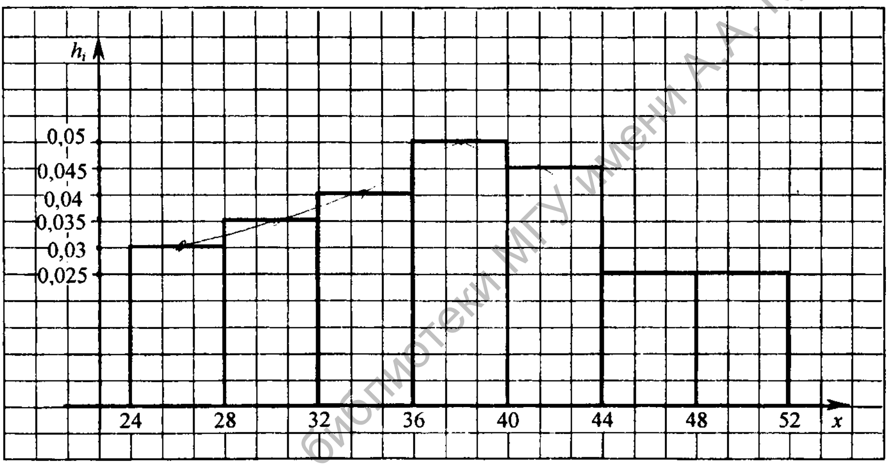
Проверяем $\sum \frac{m_i}{n} = 1$; $0{,}12 + 0{,}14 + 0{,}16 + 0{,}2 + 0{,}18 + 0{,}1 + 0{,}1 = 1.$

3) Строим гистограмму и полигон относительных частот.

Для гистограммы на интервалах строим прямоугольники высотой $h_i = \frac{m_i}{nd}$;

$$h_1 = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03;\ h_2 = \frac{0{,}14}{4} \approx 0{,}035;\ h_3 = \frac{0{,}16}{4} = 0{,}04;\ h_4 = \frac{0{,}2}{4} = 0{,}05$$

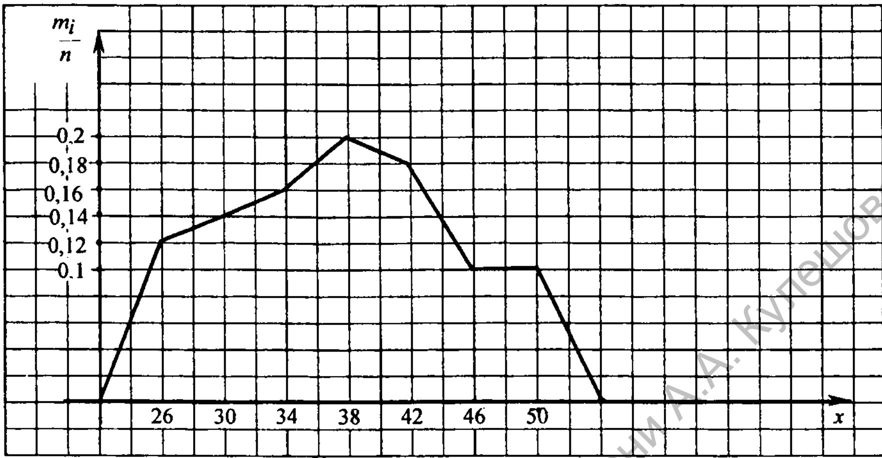
$$h_5 = \frac{0{,}18}{4} = 0{,}045;\ h_6 = \frac{0{,}1}{4} = 0{,}025;\ h_7 = \frac{0{,}1}{4} = 0{,}025.$$



Для полигона находим середины интервалов:

