ЗАДАЧЫ З ВАГАМІ

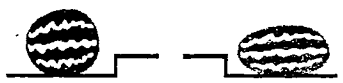
У падручніках па матэматыцы для пачатковай школы пад рэдакцыяй А. А. Столяра прапануецца шэраг заданняў, у рабоце над якімі малодшыя школьнікі рыхтуюцца да асэнсавання алгебраічнага спосабу рашэння тэкставых задач. Пры гэтым ажыццяўляецца прапедэўтыка такіх важных алгебраічных паняццяў, як ураўненні, сістэмы ўраўненняў, раўназначныя пераўтварэнні ўраўненняў.

Значнае месца ў курсе матэматыкі займаюць задачы, звязаныя з вызначэннем вагі. Іх рашэнне выклікае ў дзяцей пэўныя цяжкасці, таму мэтазгодна разгледзець гэтую тэму больш падрабязна.

У пачатковых класах задачы з вагамі рашаюцца з дапамогай практычных дзеянняў, што не парушаюць раўнавагі: дабаўленне прадметаў аднолькавай масы на абедзве шалі або зняцце іх з шаляў, замена аднаго або некалькіх прадметаў іншымі, роўнымі па масе. Важнае значэнне маюць графічныя ілюстрацыі, якія надаюць тлумачэнням нагляднасць і прастату.

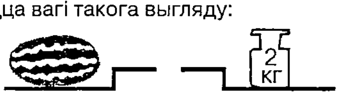
Перад рашэннем задач з выкарыстаннем вагаў мэтазгодна правесці з вучнямі падрыхтоўчую работу, у якой можна выдзеліць наступнае.

1. Вучням прапануюцца вагі, што знаходзяцца ў раўнавазе. Напрыклад:



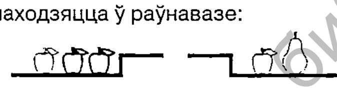
Высвятляецца, што такой мадэлі вагаў адпавядаюць наступныя фармулёўкі:
кавун ураўнаважвае дыню;
дыня ўраўнаважвае кавун;
кавун і дыня важаць аднолькава.

2. Разглядаюцца вагі такога выгляду:

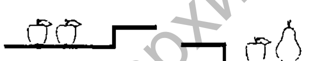


Словамі гэтую мадэль можна апісаць так:
дыню ўраўнаважвае гіра ў 2 кг;
дыня важыць 2 кг;
маса дыні роўна 2 кг.

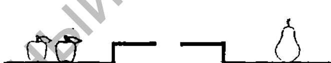
3. Дадзены вагі, на шалях якіх размешчаны груша і аднолькавыя яблыкі. Вагі знаходзяцца ў раўнавазе:



Здымаем з левай шалі 1 яблык і бачым, што раўнавага парушылася:

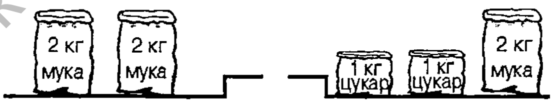


З правай шалі здымаем таксама 1 яблык — зноў устанавілася раўнавага:



Вывад: Калі з абедзвюх шаляў вагаў зняць аднолькавыя прадметы, то раўнавага не парушаецца.

4. На левай шалі вагаў знаходзяцца 2 пакеты мукі па 2 кг кожны, а на правай — 1 такі ж пакет мукі і 2 пакеты цукру па 1 кг:



Вагі знаходзяцца ў раўнавазе. Такой умове адпавядае лікавая роўнасць:

$2 + 2 = 1 + 1 + 2$

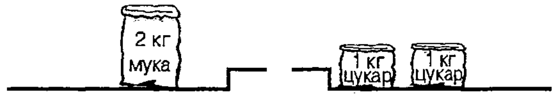
У праўдзівасці гэтай роўнасці можна лёгка пераканацца:

$4 = 4$

З левай шалі здымем пакет мукі. Раўнавага парушылася — атрымалася непраўдзівая роўнасць:

$2 \neq 1 + 1 + 2$

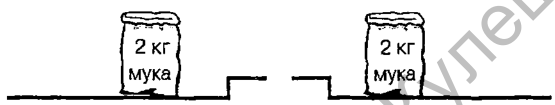
Здымем з правай шалі такі ж пакет мукі:



Зноў утварылася раўнавага. Запісваем роўнасць:

$2 = 1 + 1$, або $2 = 2$.

