И. В. Марченко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть 2

Могилев 2014

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени А. А. КУЛЕШОВА»

И. В. Марченко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические рекомендации

В двух частях

Часть 2

им. А.А. Кулешова

Могилев 2014

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171
М30

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
МГУ имени А. А. Кулешова*

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики
Белорусско-Российского университета
Д. В. Роголев

Марченко, И. В.

М30 Теория вероятностей : метод. рекоменд. : в 2 ч. Ч. 2 / И. В. Марченко. – Могилев : МГУ имени А. А. Кулешова, 2014. – 60 с. : ил.

Методические рекомендации содержат следующие разделы теории вероятностей: одномерные случайные величины, основные законы распределения одномерных случайных величин, многомерные случайные величины. Каждая тема сопровождается необходимыми теоретическими сведениями и решением типовых задач с подробными методическими пояснениями. Упражнения по каждому разделу разбиты на несколько групп: для закрепления теоретической части материала темы и самостоятельной подготовке к практическому занятию; для аудиторной работы; для домашней работы; задачи повышенной сложности.

Методические рекомендации предназначены для всех специальностей, предусматривающих изучение курса теории вероятностей. Они будут полезны для преподавателей и ассистентов при подготовке и проведении практических занятий.

Часть 1 вышла в издательстве МГУ имени А. А. Кулешова в 2011 г.

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171

Упражнения группы A предназначены для закрепления теоретической части материала темы и самостоятельной подготовке к практическому занятию.

Упражнения группы B предназначены для аудиторной работы.

Упражнения группы C предназначены для домашней работы.

Упражнения группы D содержат задачи, выходящие за рамки учебного плана, а также задачи повышенной сложности. Они будут полезны тем, кто заинтересован в более глубоком изучении материала.

Студентам, отсутствовавшим на занятиях по данной теме, рекомендуется выполнить упражнения всех уровней.

Символ ♦ используется для обозначения окончания решения примера или задачи.

Упражнения снабжены ответами и указаниями в тех случаях, где это целесообразно.

Тема 1
Одномерные случайные величины и их виды. Функция распределения случайных величин. Дискретные случайные величины и их числовые характеристики

Будем рассматривать пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega\}$, связанных с данным опытом E. С каждым элементарным исходом эксперимента E можно связать некоторую количественную характеристику. Она меняется под влиянием случайных обстоятельств в зависимости от результата эксперимента, т.е. представляет собой некоторую функцию случайного исхода испытаний или, как говорят, случайную величину.

Определение 1. Если каждому элементарному событию $\omega \in \Omega$ поставлено в соответствие определенное вещественное число $X(\omega)$, то говорят, что на пространстве Ω задана ***случайная величина*** X.

Из определения следует, что случайная величина есть числовая функция, заданная на пространстве $\Omega = \{\omega\}$. Ее областью значений является множество $(-\infty;+\infty)$.

Пример 1. Случайными величинами являются:

1) число очков на верхней грани при бросании игральной кости. Ее возможные значения 1, 2, 3, 4, 5, 6;
2) оценка, полученная на экзамене. Ее возможные значения 1, 2, 3, ..., 10;
3) время безотказной работы радиолампы. Возможные значения этой случайной величины принадлежат промежутку $[0;+\infty)$. ♦

В зависимости от принимаемых значений случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.

Определение 2. Случайная величина X называется одномерной ***дискретной*** случайной величиной или случайной величиной ***дискретного типа***, если множество ее возможных значений представляет собой конечную (или бесконечную) последовательность чисел x_1, x_2, ..., x_n (или x_1, x_2, ...), а событие $X = x_k$ при каждом k имеет определенную вероятность $p_k = P(X = x_k)$.

Замечание 1. Поскольку в результате эксперимента дискретная случайная величина с возможными значениями x_1, x_2, ..., x_n может принять одно и только одно из них, события $X = x_k$, $k = \overline{1, n}$, попарно несовместны и образуют полную группу событий. Поэтому по общей теореме сложения вероятностей справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{1.1}$$

Замечание 2. В случае дискретной случайной величины, когда вероятности $p_k = P(X = x_k)$ неизвестны, для проверки правильности их нахождения используют равенство (1.1).

Случайная величина считается заданной, если указан закон, по которому каждому событию ставится в соответствие некоторая вероятность.

