Могилевский областной институт повышения квалификации и переподготовки руководящих работников и специалистов образования

А. М. Сазонова

Сложные проценты

(текстовые задачи)

Могилев. 2003

Печатается по решению редакционно-издательского
Совета МОИПК и ПРР и СО.

Рецензенты: **В. Н. Борбат** – кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры алгебры и геометрии
МГУ им.А.А.Кулешова.

Л. М. Родина – учитель математики высшей категории,
завуч СШ № 43 г. Могилева.

А. М. Сазонова
Сложные проценты (текстовые задачи). – Могилев: ИПК и ПРР и СО,
2003.-18с.

Данное методическое пособие адресовано учителям, школьникам и абитуриентам ВУЗов.

С различными математическими идеями на примерах рассматривается правило начисления «сложных процентов». Большинство задач имеют экономическое содержание, значительная часть которых взята из письменных экзаменационных работ вступительных экзаменов в ВУЗы Беларуси и России.

В теории процентов правило начисления "простых процентов" состоит в том, что изменения некоторой величины на определенное число процентов происходит от значения, которое эта величина имела на исходном (начальном) этапе.

Пусть некоторая величина A, исходное значение которой равно A_0, в конце каждого этапа изменяется на одно и тоже постоянное число процентов р ($p>0$, если величина растет; $p<0$, если величина убывает).

В конце первого этапа значение A_1 величины A равно:

$$A_1 = A_0 + \frac{p}{100}A_0 = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

В конце второго этапа значение A_2 величины A равно:

$$A_2 = A_0 + 2\frac{p}{100}A_0 = A_0\left(1+2\frac{p}{100}\right)$$

В конце третьего этапа значение A_3 величины A равно:

$$A_3 = A_0 + 3\frac{p}{100}A_0 = A_0\left(1+3\frac{p}{100}\right) \qquad \text{и т д.}$$

В конце n-го этапа, значение A_n, очевидно, величины A определится формулой:

$$A_n = A_0 + n\frac{p}{100}A_0 = A_0\left(1+n\frac{p}{100}\right) \qquad (1)$$

Формула (1) показывает, что значение величины A растет (или убывает, если $p<0$) как арифметическая прогрессия, первый член которой равен A_0, а разностью прогрессии служит величина $\frac{p}{100}A_0$.

Перейдем к рассмотрению "сложных процентов".

Правило начисления "сложных процентов" ориентируется на поэтапное изменение некоторой величины, т.е. изменение составляет определенное число процентов от значения, которое эта величина имела на предыдущем этапе.

1 случай. В конце каждого этапа величина A, имеющая начальное значение A_0, подвергается изменению (скачкообразно) на одно и то же постоянное число p процентов.

В конце первого этапа значение A_1 величины A равно:

$$A_1 = A_0 + \frac{p}{100}A_0 = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

В конце второго этапа значение A_2 величины A равно:

$$A_2 = A_1 + \frac{p}{100}A_1 = A_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$$

В конце третьего этапа значение A_3 величины A равно:

$$A_3 = A_2 + \frac{p}{100}A_2 = A_2\left(1+\frac{p}{100}\right) = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 \quad \text{и т.д.}$$

Очевидно, что в конце n-го этапа значение A_n величины A вычисляется по формуле:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \qquad (2)$$

Формула (2) показывает, что значение величины A растет (или убывает, если $p<0$) как геометрическая прогрессия с первым членом A_0 и знаменателем $1+\frac{p}{100}$

2 случай. Величина A испытывает изменения за этап на p процентов непрерывно, а не скачкообразно.

Нетрудно понять, что начисление процентов можно производить не один раз в течение каждого этапа, а k раз (через равные промежутки) из расчета $p\%$ за этап, т.е. каждый раз начислять по $\frac{p}{k}\%$. Тогда за n этапов начисление процентов произойдет kn раз. Учитывая (2), значение $A_n(k)$ величины A в конце n-го этапа вычисляется по формуле:

$$A_n(k) = A_0\left(1+\frac{p}{k\cdot 100}\right)^{kn} \qquad (3)$$

Для факультатива, для знатоков формулу (3) можно рассмотреть и в предельном случае, когда $k \to \infty$ т.е. в конце n-го этапа

$$A_n = \lim_{k\to\infty}\left(A_0\left(1+\frac{p}{k\cdot 100}\right)^{kn}\right)$$

Используя замечательный предел математики

$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 2{,}718281828...$ (число служит основанием натурального логарифма), имеем $A_n = \lim_{k\to\infty}\left(A_0\left(1+\frac{p}{k100}\right)^{kn}\right) = A_0 \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{p}{k100}\right)^{\frac{100k}{p}}\right)^{\frac{p}{100}n} = A_0\cdot e^{\frac{pn}{100}}$. (4)

Функция $A_n = A_0 e^{\frac{pn}{100}}$ является показательной и называется экспонентой.