Раўнавагу можна ўстанавіць і іншым спосабам: зняць з правай шалі 2 аднакілаграмовыя пакеты цукру:



Атрымліваем: $2 = 2$.

Магчымасць розных варыянтаў ураўнаважвання вагаў падводзіць вучняў да ўсведамлення таго, што галоўнае пры здыманні прадметаў з шаляў — аднолькавасць іх масы.

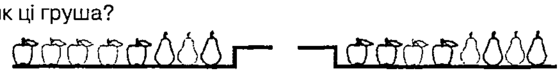
Вывад: Калі з левай і правай шаляў вагаў зняць прадметы аднолькавай масы, то раўнавага не парушыцца.

Аналагічная работа праводзіцца пры знаёмстве з іншымі практычнымі дзеяннямі, што не парушаюць раўнавагі. Далей гэтыя практычныя дзеянні выкарыстоўваюцца пры рашэнні самых розных задач з вагамі.

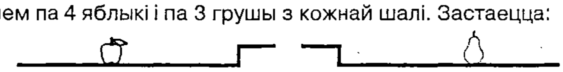
У падручніках матэматыкі для пачатковых класаў прапануюцца задачы з вагамі, умову якіх можна змадэліраваць, г. зн. адлюстраваць пры дапамозе адных, двух або трох вагаў. Рашэнне такіх задач з'яўляецца прапедэўтыкай рашэння лінейных ураўненняў, сістэм двух або трох ураўненняў.

Разгледзім методыку работы над некаторымі з гэтых задач. Пры выкананні малюнкаў можна выкарыстоўваць умоўныя абазначэнні прадметаў, рэчываў, гір і г. д.

Задача 1 (падручнік "Матэматыка 2", с. 71, № 5). Што лягчэй: яблык ці груша?

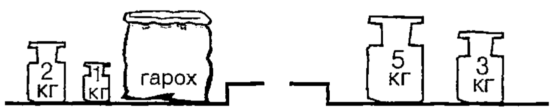


Рашэнне. Перш за ўсё звяртаем увагу на тое, што вагі знаходзяцца ў раўнавазе. Далей выконваем знаёмыя практычныя дзеянні, якія не парушаюць раўнавагі. З левай і правай шаляў здымаем аднолькавыя прадметы: па яблыку, яшчэ па яблыку і г. д., усяго знімем па 4 яблыкі і па 3 грушы з кожнай шалі. Застаецца:

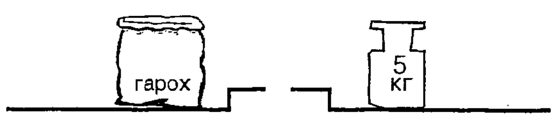


Відавочна, што яблык і груша маюць аднолькавую масу.

Задача 2 (падручнік "Матэматыка 1", частка IV, с. 20, № 4). Колькі важыць гарох?

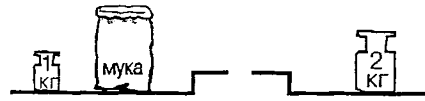


Рашэнне. Каб на левай шалі застаўся толькі гарох, трэба зняць з яе абедзве гіры агульнай масай 3 кг. Для захавання раўнавагі трэба зняць гіру такой жа масы з правай шалі. На вагах застанецца:



Атрымліваем адказ: гарох важыць 5 кг.

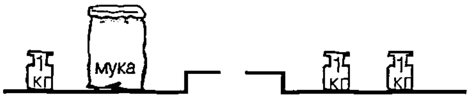
Задача 3 (падручнік "Матэматыка 2", с. 26, № 3, заданне 2). Колькі важыць пачак з мукой?



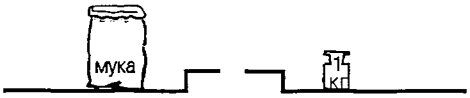
Рашэнне. Каб на левай шалі застаўся толькі пачак мукі, трэба зняць гіру ў 1 кг. З правай шалі таксама трэба зняць 1 кг.

Патрабуецца выканаць новае практычнае дзеянне: замяніць

2-кілаграмовую гіру на правай шалі вагаў дзвюма гірамі па 1 кг кожная:

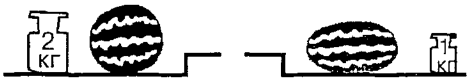


Знімем з абедзвюх шаляў па адной гіры ў 1 кг:

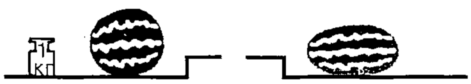


Выкананыя практычныя дзеянні не парушаюць раўнавагі. Таму відавочна, што 1 пачак мукі важыць 1 кг.