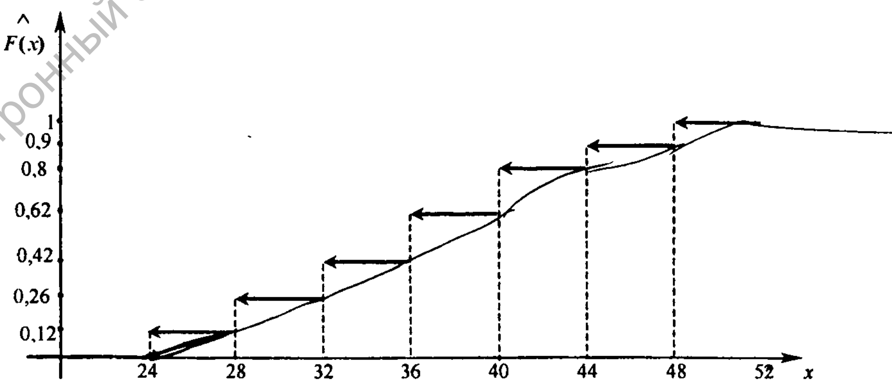
$$\overset{x_1}{a_1} = \frac{24+28}{2} = 26;\ \overset{x_2}{a_2} = \frac{28+32}{2} = 30;\ \overset{x_3}{a_3} = \frac{32+36}{2} = 34;\ a_4 = \frac{36+40}{2} = 38;$$

$a_5 = \frac{40+44}{2} = 42;\ a_6 = \frac{44+48}{2} = 46;\ a_7 = \frac{48+52}{2} = 50$ и соединяем ломаной точки с координатами $(a_i; \frac{m_i}{n})$, $i = \overline{1,7}$, где $\frac{m_i}{n}$ – относительные частоты:



4) Для построения графика эмпирической функции распределения составим таблицу:

Интервалы	[–∞; 24)	(24; 28]	(28; 32]	(32; 36]	(36; 40]	(40; 44]	(44; 48]	(48; 52]	(52; +∞]
Относительная частота $\frac{m_i}{n}$		0,12	0,14	0,16	0,2	0,18	0,1	0,1	0
Накопленная относительная частота	0	0,12	0,26 (= 0,12 + 0,14)	0,42 (= 0,26 + 0,16)	0,62 (= 0,42 + 0,2)	0,8 (= 0,62 + 0,18)	0,9 (= 0,8 + 0,1)	1 (= 0,9 + 0,1)	1 (= 1 + 0)



Эмпирическая функция распределения:

$$\hat{F}(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } & x\le 24 \\ 0{,}12 \text{ при } & 24<x\le 28 \\ 0{,}26 \text{ при } & 28<x\le 32 \\ 0{,}42 \text{ при } & 32<x\le 36 \\ 0{,}62 \text{ при } & 36<x\le 40 \\ 0{,}8 \text{ при } & 40<x\le 44 \\ 0{,}9 \text{ при } & 44<x\le 48 \\ 1 \text{ при } & x>48 \end{cases}$$

5) Находим $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7} x_i m_i$, где x_i – середина i-го интервала, m_i – его частота, $n = 50$ – объем выборки.

$$\bar{x}_в = \frac{1}{50}(26\cdot 6+30\cdot 7+34\cdot 8+38\cdot 10+42\cdot 9+46\cdot 5+50\cdot 5)=\frac{1876}{50}=37{,}52.$$

$$S_в^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{7}(a_i-\bar{X})^2 m_i=\frac{1}{50}((26-37{,}52)^2\cdot 6+(30-37{,}52)^2\cdot 7+$$

$$+(34-37{,}52)^2\cdot 8+(38-37{,}52)^2\cdot 10+(42-37{,}52)^2\cdot 9+(46-37{,}52)^2\cdot 5+$$

$$+(50-37{,}52)^2\cdot 5)=\frac{1}{50}(132{,}7104\cdot 6+56{,}5504\cdot 7+12{,}3904\cdot 8+0{,}2304\cdot 10+$$

$$+20{,}0704\cdot 9+71{,}9104\cdot 5+155{,}7504\cdot 5)=52{,}2496.$$

$$\sigma_в=\sqrt{S_в^2}=S_в=7{,}2284.$$

$$V_в=\frac{S_в}{\bar{x}_в}\cdot 100\,\% = 19{,}265\,\%.$$

6) Вид гистограммы и полигона относительных частот напоминает нормальную кривую (кривую Гаусса).

Можно предположить, что изучаемая случайная величина распределена по нормальному закону.