Определение 3. ***Законом (или рядом) распределения случайной величины*** называется любое соответствие, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

О случайной величине в таком случае говорят, что она подчиняется данному закону распределения.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан таблично, графически и аналитически.

1. При *табличном способе* закон распределения задается таблицей, в первой строке которой расположены значения случайной величины, а во второй – соответствующие им вероятности (см. табл. 1.1).

Таблица 1.1

x_k	x_1	x_2	...	x_n
p_k	p_1	p_2	...	p_n

При заполнении этой таблицы рекомендуется использовать замечание 2.

По ряду распределения случайной величины можно найти вероятность события $a \le X < b$, состоящего в том, что случайная величина X будет не меньше некоторого числа a и меньше некоторого числа b, с помощью равенства

$$P(a \le X < b) = \sum_{k=\alpha}^{\beta} P(X = x_k),\ x_\alpha \ge a, x_\beta < b. \tag{1.2}$$

2. *Графическим способом* задания дискретной случайной величины является ***многоугольник распределения*** – ломаная линия, соединяющая точки с координатами $(x_k; p_k)$, $k = \overline{1, n}$.

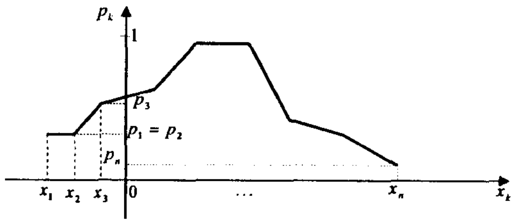


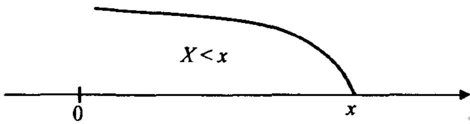
Рис. 1.1. Многоугольник распределения случайной величины, заданной таблицей 1.1

3. *Аналитическим способом* задания и дискретных, и непрерывных случайных величин является функция распределения $F(x)$.

Определение 4. ***Функцией распределения*** случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее некоторого фиксированного действительного числа x, т.е.

$$F(x) = P(X < x),\ x \in \mathrm{R}. \tag{1.3}$$

Геометрически это означает, что функция распределения случайной величины X есть вероятность того, что случайная точка X расположена на числовой оси левее числа x, если рассматривать случайную величину как случайную точку X оси Ox.



Из определения 4 следует, что функция распределения дискретной случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \le x_1, \\ p_1,\ x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2,\ x_2 < x \le x_3, \\ \ldots, \\ \sum_{i=1}^{k-1} p_i,\ x_{k-1} < x \le x_k, \\ \ldots, \\ 1,\ x > x_n. \end{cases} \tag{1.4}$$

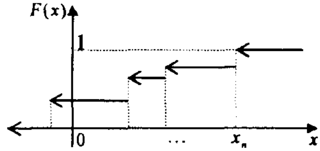
Свойства функции F(x):

1. $0 \le F(x) \le 1,\ \forall x \in \mathrm{R}$.
2. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
3. $F(x)$ – неубывающая функция на R, т.е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.
4. Вероятность события $a \le X < b$, состоящего в том, что случайная величина X будет не меньше некоторого числа a и меньше некоторого числа b, можно найти по формуле

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \tag{1.5}$$

5. Функция распределения $F(x)$ непрерывна слева при любом $x \in \mathrm{R}$.

График функции распределения дискретной случайной величины имеет вид



Из определения 4 и свойства 5 функции распределения следует, что

$$p_k = P(X = x_k) = F(x_k + 0) - F(x_k). \qquad (1.6)$$

Из формул (1.5) и (1.6) вытекают следующие равенства

$$\begin{aligned} &P(a < X < b) = F(b) - F(a+0), \\ &P(a < X \le b) = F(b+0) - F(a+0), \\ &P(a \le X \le b) = F(b+0) - F(a). \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Рассмотрим основные числовые характеристики дискретных случайных величин.

Определение 5. ***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех её возможных значений на соответствующие им вероятности, т.е.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \qquad (1.8)$$

Замечание 3. Если число возможных значений дискретной случайной величины бесконечно (но счётно), то математическое ожидание есть сумма числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$. В этом случае, математическое ожидание может быть числом, одним из символов бесконечности, а также может не существовать, если указанный ряд расходится.