Задача 4 (падручнік "Матэматыка 2,", с. 77, № 5). Што цяжэй — кавун ці дыня? На колькі?



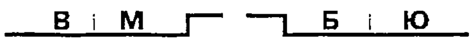
Рашэнне. Выканаўшы тыя ж дзеянні, што і ў папярэдняй задачы, атрымаем:



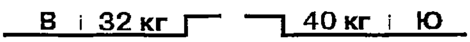
Паколькі дыню ўраўнаважваюць кавун і гіра ў 1 кг, то дыня цяжэйшая за кавун на 1 кг.

Задача 5 (падручнік "Матэматыка 2", с. 79, № 6). Валя і Міша важаць столькі ж, колькі Бора і Юра. Міша важыць 32 кг, а Бора 40 кг. Хто цяжэйшы — Валя ці Юра?

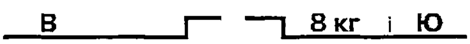
Рашэнне. Перш чым рашаць гэтую задачу, пакажам яе ўмову з дапамогай малюнка вагаў:



Ведаючы масу Мішы і Боры, зробім замену на вагах:



Здымем з абедзвюх шаляў па 32 кг і атрымаем:



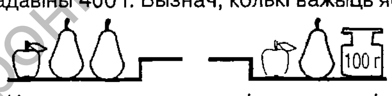
Апошні малюнак дазваляе не толькі адказаць на пытанне, хто цяжэйшы, але і вызначыць, на колькі: Валя цяжэйшая за Юру на 8 кг.

Задача 6 (падручнік "Матэматыка 2", с. 149, № 3). Колькі важыць адзін кавун?

Рашэнне. Заменім гіру ў 2 кг на правай шалі вагаў дзвюма гірамі па 1 кг:

Зараз па вагах на малюнку добра бачна, што кавун і гіра ў 1 кг важаць разам 5 кг. Адсюль вага кавуна складае 4 кг.

Задача 7 (падручнік "Матэматыка 4", с. 152, № 712, заданне а). Усяго садавіны 400 г. Вызнач, колькі важыць яблык.



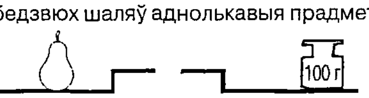
Рашэнне. На вагах, акрамя садавіны, знаходзіцца гіра ў 100 г. Маса ўсіх прадметаў на вагах роўна 500 г:

100 + 400 = 500 (г).

Паколькі вагі ўраўнаважаны, то можна знайсці масу прадметаў на кожнай шалі:

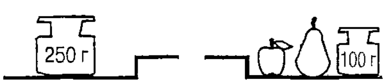
500 : 2 = 250 (г).

Зняўшы з абедзвюх шаляў аднолькавыя прадметы, атрымаем:

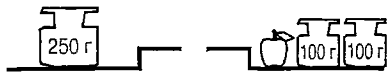


Гэты малюнак паказвае, што груша важыць 100 г.

Ведаючы, што на правай шалі знаходзяцца прадметы агульнай масай 250 г, можам змадэліраваць такія вагі:

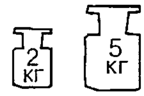


Паставіўшы замест грушы гіру ў 100 г, атрымаем:



Відавочна, што яблык важыць 50 г.

Задача 8 (падручнік "Матэматыка 2", с. 82, № 5). Як адмераць пры дапамозе гэтых дзвюх гір 3 кг круп?



Рашэнне. Умову задачы можна перафразаваць наступным чынам: як размясціць на вагах 2 гіры (5 кг і 2 кг) і пакет круп (3 кг), каб вагі знаходзіліся ў раўнавазе?

Заўважаем, што маса ўсіх прадметаў роўна 10 кг:

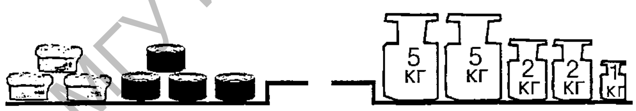
5 + 2 + 3 = 10 (кг).