7) Найдем точечные оценки параметров a и σ нормального распределения методом моментов:

$$\hat{a}=\bar{x}_в=37{,}52$$

$$\hat{\sigma}=S_в=\sqrt{52{,}2496}=7{,}2284.$$

Следовательно, плотность вероятности предполагаемого нормального распределения имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{7{,}2284\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-37{,}52)^2}{2\cdot 52{,}2496}}.$$

Функция распределения предполагаемого нормального распределения:

$$F(x) = \frac{1}{7{,}2284\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(z-37{,}52)^2}{104{,}499}} dz.$$

8) Проведем проверку гипотезы о нормальном распределении СВ X с помощью критерия χ^2. Для этого интервалы наблюдаемых значений нормируем, т.е. находим по формуле $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_в}$.

Определим вероятность попадания в частичные интервалы $(x_{i-1}; x_i)$ по формуле $p_i = P(x_{i-1} < X < x_i) = \frac{1}{2}(\Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1}))$, где $\Phi(u_i) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{u_i} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Вероятность того, что СВ X попадает в первый частичный интервал $(-\infty; 28)$ равна $p_i = P(-\infty < X < 28) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{28-37{,}52}{7{,}2284}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-37{,}52}{7{,}2284}\right)\right) = \frac{1}{2}(\Phi(-1{,}317) -$

$- \Phi(-\infty)) = \frac{1}{2}(\Phi(\infty) - \Phi(1{,}317)) = \frac{1}{2}(1 - 0{,}8132) = 0{,}093$ и т. д.

Сведем вычисления, необходимые для определения наблюдаемого значения выборочной статистики χ^2 (хи-квадрат) в таблицу:

Интервалы СВ X	Частота m_i	p_i	np_i	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
[24; 28]	6	0,093	4,65	1,8225	0,3919
(28; 32]	7	0,13	6,5	0,25	0,0385
(32; 36]	8	0,193	9,65	2,725	0,2824
(36; 40]	10	0,22	11	1	0,0909
(40; 44]	9	0,18	9	0	0
(44; 48]	5	0,111	5,55	0,3025	0,0545
(48; 52]	5	0,073	3,65	1,8225	0,4992
$\sum$	50	1	50		$\chi^2_{набл.} = 1{,}3574$

По таблице распределения χ^2, по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и по числу степеней свободы $\nu = k - r - 1$ (k – число интервалов, r – число параметров предполагаемого распределения) $\nu = 7 - 2 - 1 = 4$ находим:

$$\chi^2_{0,05;4} = 9{,}49.$$

Так как $\chi^2_{набл.} = 1{,}3574 < 9{,}49$, то нет основания для отклонения гипотезы о нормальном распределении СВ X.

9) Для вычисления доверительного интервала, покрывающего математическое ожидание СВ X по заданной надежности $p = 1 - \alpha = 0{,}95$ и числу степеней свободы $\nu = n - 1 = 50 - 1 = 49$ определим по таблицам t-распределения:

$t_{\frac{\alpha}{2},\nu} = t_{0,025;49} = 2.$

Предельная погрешность $\Delta = t_{\frac{\alpha}{2},\nu} \cdot \dfrac{S_в}{\sqrt{n-1}} = \dfrac{2 \cdot 7{,}2284}{\sqrt{50-1}} = \dfrac{14{,}4568}{7} = 2{,}065.$

Искомый доверительный интервал:

$$\overline{X} - \Delta < a < \overline{X} + \Delta$$
$$37{,}52 - 2{,}065 < a < 37{,}52 + 2{,}065$$
$$a_1 = 35{,}455 < a < 39{,}585 = a_2.$$

Находим доверительный интервал, накрывающий неизвестное σ с заданной точностью $p = 1 - \alpha = 0{,}95$ и числу степеней свободы $\nu = n - 1 = 50 - 1 = 49$. Для этого по таблицам распределения χ^2 найдем два числа γ_1 и γ_2: $\gamma_1 = 0{,}836$; $\gamma_2 = 1{,}245$ и искомый доверительный интервал:

$$\gamma_1 \cdot S_в < \sigma < \gamma_1 \cdot S_в;$$
$$0{,}836 \cdot \cancel{19{,}202}\ 7{,}228 < \sigma < 1{,}245 \cdot \cancel{19{,}202}\ 7{,}2284$$
$$16{,}053 < \sigma < 23{,}906$$
$$S_1 = \cancel{16{,}053}\ 6{,}042;\ S_2 = \cancel{23{,}906}\ 8{,}995$$