Случай 3. Величина A претерпевает разные изменения на каждом последующем этапе. В конце первого этапа величина A изменяется на p_1 процентов, в конце второго этапа - на $p_2\%$, в конце третьего этапа - на $p_3\%$, … , в конце n-го этапа - на $p_n\%$ (если $p_i>0$, то на i-том этапе величина возрастает, если $p_i<0$, то на i-том этапе величина убывает).

Нетрудно понять, что в конце n-го этапа величина A (с начальным значением A_0) примет значение

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\left(1+\frac{p_3}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right) \qquad (5)$$

Случай 4. Величина A претерпевает разные изменения на различных по длительности этапах: в конце первого этапа длительностью m_1 промежутков величина A изменяется на $p_1\%$ на каждом из промежутков, затем в конце второго этапа в m_2 промежутков изменение величины A на каждом из этих промежутков происходит на $p_2\%$, … , затем в конце n-го этапа в m_k промежутков происходит на $p_n\%$. В конце n-го этапа значение A_n величины A (с начальным значением A_0) вычисляется по формуле:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^{m_1}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^{m_2}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)^{m_k} \qquad (6)$$

Формула (6) является обобщением всех предыдущих случаев. Раскроем понятие "средний процент прироста" - это такой воображаемый постоянный процент прироста q, который за n этапов давал бы такое за изменение величины A, какое она получила по условию задачи (реально), т.е.

$$A_0\left(1+\frac{q}{100}\right)^n = A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^{m_1}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^{m_2}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)^{m_k}, \quad \text{или}$$

$$(7)\ \left(1+\frac{q}{100}\right)^n = A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^{m_1}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^{m_2}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)^{m_k}, \quad \text{откуда}$$

$$q = 100\left(\sqrt[n]{\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^{m_1}\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^{m_2}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)^{mk}}-1\right) \qquad (7)$$

Обратим внимание, что средний процент прироста не является средним арифметическим промежуточных процентов прироста $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Замечание. Выведенные формулы (1)-(7) не являются программными базовой школы, но при необходимости, могут быть получены в ходе решения непосредственно (см., например, задачи № 4, 5, 9).

Задача 1. Белпромстройбанк начисляет 12% годовых на валютный вклад по окончании каждого года, прибавляя начисленную сумму к вкладу. Какую сумму получит вкладчик, вложивший 10000 долларов через 3 года?

Решение. Так как процентная годовая ставка (12%) банка не меняется по условию задачи, то воспользуемся формулой (2)

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n, \qquad \text{где} \qquad n=3, \qquad p=12, \qquad A_0=10000.$$

$A_3=10000(1+12/100)^3=12544.$

Ответ: 12 544 доллара.

Задача 2. Технология изготовления дискет состоит из четырех этапов, на каждом из которых содержание кремния увеличивается на определенное количество процентов по отношению к результату предыдущего этапа: на первом этапе - на 25%, на втором - на 20%, на третьем - на 10%, а на четвертом - на 8%. На сколько процентов увеличится в результате содержание кремния?

Решение. В данной задаче мы имеем ситуацию случая 3, т.е. можно воспользоваться формулой (5)

$A_4 = A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_3}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_4}{100}\right)$ - содержание кремния после четвертого этапа, где A_0 - начальное содержание кремния; p_1, p_2, p_3, p_4 - процентное увеличение содержания кремния после первого, второго, третьего и четвертого этапов соответственно. Надо найти значение выражения

$$x = \frac{A_0\left(1+\frac{25}{100}\right)\left(1+\frac{20}{100}\right)\left(1+\frac{10}{100}\right)\left(1+\frac{8}{100}\right)-A_0}{A_0}100\%;$$

x=((1+0,25(1+0,2)(1+0,1)(1+0,08)-1)·100%=78,2%

Ответ: 78,2%.

Задача 3. Население города по статистике ежегодно увеличивается на 3% от наличного числа. Через сколько лет население утроится?

Решение. Пусть A_0 - начальное количество населения города, тогда через n лет численность города составит $A_n = A_0\left(1+\frac{3}{100}\right)^n$, что по условию не меньше $3A_0$. Надо найти наименьшее натуральное значение n, при котором выполняется неравенство $A_0\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \geq 3A_0$, тогда $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \geq 3$, т.к. $A_0 > 0$ по условию задачи. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 1,03, получим $n \geq \log_{1,03} 3$ наименьшее значение $n = [\log_{1,03} 3]+1$ т.е. целая часть значения $\log_{1,03}3$ и плюс 1. n=37+1=38

Ответ: 38 лет.