Каб вагі знаходзіліся ў раўнавазе, трэба, каб на левай і правай шалях была аднолькавая маса:

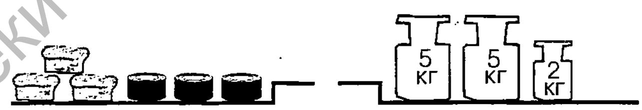
10 : 2 = 5 (кг).

Гэта можна атрымаць, калі на адну шалю паставіць гіру ў 5 кг, а на другую — гіру ў 2 кг і пакет круп:

Задача 9 (падручнік "Матэматыка 2", с. 98, № 5). Колькі пасобку важаць буханка хлеба і бляшанка кансерваў?



(1)

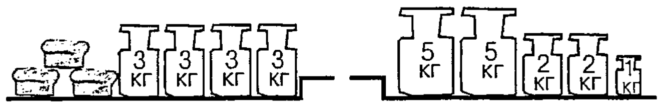


(2)

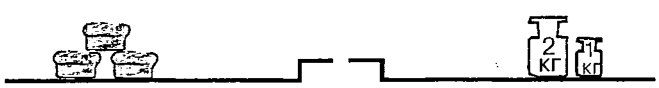
Рашэнне. Гэта задача адрозніваецца ад разгледжаных тым, што ва ўмове прапанаваны два малюнкі вагаў. На другім малюнку паказаны тыя ж вагі, што і на першым, пасля выканання некаторых практычных дзеянняў. Іншымі словамі, раней мы атрымлівалі адказ у выніку вызначэння вагі гір, што засталіся пасля выканання практычных дзеянняў. У дадзенай задачы адказ знаходзіцца ў выніку вызначэння саміх гэтых дзеянняў і іх аналізу.

Параўнанне вагаў (1) і (2) дазваляе ўбачыць, што з левай шалі першых вагаў знялі адну бляшанку кансерваў, а з правай — гіры ў 2 кг і ў 1 кг (усяго 3 кг). Пры гэтым раўнавага не парушылася. Такім чынам, першы адказ на пытанні задачы знойдзены: бляшанка кансерваў важыць 3 кг. Засталося знайсці вагу буханкі хлеба.

Заменім на першых вагах кожную бляшанку кансерваў гірай у 3 кг:

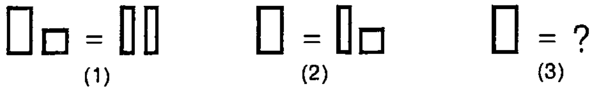


Зараз знімем з левай шалі ўсе гіры (усяго 12 кг) і на такую ж вагу знімем гіры з правай шалі (2 гіры ў 5 кг і гіра ў 2 кг дадуць агульную вагу 12 кг):



Цяпер відавочна, што вага буханкі хлеба роўна 1 кг.

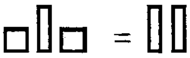
Задача 10 (падручнік "Матэматыка 3", с. 48, № 82). Колькі кубікаў ураўнаважаць брусок?



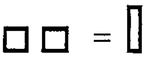
(1) (2) (3)

Рашэнне. У гэтай задачы раўнавага на ўмоўных вагах можа быць паказана ў выглядзе роўнасцей, што з'яўляецца крокам да разумення вучнямі запісу рашэння задачы з дапамогай ураўненняў або іх сістэм.

З малюнка (2) бачна, што брусок ураўнаважваюць кубік і палачка. Таму заменім брусок у першай роўнасці на кубік і палачку. Атрымаем:



Знімем з абедзвюх шаляў умоўных вагаў па палачцы (раўнавага не парушыцца):



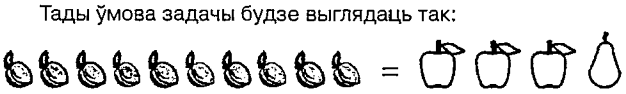
Атрыманую роўнасць выкарыстоўваем для замены палачкі кубікамі ў другой роўнасці і знаходзім адказ:

Адказ: 3 кубікі ўраўнаважаць брусок.

Задача 11 (падручнік "Матэматыка 4", с. 44, № 218). 10 сліў важаць столькі ж, колькі 3 яблыкі і груша, а 6 сліў і яблык важаць столькі ж, колькі груша. Колькі сліў ураўнаважаць на рычажных вагах адну грушу? Рашэнне праілюструй малюнкамі.

Рашэнне. Умова гэтай задачы фармулюецца толькі словамі, без выкарыстання ілюстрацый. Гэта ўскладняе пошук рашэння. Паспрабуем выканаць адпаведныя малюнкі.