H_0: $a_0 = 39{,}585\ (= a_2)$

H_1: $a_2 < a_0$

Вычислим $t_{набл.} = \dfrac{\bar{x} - a_0}{S_в}\sqrt{n-1} = \dfrac{37{,}52 - 39{,}585}{7{,}2284}\sqrt{50-1} = -1{,}9997.$

По виду альтернативной гипотезы применяем правосторонний t-критерий, т.е. критическая точка $t_{\alpha;n-1}$ находится из условия $P(t > t_{\alpha;n-1}) = \alpha$.

$t_{0,05;49} = 1{,}677$

т. к. $t_{набл.} = -1{,}9997 < 1{,}677 = t_{0,05;49}$, то нет основания для отклонения нулевой гипотезы с вероятностью доверия 95 %.

11) $\sigma_в^2 = S_в^2 = S_1^2 = 257{,}699 = (16{,}053)^2$.

Проверим гипотезу: H_0: $\sigma = 16{,}053$ против альтернативной гипотезы H_1: $\sigma \neq 16{,}053$ по виду альтернативной гипотезы критическая область двусторонняя. По таблицам χ^2-распределения по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и $\nu = n - 1 = 50 - 1 = 49$ степеням свободы находим $\chi^2_{0,025;49} = 71{,}32$ и $\chi^2_{1-0,025;49} = 40{,}48$.

Вычислим $\chi^2_{набл.} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{50} (x_i - \overline{X})^2 m_i = \frac{1}{257{,}699}((24 - 37{,}52)^2 \cdot 1 +$

$+ (25 - 37{,}52)^2 \cdot 2 + (26 - 37{,}52)^2 \cdot 2 + (28 - 37{,}52)^2 \cdot 1 + (29 - 37{,}52)^2 \cdot 2 +$
$+ (31 - 37{,}52)^2 \cdot 2 + (32 - 37{,}52)^2 \cdot 3 + (35 - 37{,}52)^2 \cdot 5 + (37 - 37{,}52)^2 \cdot 4 +$
$+ (38 - 37{,}52)^2 \cdot 4 + (40 - 37{,}52)^2 \cdot 2 + (41 - 37{,}52)^2 \cdot 4 + (43 - 37{,}52)^2 \cdot 3 +$
$+ (44 - 37{,}52)^2 \cdot 2 + (46 - 37{,}52)^2 \cdot 4 + (47 - 37{,}52)^2 \cdot 1 + (49 - 37{,}52)^2 \cdot 2 +$
$+ (49 - 37{,}52)^2 \cdot 2 + (50 - 37{,}52)^2 \cdot 2 + (51 - 37{,}52)^2 \cdot 1) = 10{,}1436$

(значения взяты из п. 1).

$\chi^2_{набл.} = 10{,}1436 < \chi^2_{0,025;49} = \overset{71,32}{\cancel{32{,}9}}$ и $\chi^2_{набл.} = 10{,}1436 < \chi^2_{1-0,025;49} = 40{,}48$.

Следовательно, нулевая гипотеза отклоняется в пользу альтернативной.

Задача 5а. Банк обслуживает N вкладчиков. Для определения средней суммы вкладов в банке произведено обследование n вкладов. По данным бесповторной выборки найти доверительный интервал для генерального среднего, который можно было бы гарантировать с точностью до p %.