Задача 4. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул 3/4 от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Решение. Обозначим A_0 - полученный кредит, p % - процент годовой ставки банка, тогда через год фермер должен банку $A_0(1+0,01p)$,

$3/4\ A_0(1+0,01p)$ - отдал фермер банку, долг составил $1/4\ A_0(1+0,01p)$, а еще через год долг составил $1/4\ A_0(1+0,01p)(1+0,01p)$, что по условию задачи равно $1,21A_0$ (т.е. 100% + 21% от полученного кредита A_0).

Итак, имеем : $\frac{1}{4}A_0(1+0{,}01p)^2 = 1{,}21A_0$

$(1+0{,}01p)^2=1{,}21\cdot 4$, т.к. $1+0{,}01p>0$, то $1+0{,}01p=1{,}1\cdot 2$, откуда p=120

Ответ: 120%

Задача 5. Кооператив купил на некоторую сумму товара и продал его с наценкой в 100 рублей. На вырученные деньги кооператив купил новый товар и продал его с наценкой за 1210 рублей, сделав на этот товар столько же процентов наценки, как и в первый раз. Какова стоимость покупки в первый раз и каков процент наценки?

Решение. Пусть на x рублей кооператив купил товар, а продал за $(x+100)$ рублей. Процент наценки составляет $\frac{100}{x}\cdot 100\% = \frac{10^4}{x}\%$

Теперь у кооператива $(x+100)$ рублей, на которые он купил товар, а продал его с той же процентной наценкой и получил $(x+100)+(x+100)\frac{100}{x}$, что по условию составляет 1210 рублей.

Имеем уравнение $(x+100)+(x+100)\frac{100}{x}=1210$, откуда x_1=1000 и наценка $\frac{10^4}{x_1}\% = 10\%$, x_2=10 и наценка составляет $\frac{10^4}{x_2}\% = 1000\%$

Ответ: 1000 рублей и 10% или 10 рублей и 1000%.

Задача 6. Объем товарооборота магазина A составляет 0,64 товарооборота магазина B. в течение двух лет годовой процент прироста объема товарооборота в магазине A был на 40% больше годового процента прироста объема товарооборота магазина B. через два года объемы товарооборота этих магазинов стали одинаковыми. Определите годовой процент прироста объема товарооборота магазина B.

Решение. Пусть a - объем товарооборота магазина B, тогда $0{,}64a$ - объем товарооборота магазина A.

x % - годовой процент прироста магазина B, тогда $(x+40)\%$ - годовой процент прироста магазина A.

Через два года объем товарооборота магазина A составил $0{,}64a\left(1+\frac{x+40}{100}\right)^2$, а магазина B - $a\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$, по условию они равны. Имеем уравнение

$0{,}64a\left(1+\frac{x+40}{100}\right)^2 = a\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$, т.к. по смыслу задачи $1+\frac{x}{100}>0$, x>0, то уравнение равносильно $0{,}8\left(1+\frac{x+40}{100}\right)=1+\frac{x}{100}$, откуда x=60.

Ответ: 60%.

Задача 7. Выработка продукции за год работы фирмы возросла на 25%. На следующий год в связи с экономическим кризисом упала на 22,24%, а в последующий год вновь увеличилась на 20%. Определите средний ежегодный прирост продукции за этот период.

Решение. Обозначим через $q\%$ средний ежегодный прирост продукции, тогда используя формулу (7), имеем

$$\left(1+\frac{25}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{22,24}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)=\left(1+\frac{q}{100}\right)^3, \quad \text{тогда } 1,1664=\left(1+\frac{q}{100}\right)^3 \quad \text{или}$$

$$q=100\left(\sqrt[3]{1,1664}-1\right)=100(1,08-1)=8$$

Ответ: 8%.

Решение текстовых задач на сложные проценты часто актуализирует математические идеи геометрической прогрессии, делимости чисел, переобозначения, исследования величин, использование оценок, перебор возможных вариантов. Проиллюстрируем это в следующих задачах.

Задача 8. Во время первой инъекции пациенту было введено 6 мл лекарства, а во время каждой следующей - еще по 4 мл. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшалось на 80%. Сколько лекарства содержалось в организме пациента непосредственно после 30-й инъекции.