Тады ўмова задачы будзе выглядаць так:


(1)


(2)

Далей разважаем гэтак жа, як і пры рашэнні папярэдняй задачы.

Адказ: 7 сліў ураўнаважаць адну грушу.

Задача 12 (падручнік "Матэматыка 4", с. 48, № 236). На адной шалі вагаў бутэлька і шклянка, на другой — збан. Вагі ўраўнаважаны.

Шклянку пераставілі на другую шалю вагаў, збан знялі з вагаў і на гэтую ж шалю паставілі талерку. Вагі зноў ураўнаважаны. З першай шалі знялі бутэльку і замест яе паставілі два збаны, а на другой шалі шклянку замянілі дзвюма талеркамі. Такім чынам, два збаны ўраўнаважыліся трыма талеркамі. У колькі разоў бутэлька цяжэйшая за шклянку? Рашэнне праілюструй малюнкамі.

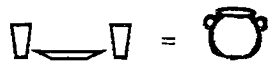
Рашэнне. У гэтай задачы размова ідзе аб трох вагах, што знаходзяцца ў раўнавазе.

Праілюструем умову задачы з дапамогай трох роўнасцей:

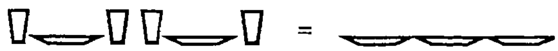

(1) (2) (3)

Перафармулюем пытанне задачы так, каб адказ на яго можна было ўбачыць на ўмоўных шалевых вагах: колькі шклянак ураўнаважваюць бутэльку?

Замест бутэлькі на першых вагах паставім раўнаважныя ёй талерку і шклянку, што паказвае роўнасць (2). Тады роўнасць (1) стане наступнай:



Заменім у роўнасці (3) кожны збан на 2 шклянкі і талерку:

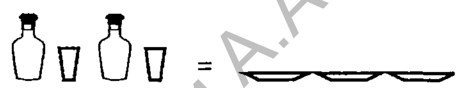


Здымем з абедзвюх шаляў умоўных вагаў па 2 талеркі:

Заменім у роўнасці (2) талерку чатырма шклянкамі і атрымаем адказ: бутэлька ўраўнаважваецца пяццю шклянкамі, або бутэлька ў 5 разоў цяжэйшая за шклянку.

Прапанаванае рашэнне задачы не з'яўляецца адзіным. Для атрымання адказу можна разважаць іншым спосабам, выкарыстоўваючы тыя ж практычныя дзеянні, але ў іншай паслядоўнасці. Прывядзём яшчэ адзін магчымы варыянт рашэння.

З роўнасцей (1) і (3) атрымліваем:



Выкарыстаўшы роўнасць (2), маем:

Далей рашэнне задачы супадае з разгледжаным.

Дадатковыя задачы

1. (Квант, 1989, № 5, с. 43.) Антону падаравалі вагі, і ён пачаў узважваць свае цацкі. Машыну ўраўнаважылі мячык і два кубікі, а машыну з кубікам — два мячыкі. Колькі кубікаў ураўнаважваюць машыну? (Усе мячыкі ў Антона аднолькавыя і кубікі — таксама.)

2. (Квант, 1986, № 9, с. 31.) На прылаўку магазіна ляжалі тры качаны капусты, два кавуны, дыня і бурак. Прадавец пачаў узважваць гэтую агародніну і са здзіўленнем заўважыў, што ўсе тры качаны капусты важаць аднолькава і ў абодвух кавуноў роўная вага. Больш цікавай была раўнавага яшчэ ў трох выпадках: дыня і бурак ураўнаважваліся кавуном; дыня важыла столькі ж, колькі качан капусты і бурак; два кавуны ўраўнаважылі тры качаны капусты. А зараз адкажыце: у колькі разоў дыня цяжэйшая за бурак?

3. (Квант, 1992, № 9, с. 39.) На свой дзень нараджэння фрэкен Бок спякла вялізны торт. Вядома, што Малыш і торт важылі столькі ж, колькі Карлсан і фрэкен Бок. Пасля таго як торт з'елі, Карлсан важыў столькі ж, колькі фрэкен Бок і Малыш. Дакажыце, што кусок торта, які з'еў Карлсан, важыць столькі ж, колькі важыла фрэкен Бок да свайго дня нараджэння.

Л. В. ЛЕШЧАНКА,
дацэнт кафедры методыкі выкладання матэматыкі Магілёўскага педагагічнага універсітэта.