Сумма вклада тыс.усл.ед.	8 – 28	28 – 48	48 – 68	68 – 88	88 – 108	108 – 128
Число вкладов	2	3	9	27	63	7

$$p\ \% = 93\ \%$$

Решение 5а. Найдем выборочное среднее $\overline{x}_в$ и выборочную дисперсию $S_в^2$. Для этого в качестве значения СВ X возьмем середины интервалов:

$x_1 = \frac{8+28}{2} = 18;\ x_2 = 38;\ x_3 = 58;\ x_4 = 78;\ x_5 = 98;\ x_6 = 118;$

$n = 2 + 3 + 9 + 27 + 63 + 7 = 111.$

$$\bar{x}_в = \frac{1}{111}(18 \cdot 2 + 38 \cdot 3 + 58 \cdot 9 + 78 \cdot 27 + 98 \cdot 63 + 118 \cdot 7) = \frac{1}{111}(36 + 114 +$$

$$+ 522 + 2106 + 6174 + 826) = \frac{9778}{111} \approx 88{,}09.$$

$$S_в^2 = \sigma_в^2 = \frac{1}{111}((18 - 88{,}09)^2 \cdot 2 + (38 - 88{,}09)^2 \cdot 3 + (58 - 88{,}09)^2 \cdot 9 + (78 -$$

$$- 88{,}09)^2 \cdot 27 + (98 - 88{,}09)^2 \cdot 63 + (118 - 88{,}09)^2 \cdot 7) = 368{,}702;$$

$$S_в^2 = \sqrt{S_в^2} = 19{,}202.$$

Вычислим среднюю ошибку выборки:

$$\varepsilon = \frac{S_в}{\sqrt{n-1}}\sqrt{1 - \frac{n}{N}} = \frac{19{,}202}{\sqrt{111-1}} \cdot \sqrt{1 - \frac{111}{2200}} = 1{,}784.$$

Предельная погрешность $\Delta = t \cdot \varepsilon$, где t находим по приложению значений функции $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, где по условию $\Phi(t) = 0{,}93$ (т. к. процент надежности $p\,\% = 93\,\%$) $t = 1{,}812$.

Предельная погрешность $\Delta = t \cdot \varepsilon = 1{,}812 \cdot 1{,}784 = 3{,}23$. Доверительные границы для генерального среднего будут:

$$\bar{x}_в - \Delta < \bar{X} < \bar{x}_в + \Delta$$

$$88{,}09 - 3{,}23 < \bar{X} < 88{,}09 + 3{,}23$$

$$84{,}86 < \bar{X} < 91{,}32$$

Задача 6а. Даны распределения 100 фирм по производственным средствам X (млн. руб.) и суточной выработке Y (т). Известно, что между случайными величинами существует линейная корреляционная зависимость. По заданной корреляционной таблице определить:

1) Числовые характеристики случайных величин X и Y;
2) Коэффициент корреляции r;
3) Уравнение прямой регрессии Y на X;
4) Построить корреляционное поле и график уравнения регрессии Y на X;
5) Отклонения между теоретическими значениями $\overline{Y_X}$ и экспериментальными $\overline{Y_x}$.

6.a X \ Y	10–30	30–50	50–70	70–90	90–110	110–130	130–150	150–170	m_X
0,5–1,5	2	7	3						12
1,5–2,5		6	4	5					15
2,5–3,5			8	9	7				24
3,5–4,5				7	14	5			26
4,5–5,5					5	7	4		16
5,5–6,5							4	3	7
m_Y	2	13	15	21	26	12	8	3	100

Решение 6а. Для случайных величин X и Y в качестве значений берем середины интервалов:

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6;$

$y_1 = 20, y_2 = 40, y_3 = 60, y_4 = 80, y_5 = 100, y_6 = 120, y_7 = 140, y_8 = 160.$

1) Среднее арифметическое СВ X И СВ Y:

$$\overline{X} = \frac{1}{100}(1 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 24 + 4 \cdot 26 + 5 \cdot 16 + 6 \cdot 7) = 3{,}4;$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{100}(20 \cdot 2 + 40 \cdot 13 + 60 \cdot 15 + 80 \cdot 21 + 100 \cdot 26 + 120 \cdot 12 + 140 \cdot 8 +$$
$$+ 160 \cdot 3) = 87{,}80.$$