Решение. Непосредственно после второй инъекции в организме пациента содержалось лекарства $6(1-0,8)+4=6\frac{1}{5}+4$, где $1-0,8=0,2=\frac{1}{5}$

Непосредственно после третьей инъекции - $(6(1-0,8)+4)(1-0,8)+4=\left(6\cdot\frac{1}{5}+4\right)\cdot\frac{1}{5}+4$ и т.д., непосредственно после тридцатой инъекции - $\left(\ldots\left(\left(6\cdot\frac{1}{5}+4\right)\cdot\frac{1}{5}+4\right)\cdot\frac{1}{5}+\ldots+4\right)=x$. Откуда выделим 30 членов геометрической прогрессии со знаменателем 1/5.

$$x=6\cdot\frac{1}{5^{29}}+\frac{4}{5^{28}}+\frac{4}{5^{27}}+\ldots+\frac{4}{5}+4=\frac{2}{5^{29}}+4\left(1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^{28}}+\frac{1}{5^{29}}\right)=\frac{2}{5^{29}}+4\cdot\frac{1\left(1-\frac{1}{5^{30}}\right)}{1-\frac{1}{5}}=$$

$$=\frac{2}{5^{29}}+5-\frac{1}{5^{29}}=5+\frac{1}{5^{29}}$$

Ответ: $5+\frac{1}{5^{29}}$ (мл)

Задача 9. В первый год разработки месторождения было добыто 100 тысяч тонн железной руды. В течение нескольких следующих лет годовая добыча руды увеличивалась на 25% по сравнению с каждым предшествующим годом, а затем на протяжении последующих трех лет поддерживалась на достигнутом уровне. Общий объем добытой руды за все время добычи составил 850 тысяч тонн. Сколько лет разрабатывалось месторождение?

Решение. Добыча руды составила:

В первый год	100 тыс.т.
Во второй год	100(1+0,25) тыс.т.
В третий год	$100(1+0,25)^2$ тыс.т. и т.д.
В n-ый год	$100(1+0,25)^{n-1}$ тыс.т.
В три последних года	$3\cdot100(1+0,25)^{n-1}$ тыс.т.

За все время разработки добыча (в тысячах тонн) составила:

$$100+100(1+0,25)+100(1+0,25)^2+\ldots+100(1+0,25)^{n-1}+3\cdot100(1+0,25)^{n-1}=850$$

Откуда $(1+1,25+1,25^2+\ldots+1,2^{n-1})+3\cdot1,25^{n-1}=8,5$, или:

$\frac{1\cdot(1-1,25^n)}{1-1,25}+3\cdot1,25^{n-1}=8,5$ обозначим $1,25^{n-1}=t$ или $\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}=t$

$\frac{1-1,25\cdot t}{-0,25}+3\cdot t=8,5$, откуда: $8t=12,5$ или $t=\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$. Тогда:

$\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$ или $n=3$; $n+3=6$.

Ответ: 6 лет.

Задача 10. Вкладчик в начале первого квартала положил на счет в банке некоторую сумму. В конце квартала на нее было начислено $x\%$, после чего он снял половину исходной суммы. На оставшуюся часть счета в конце второго квартала было начислено $y\%$, где $x+y=150$. При каком значении x счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

Решение. Обозначим через A_0 - исходный вклад, тогда после первого квартала вклад равен $A_0\left(1+\frac{x}{100}\right)$. Вкладчик снял $\frac{1}{2}A_0$ и у него останется

$A_0\left(1+\frac{x}{100}\right)-\frac{1}{2}A_0$. После второго квартала начисленная сумма S составит

$S=\left(A_0\left(1+\frac{x}{100}\right)-\frac{1}{2}A_0\right)\left(1+\frac{y}{100}\right)$, где $y=150-x$.

Откуда: $S(x)=A_0((1+0,01x)-0,5)(1+0,01(150-x))$.

Или: $S(x)=A_0(0,5+001x)(2,5-0,01x)$; $S(x)=\frac{A_0}{10000}(-x^2+200x+12500)$;

$f(x)=-x^2+200x+12500$ - квадратичная функция, достигающая наибольшего значения в вершине $x=\frac{-200}{-2\cdot1}=100$.

Ответ: 100%.

Задача 11. За время хранения в банке вклада проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}$ %, потом $7\frac{1}{7}$% и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.