Среднее арифметическое квадратов случайных величин X^2 и Y^2:

$$\overline{X^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{6} x_i^2 m_i = \frac{1}{100}(1^2 \cdot 12 + 2^2 \cdot 15 + 3^2 \cdot 24 + 4^2 \cdot 26 + 5^2 \cdot 16 + 6^2 \cdot 7) =$$

$$= \frac{1}{100}(12 + 60 + 216 + 416 + 400 + 252) = 13{,}56;$$

$$\overline{Y^2} = \frac{1}{100}(20^2 \cdot 2 + 40^2 \cdot 13 + 60^2 \cdot 15 + 80^2 \cdot 21 + 100^2 \cdot 26 + 120^2 \cdot 12 + 140^2 \cdot 8 +$$
$$+ 160^2 \cdot 3) = 8764;$$

$$\overline{XY} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{6} x_i \sum_{j=1}^{8} y_j m_{ij} = \frac{1}{100}(1 \cdot 20 \cdot 2 + 1 \cdot 40 \cdot 7 + 1 \cdot 60 \cdot 3 + 2 \cdot 40 \cdot 6 +$$

$$+ 2 \cdot 60 \cdot 4 + 2 \cdot 80 \cdot 5 + 3 \cdot 60 \cdot 8 + 3 \cdot 80 \cdot 9 + 3 \cdot 100 \cdot 7 + 4 \cdot 80 \cdot 7 + 4 \cdot 100 \cdot 14 +$$

$+4\cdot120\cdot5+5\cdot100\cdot5+5\cdot120\cdot7+5\cdot140\cdot4+6\cdot140\cdot4+6\cdot160\cdot3)=\frac{1}{100}(40+$
$+280+180+480+480+800+1440+2160+2100+2240+5600+2400+2500+$
$+4200+2800+3360+2880)=314{,}65;$

$$\sigma_x^2=\overline{X^2}-(\overline{X})^2=13{,}56-3{,}4^2=2;\ \sigma_x=1{,}41;$$

$$\sigma_y^2=\overline{Y^2}-(\overline{Y})^2=8764{,}21-83^2=1055{,}16;\ \sigma_y=32{,}48.$$

Отсюда находим:

$$r=\frac{\overline{XY}-\overline{X}\cdot\overline{Y}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\frac{314{,}65-298{,}52}{1{,}41\cdot32{,}48}=\frac{16{,}3}{45{,}797}=0{,}356;$$

$$\rho_{\frac{Y}{X}}=\frac{\overline{XY}-\overline{X}\cdot\overline{Y}}{\sigma_X^2}=\frac{16{,}3}{2}=8{,}15;$$

$$\rho_{\frac{X}{Y}}=\frac{\overline{XY}-\overline{X}\cdot\overline{Y}}{\sigma_Y^2}=\frac{16{,}3}{1055{,}16}=0{,}0154.$$

Уравнение регрессии Y на X находим в виде $\overline{y}_x=ax+b$. Для нахождения a и b решаем систему уравнений:

$$\begin{cases}a\overline{X^2}+b\overline{X}=\overline{XY}\\ a\overline{X}+b=\overline{Y}\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}13{,}56a+3{,}4b=314{,}65\\ 3{,}4a+b\qquad\ =87{,}80\end{cases}.$$

Откуда $a = 8{,}065$, $b = 60{,}379$;

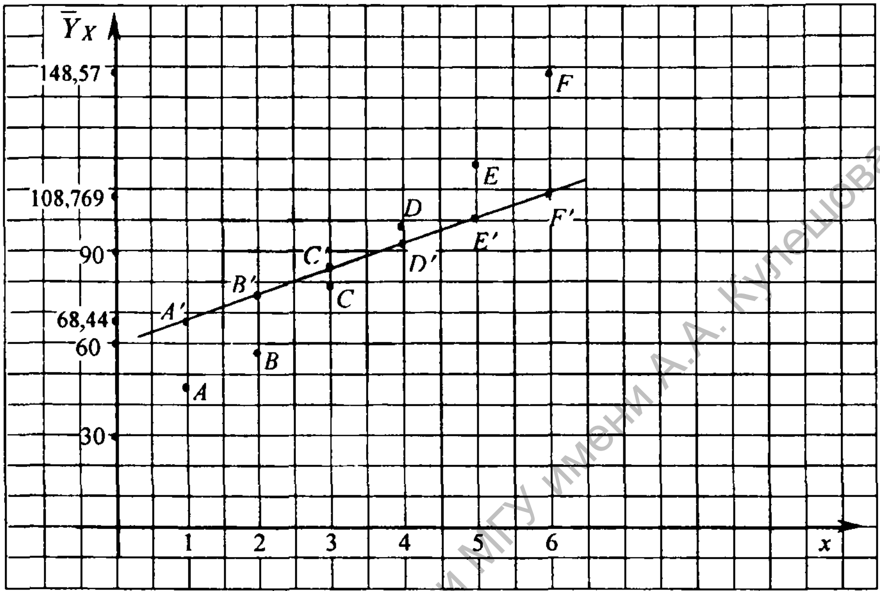
$\overline{Y}_x = 8{,}065x + 60{,}379.$

Уравнение прямой регрессии X на Y находим по формуле:

$$\overline{X}_Y-\overline{X}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_Y}(y-\overline{Y}),\ \text{откуда}\ \overline{X}_Y=-3{,}4=0{,}356\cdot\frac{1{,}41}{32{,}48}(y-87{,}80)\ \text{или}$$

$\overline{X}_Y=0{,}015y+2{,}043.$

По данным таблицы условия задачи строим корреляционное поле и прямую регрессии $\overline{Y}_x=8{,}065x+60{,}379$:



Точки на прямой имеют координаты:

$A'(1; 68{,}44)$; $B'(2; 76{,}509)$; $C'(3; 84{,}57)$;
$D'(4; 92{,}639)$; $E'(5; 100{,}70)$; $F'(6; 108{,}769)$

Соответствующие точки статистических данных:

$A(1; ((20 \cdot 2 + 40 \cdot 7 + 60 \cdot 3) / 12) = (1; 46{,}(6))$;

$B(2; (\frac{1}{15}(40 \cdot 6 + 60 \cdot 4 + 80 \cdot 5)) = (2; 58{,}(6))$;

$C(3; (\frac{1}{24}(60 \cdot 8 + 80 \cdot 9 + 100 \cdot 7)) = (3; 79{,}1(6))$;

$D(4; (\frac{1}{26}(80 \cdot 7 + 100 \cdot 14 + 120 \cdot 5)) = (4; 98{,}46)$;

$E(5; (\frac{1}{16}(100 \cdot 5 + 120 \cdot 7 + 140 \cdot 4)) = (5; 118{,}75)$;

$F(6; (\frac{1}{7}(140 \cdot 4 + 160 \cdot 3)) = (6; 148{,}57)$.

Отклонения между теоретическими значениями $\overline{Y}_x$ и экспериментальными $\overline{y}_x$ составили: 68,44 – 46,(6) = 21,77; 17,843; 5,4034; –5,821; –18,05; –39,80.

Задача 7а. В течение пяти лет использовались три различные технологии по изготовлению продукции. Необходимо установить влияние различных технологий на продуктивность по данным таблицы:

2.а год	Технология (фактор *A*)		
	A_1	A_2	A_3
1	0,7	0,9	1,3
2	0,8	0,8	0,9
3	1,3	0,9	1,2
4	1,2	1,1	1,5
5	0,8	0,8	1,3

Решение 7а. Находим остаточную $S^2_{\text{ост}}$ и межфакторную $S^2_{\text{А}}$ дисперсию по формулам:

$$S^2_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{X}_i)^2; \qquad S^2_{\text{А}} = \sum_{i=1}^{k}(\overline{X}_i - \overline{X})^2 n_i, \text{ где}$$

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}; \ \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}; \ n = \sum_{i=1}^{k} n_i, \ n = 15 \text{ – число наблюдений,}$$

$n_i = 5$ – количество наблюдений по i-ому фактору; $k = 3$ – количество факторов.