Решение. Пусть A_0 - первоначальный вклад, который находился под действием каждой новой процентной ставки соответственно *x, y, z, u* месяцев. Тогда через $x + y + z + u$ месяцев сумма вклада составит:

$A_0\left(1+\frac{5}{100}\right)^x\cdot\left(1+11\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{100}\right)^y\cdot\left(1+7\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{100}\right)^z\cdot\left(1+\frac{12}{100}\right)^u=\frac{280}{100}A_0$, т.к. $A_0 \neq 0$, то

имеем $\left(\frac{105}{100}\right)^x\left(\frac{10}{9}\right)^y\left(\frac{750}{700}\right)^z\left(\frac{112}{100}\right)^u=\frac{14}{5}$ или

$5\cdot 21^x\cdot 10^y\cdot 15^z\cdot 28^u=14\cdot 20^x\cdot 9^y\cdot 14^z\cdot 25^u$.

Разложим на простые множители числа справа и слева от знака равенства

$$5\cdot 3^x\cdot 7^x\cdot 2^y\cdot 5^y\cdot 3^z\cdot 5^z\cdot 2^{2u}\cdot 7^u=2\cdot 7\cdot 2^{2x}\cdot 5^x\cdot 3^{2y}\cdot 2^z\cdot 7^z\cdot 5^{2u}$$

$$2^{y+2u}\cdot 3^{x+z}\cdot 5^{1+y+z}\cdot 7^{x+u}=2^{1+2x+z}\cdot 3^{2y}\cdot 5^{x+2u}\cdot 7^{1+z}$$

и в силу единственности такого разложения имеем равносильную систему равенства показателей степеней соответствующих множителей:

$$\begin{cases} y+2u=1+2x+z \\ x+z=2y \\ 1+y+z=x+2u \\ x+u=1+z \end{cases}$$

Решая, получим:

x=2

y=u=3

z=4

x+y+z+u=12(месяцев)

Ответ: 12 месяцев= 1 год.

Задача 12. В начале года 5/6 некоторой суммы денег положили в первый банк (под процент), а оставшуюся часть - во второй (под другой процент). Через год, в результате начисления процентов, сумма этих вкладов стала равной 670 тысяч рублей, а еще через год - 749 тысяч рублей. Если бы первоначально 5/6 исходной суммы положили во второй банк, а оставшуюся часть - в первый, то через год сумма вкладов стала бы равной 710 тысяч рублей. Какова была бы величина вклада через два года, если бы первоначально всю исходную сумму положили во второй банк?

Решение. Пусть *p%, q%* - процент годовой ставки первого и второго банков соответственно, A_0 - исходная сумма, тогда из условия задачи следует:

$$\begin{cases}\frac{5}{6}A_0(1+0{,}01p)+\frac{1}{6}A_0(1+0{,}01q)=670000\\ \frac{5}{6}A_0(1+0{,}01p)^2+\frac{1}{6}A_0(1+0{,}01q)^2=749000\\ \frac{1}{6}A_0(1+0{,}01p)+\frac{5}{6}A_0(1+0{,}01q)=710000\end{cases}$$

Надо найти $A_0(1+0{,}01q)^2$. Из системы имеем:

$$\begin{cases}1+0{,}01p=\frac{660000}{A_0}\\ A_0=\frac{720000}{(1+0{,}01q)}\\ 1+0{,}01q=1{,}2,\end{cases}$$

откуда:

$A_0=600000$

$A_0(1+0{,}01q)^2=864000$

Ответ: 864000 рублей.

Задача 13. В течение двух месяцев покупательная способность рубля уменьшалась на одно и тоже число процентов, но не менее чем в 1,2 раза. Причем, если в начале первого месяца за 9 тысяч рублей можно было купить 1 кг масла, то к концу второго месяца за 100 тысяч рублей можно было купить на 1 кг масла меньше, чем за ту же сумму в конце первого месяца. Можно ли с окладом в 333 тысячи рублей в месяц обеспечить семью из четырех человек маслом в последующем месяце, если предположить, что уровень цен в течение него не меняется, а каждому члену семьи необходимо потреблять 200 г масла в месяц?

Решение. Обозначим через $p\%$ - процент уменьшения покупательной способности рубля.

	Цена 1 кг масла	Покупательная способность 1 рубля
В начале месяца	9 000 рублей	1 рубль
В конце 1-го месяца	$\frac{9}{1-0{,}01p}$	$1(1-0{,}01p)$
В конце 2-го месяца	$\frac{9}{(1-0{,}01p)^2}$	$1(1-0{,}01p)^2$

По условию: $$\begin{cases} \dfrac{1}{1-0{,}01p} \ge 1{,}2 \\ \dfrac{\frac{100}{9}}{1-0{,}01p} - \dfrac{\frac{100}{9}}{(1-0{,}01p)^2} = 1 \end{cases}$$

Обозначим $1\text{-}0{,}01p=t$, тогда из второго уравнения системы получим $100t^2\text{-}100t+9=0$, откуда $t_1=0{,}9;\ t_2=0{,}1.$

Первому условию системы удовлетворяет только $t_2=0{,}1$, т.к. для t_1 должно быть $\frac{1}{t_1} \ge 1{,}2$, откуда $t_1 \le \frac{5}{6} \approx 0{,}8(3)$, но $t_1 = 0{,}9 < 0{,}8(3)$.

Цена 1 кг масла через 2 месяца будет $\frac{9}{0{,}1^2} = 900$ тысяч рублей.

Стоимость 0,2·4 кг составит 900·0,8=720 тысяч рублей > 333 тысячи рублей.

Ответ: не сможет.

Задача 14. Банк планирует вложить на 1 год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект A, а остальные 60% - в проект B. Проект A может принести прибыль в размере от 19% до 24%, а B - от 29% до 34%. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Определить наибольший и наименьший уровень этой ставки, при которых чистая прибыль банка будет заключена в пределах от 10% до 15% от имеющихся у него средств.

Решение. Пусть S - средства клиентов в банке, тогда

$$0{,}4S \cdot \frac{19}{100} \le \text{прибыль от проекта } A \le 0{,}4S \cdot \frac{24}{100}$$

$$0{,}6S \cdot \frac{29}{100} \le \text{прибыль от проекта } B \le 0{,}6S \cdot \frac{34}{100}$$

$$S(0{,}4 \cdot 0{,}19 + 0{,}6 \cdot 0{,}29) \le \text{сумма прибыли проектов } A \text{ и } B \le S(0{,}4 \cdot 0{,}24 + 0{,}6 \cdot 0{,}34)$$

или $0{,}25S \le$ сумма прибыли проектов A и $B \le 0{,}3S$

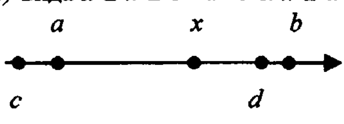
$0{,}25S - 0{,}01Sp \le$ чистая сумма прибыли $\le 0{,}3S - 0{,}01Sp$ *(T)*

где $p\%$ - процентная годовая ставка банка,

$0{,}01Sp$ - такую сумму банк должен возвратить клиентам по установленной ставке.

По условию $0{,}1S \le$ чистая сумма прибыли $\le 0{,}015S$ *(TT)*

Примечание: чистая сумма прибыли (x) удовлетворяет двум условиям *(T)* и *(TT)* вида $a \le x \le b$ и $c \le x \le d$



, поэтому достоверно можно утверждать, что $\begin{cases} a \le d \\ b \ge c \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} 0{,}25S - 0{,}01Sp \le 0{,}15S \\ 0{,}3S - 0{,}01Sp \ge 0{,}1S \end{cases}$, откуда $\begin{cases} 2{,}5 - 0{,}1p \le 1{,}5 \\ 3 - 0{,}1p \ge 2 \end{cases}$

или $10 \le p \le 20$, т.е. $p_{наим.} = 10$, $p_{наиб.} = 20$.

Ответ: 10%, 20%.

Задача 15. Кандидат в депутаты имеет право на одно бесплатное выступление в газете, увеличивающее число его сторонников на 1000 человек, а также на выступления по радио и по телевидению, увеличивающие число сторонников соответственно на 40% и 80% и стоящие 32 и 47 тысяч рублей соответственно. В каком порядке и количестве нужно выступать кандидату в этих средствах массовой информации, чтобы, израсходовав не более 112 тысяч рублей, приобрести наибольшее число сторонников?

Решение. Обозначим через n - число сторонников кандидата изначально;

x, y - количество выступлений по радио и телевидению соответственно. По условию $32x + 47y \le 112$, тогда возможны следующие варианты значений x, y.

y \ x	0	1	2	3
0	+	+	+	+
1	+	+	+	-
2	+	-	-	-

Количество сторонников кандидата после всех его выступлений может вычисляться по следующей формуле (в зависимости от последовательности выступлений):

$$f(x;y;m;k) = \left(n\left(1+\frac{40}{100}\right)^{x-m}\cdot\left(1+\frac{80}{100}\right)^{y-k} + 1000\right)\cdot\left(1+\frac{40}{100}\right)^{m}\left(1+\frac{80}{100}\right)^{k}$$

где m, k - натуральные числа и 0; $m \le x$, $k \le y$.