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{5}(0,7 + 0,8 + 1,3 + 1,2 + 0,8) = 0,96;$$

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{5}(0,9 + 0,8 + 0,9 + 1,1 + 0,8) = 0,9;$$

$$\overline{X}_3 = \frac{1}{5}(1,3 + 0,9 + 1,2 + 1,5 + 1,3) = 1,24;$$

$$\overline{X} = \frac{1}{3}(\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \overline{X}_3) = 1,0(3).$$

$$S^2_{\text{ост}} = ((0{,}7 - 0{,}96)^2 + (0{,}8 - 0{,}96)^2 + (1{,}3 - 0{,}96)^2 + (0{,}8 - 0{,}96)^2) + ((0{,}9 - 0{,}9)^2 + (0{,}8 - 0{,}9)^2 + (0{,}9 - 0{,}9)^2 + (1{,}1 - 0{,}9)^2 + (0{,}8 - 0{,}9)^2) + ((1{,}3 - 1{,}24)^2 + (1{,}2 - 1{,}24)^2 + (1{,}5 - 1{,}24)^2 + (1{,}3 - 1{,}24)^2) = 0{,}0676 + 0{,}0256 + 0{,}1156 + 0{,}0576 + 0{,}0256) + (0 + 0{,}01 + 0 + 0{,}04 + 0{,}01) + (0{,}0036 + 0{,}1156 + 0{,}0016 + 0{,}0676 + 0{,}0036) = 0{,}54;$$

$$S^2_{\text{А}} = (0{,}96 - 1{,}0(3))^2 \cdot 5 + (0{,}9 - 1{,}0(3))^2 \cdot 5 + (1{,}24 - 1{,}0(3))^2 \cdot 5 = 0{,}0269 + 0{,}0888 + 0{,}2142 = 0{,}33.$$

Общая дисперсия выборки:

$$S^2_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \overline{X})^2 = (0{,}7 - 1{,}0(3))^2 + 4 \cdot (0{,}8 - 1{,}0(3))^2 + 3 \cdot (1{,}3 - 1{,}0(3))^2 + 2 \cdot (1{,}2 - 1{,}0(3))^2 + (0{,}9 - 1{,}0(3))^2 \cdot 3 + (1{,}1 - 1{,}0(3))^2 + (1{,}5 - 1{,}0(3))^2 = 0{,}1109 + 4 \cdot 0{,}0543 + 3 \cdot 0{,}0713 + 2 \cdot 0{,}0279 + 3 \cdot 0{,}0177 + 0{,}0045 + 0{,}2178 = 0{,}1109 + 0{,}2172 + 0{,}2139 + 0{,}0558 + 0{,}0531 + 0{,}0045 + 0{,}2181 \approx 0{,}87.$$

Строим статистику:

$$F = \frac{\frac{1}{k-1} \cdot S^2_{\text{А}}}{\frac{1}{n-k} \cdot S^2_{\text{ост}}} = \frac{\frac{1}{3-1} \cdot 0{,}3299}{\frac{1}{15-3} \cdot 0{,}542} = 3{,}649.$$

По распределению Фишера-Снедекора с $\nu_1 = k - 1 = 3 - 1 = 2$ и $\nu_2 = n - 1 = 15 - 1 = 14$ степенями свободы определяем для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ критическое значение $F_{0{,}05;2;14} = 3{,}739$. Расчетное значение $3{,}649 < 3{,}739$, поэтому нет оснований для отклонения нулевой гипотезы H_0 о равенстве продуктивности при различных технологиях.

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}01$: $F_{0{,}01;2;14} = 6{,}514$ и $F_{\text{наблюдаемое}} = 3{,}649 < 3{,}514$, поэтому и здесь нет основания для отклонения нулевой гипотезы H_0. Это можно было и утвердить по причине того, что с уменьшением уровня значимости снижается чувствительность критерия.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЫБОР КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1

ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ТИТУЛЬНОГО ЛИСТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1

ЛИТЕРАТУРА 1

ПРОГРАММА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ 2

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ 4

ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ 13

Учебное издание

Сазонова Алла Михайловна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Контрольные задания
и методические указания к ним

Технический редактор А. Н.Гладун
Компьютерная верстка В. С.Малявко
Корректор И.Г.Коржова

ЛВ № 384 от 07.02.2001
Сдано в набор 12.01.2002. Подписано в печать 6.09.02. Формат 60x84 $^1/_{16}$
Бумага офсетная № 1. Гарнитура Times New Roman.
Усл.-печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,1. Тираж 130 экз. Заказ №280.

Учреждение образования "Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1

Напечатано на ризографе лаборатории оперативной полиграфии
МГУ им. А. А. Кулешова, ЛП № 281 от 07.02.2001
212022, Могилев, Космонавтов, 1