Или $f(x;y;m;k) = \left(n\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{x-m}\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^{y-k} + 1000\right)\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{m}\left(\frac{9}{50}\right)^{k}$

Так как $\left(n\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{x-m}\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^{y-k} + 1000\right)\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{m}\left(\frac{9}{50}\right)^{k} \le (n+1000)\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{x}\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^{y}$, то целесообразно рассмотреть функцию $\varphi(x,y) = (n+1000)\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^{x}\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^{y}$ для возможных пар (x, y); т.к. $\varphi(x,y) = f(x;y;m=x;k=y)$

$$\varphi(0;0) = n + 1000$$

$$\varphi(0;1) = (n + 1000)\cdot\frac{9}{5}$$

$$\varphi(0;2) = (n + 1000)\cdot\left(\frac{9}{5}\right)^2$$

$$\varphi(1;0) = (n + 1000)\cdot\frac{7}{5}$$

$$\varphi(2;0) = (n + 1000)\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$$\varphi(3;0) = (n + 1000)\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^3$$

$$\varphi(1;1) = (n + 1000)\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{9}{5}$$

$$\varphi(2;1) = (n + 1000)\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^2\cdot\frac{9}{5}$$

Самым наибольшим значением является $\varphi(2;1)$.

Ответ: выступления должны быть в следующем порядке: сначала в газете, затем в любом порядке одно выступление по телевидению и два по радио.

И, наконец, рассмотрим задачу на использование оценок.

Задача 16. Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. При изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|$ рублей, а цена реализации каждого телевизора при этом не превосходит $\left(540 - \frac{3}{10}n\right)$ рублей. При каком n может быть получена наибольшая ежемесячная прибыль в данных условиях.

Решение. Пусть S - себестоимость одного телевизора; p - цена реализации одного телевизора, тогда

$$\begin{cases} n\cdot S \ge \left(\frac{40500}{n} + 270 - \left|90 - \frac{40500}{n}\right|\right)\cdot n \\ n\cdot p \le n\cdot\left(540 - \frac{3}{10}n\right) \end{cases}$$

так как предприятие прибыльное, то

$p - S > 0$ и $np - nS \le 540n - \frac{3}{10}n^2 - 40500 - 270n + |90n - 40500|$

$$\max(np - nS) = 540n - \frac{3}{10}n^2 - 40500 - 270n + |90n - 40500| = f(n)$$

Случай 1. $90n - 40500 \geq 0; n \geq 450$

$$f(n) = -\frac{3}{10}n^2 + 360n - 81000; \quad \text{наиб. } f(n) = f(n_{верш.}); n_{верш.} = \frac{-360\cdot 10}{-6} = 600 > 450;$$

$n \geq 450$

Случай 2. $90n - 40500 < 0; 0 < n < 450$

$$f(n) = -\frac{3}{10}n^2 + 180n; \quad \text{наиб. } f(n) = f(n_{верш.}); n_{верш.} = \frac{-180\cdot 10}{-6} = 300 < 450$$

и т.к. $f(300) = f(600)$, то

Ответ: 300; 600.

Задачи для самостоятельного решения

1. Выработка продукции за первый год работы предприятия возросла на *p%*, а за следующий год по сравнению с первоначальной она возросла на 10% больше, чем за первый год. Определить на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

Ответ: на 17%.

2. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

Ответ: 10%.

3. В оленеводческом совхозе стадо увеличивается в результате естественного прироста и приобретения новых оленей. В начале первого года стадо составляло 3000 голов, в конце года совхоз купил 700 голов. В конце второго года стадо составляло 4400 голов. Определить процент естественного прироста.

Ответ: 10%.

4. Сберкасса выплачивает 3% годовых. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

Ответ: через 23 года.

5. Банк начисляет ежегодно 3% от суммы вклада. Найдите наименьшее число лет, за которое вклад вырастет более чем на 10%.

Ответ: 4 года.

6. В банк положен вклад из расчета 10% годовых. Через два года со счета была снята сумма, составляющая 21% от суммы первоначального вклада. Через какое наименьшее число лет после этого сумма вклада окажется больше первоначальной в 1,4 раза?

Ответ: 4 года.

7. Трехкомнатная квартира стоит 1 000 000 рублей. Банк предоставляет покупателю ссуду на всю эту сумму из расчета 10% годовых, начисляемых на непогашенную часть ссуды. На какой год после момента покупки квартиры покупатель может расплатиться с банком за предос-

тавленную ему ссуду и проценты по кредиту, если ежегодно будет уплачивать банку 200 000 рублей и сколько в итоге обойдется покупателю квартира?

Ответ: на 8-ой год; 1 454 500 рублей.

8. В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке - 60% к текущей сумме на счете, во втором - 40% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги - во второй, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

Ответ: 1/15.

9. Из цистерны в бассейн сначала перелили 50% имеющейся в цистерне воды, затем еще 100 литров, затем еще 5% остатка. При этом количество воды в бассейне возросло на 31%. Сколько воды было в цистерне, если в бассейне первоначально было 2000 литров воды?

Ответ: 1000 литров.

10. В некотором городе в течение двух лет наблюдался рост числа жителей. На втором году процент роста числа жителей увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найти процент роста числа жителей в этом городе во втором году, если известно, что он на 5,3 меньше, чем процент роста населения за два года.

Ответ: 6%.

11. В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке - 50% к текущей сумме на счете, во втором - 75% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги - во второй банк, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах утроилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

Ответ: 1/13.

12. Трехкомнатная квартира стоит 1 000 000 рублей. Покупателю предлагается следующая схема оплаты: 20% стоимости квартиры необходимо оплатить сразу при покупке, а остальную сумму банк дает покупателю рассрочку на 20 лет из расчета 10% годовых. Рассрочка означает, что покупатель ежегодно должен делать постоянный взнос, идущий на погашение ссуды и процентов за ее предоставление, начисляемых на непогашенную часть ссуды. Определите сумму ежегодного взноса и то, сколько в итоге будет уплачено за квартиру.

Ответ: $80\cdot 1{,}1^{20}/(1{,}1^{20}-1)\approx 93{,}97$ тыс.руб.

$1600\cdot 1{,}1^{20}/(1{,}1^{20}-1)+200\approx 2079{,}4$ тыс.руб.

13. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на 4%. На следующий год она увеличилась на 8%. Определить средний ежегодный прирост продукции за этот период (округлить ответ до сотых).

Ответ: 5,98%.

14. В банк помещен вклад в размере 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же сумму. К концу пятого года после начисления процентов размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик добавлял ежегодно?

Ответ: 210 000 рублей.

15. По оценке социологов за период в 24 года - с 1966 по 1989 г. включительно - в городе N должно было быть заключено 3150 браков. Фактически в 1966 году состоялось 100 браков. Каждый последующий год заключалось на 5 браков больше, чем в предыдущий, пока не была досрочно, причем за целое число лет, достигнута предварительная оценка - 3150 браков. После этого, вплоть до конца 1989 года годовое число вступлений в брак сократилось на 11 по сравнению с годом достижения оценки. На сколько процентов реальное число браков за 24 года превысило предварительную оценку?

Ответ: на 18%.

16. Предприятие производит детские велосипеды и является убыточным. Известно, что при изготовлении m велосипедов в месяц расходы предприятия на выпуск одного велосипеда составляют не менее

$\frac{168000}{m} + 36 - \left|12 - \frac{72000}{m}\right|$ тысяч рублей, а цена реализации каждого велосипеда при этом не превосходит $72 - \frac{3}{1000}m$ тысяч рублей. Определите ежемесячный объем производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки исключить.

Ответ: 4000; 8000.

17. Для улучшения собираемости налогов правительство может провести одну бесплатную рекламную акцию на государственном телеканале, а также может увеличить штат налоговых инспекторов и повысить зарплату налоговой полиции. Рекламная акция по телевидению увеличивает количество граждан, подавших налоговые декларации, на 10000; каждое увеличение штата налоговых инспекторов увеличивает количество поданных деклараций на 40% и требует 31 млн. рублей; каждое повышение зарплаты налоговой полиции увеличивает количество поданных деклараций на 60%. Опрсделить количество и последовательность проведения этих мероприятий, при которых будет подано наи-

большее число налоговых деклараций, если на эти цели из бюджета можно израсходовать не более 123 млн. рублей.

Ответ: сначала акция на телевидении; затем в любом порядке 2 раза увеличение зарплаты налоговой полиции и 1 раз увеличение штата налоговых инспекторов.

18. Выработка продукции за год работы предприятия возросла на *p%,* а на следующий год она возросла на 10% больше, чем в первый год. Определите на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%.

Ответ: 17%.

Алла Михайловна Сазонова

Сложные проценты
(текстовые задачи)

Оригинал – макет подготовлен к изданию отделом информационно-методического обеспечения Могилевского областного института повышения квалификации и переподготовки руководящих работников и специалистов образования.

Подписано в печать 10 марта 2003 г. Формат 60х84 1\16. Печать офсетная. Усл. печ. листов 1.12 Тираж 90 экз.

Ответственный за выпуск: С. А. Чепикова
Корректор: З. С. Дыникова
Набор: Н. М. Волчкова
Л.В. Анихимовская

Могилевский областной институт повышения квалификации и переподготовки руководящих работников и специалистов образования
212011, г. Могилев, пер. Березовский , 1а.