Математическое ожидание представляет собой постоянную, не являющуюся случайной, величину.

Если число возможных значений дискретной случайной величины конечно, то математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому всех возможных значений случайной величины, т.е.

$$M(X) \approx \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{n}.$$

В этом и состоит ***вероятностный смысл математического ожидания***.

Определение 6. ***Суммой двух случайных величин*** X и Y называется случайная величина $X + Y$, возможные значения которой есть всевозможные суммы $x_i + y_j$ значений случайных величин X и Y, а вероятности этих значений равны произведению соответствующих вероятностей слагаемых, если X и Y независимы, и произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго, если X и Y зависимы.

Определение 7. ***Произведением двух случайных величин*** X и Y называется случайная величина $X \cdot Y$, возможные значения которой есть всевозможные произведения $x_i \cdot y_j$ значений случайных величин X и Y, а вероятности этих значений равны произведению соответствующих вероятностей сомножителей.

Свойства математического ожидания:

1. $M(C)=C$, $C=const$.
2. $M(CX)=CM(X)$, $C=const$.
3. $M(X \pm Y)=M(X) \pm M(Y)$.
4. Если случайные величины X и Y независимы, то $M(X \cdot Y)=M(X) \cdot M(Y)$.

Определение 8. ***Отклонением*** случайной величины X от своего математического ожидания называется случайная величина $X-M(X)$.

Теорема 1. $M\left(X-M(X)\right)=0$.

Определение 9. ***Дисперсией*** случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения этой случайной величины от своего математического ожидания, т.е.

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2.$$

Из определений 8 и 9 следует, что дисперсия дискретной случайной величины определяется равенством

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2 p_i. \quad (1.9)$$

На практике при нахождении дисперсии удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема 2. $D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2$.

Свойства дисперсии:

1. $D(C)=0$, $C=const$.
2. $D(CX)=C^2D(X)$, $C=const$.
3. Если случайные величины X и Y независимы, то $D(X \pm Y)=D(X)+D(Y)$.

Определение 10. ***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины X называют корень квадратный из её дисперсии, т.е.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \quad (1.10)$$

Определение 11. ***Модой M_0 дискретной случайной величины*** называют такое ее значение, которое имеет наибольшую вероятность.

Определение 12. ***Начальным моментом s-го порядка*** случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины X^s, т.е.

$$\alpha_s(X) = M\left(X^s\right).$$

Из определений 5 и 12 получаем, что для дискретной случайной величины

$$\alpha_s(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s p_i .$$

Определение 13. ***Центральным моментом s-го порядка*** случайной величины X называют математическое ожидание случайной величины $\left(X - M(X)\right)^s$, т.е.

$$\mu_s\left(X\right) = M\left(X - M(X)\right)^s .$$

Из определений 5 и 13 получаем, что для дискретной случайной величины

$$\mu_s\left(X\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i - M(X)\right)^s p_i .$$

Замечание 4. Очевидно, что $\alpha_1(X) = M(X)$, $\mu_2(X) = D(X)$, $\mu_1(X) = 0$.

Задача 1. Пусть X – сумма цифр наугад выбранного целого числа из множества {14, 15, ..., 34}. Требуется: 1) построить закон распределения случайной величины X в виде таблицы и графически; 2) найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; 3) вычислить $P(3 < X \le 8)$; 4) найти M(X), D(X), σ(X).

Решение. 1) Чтобы построить закон распределения случайной величины, найдем ее возможные значения и их вероятности. Для суммы цифр чисел из множества {14, 15, ..., 34} возможны следующие значения

5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 3, 4, 5, 6, 7.

Таким образом, возможные значения случайной величины X – 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. Вычислим вероятности этих возможных значений с помощью классического определения вероятности.

p_1 = P(X = 2) = 1/21, p_2 = P(X = 3) = 2/21, p_3 = P(X = 4) = 2/21, p_4 = P(X = 5) = 3/21,

p_5 = P(X = 6) = 3/21, p_6 = P(X = 7) = 3/21, p_7 = P(X = 8) = 2/21, p_8 = P(X = 9) = 2/21,

p_9 = P(X = 10) = 2/21, p_{10} = P(X = 11) = 1/21.

Проверим выполнимость равенства (1.1).

$$\sum_{i=1}^{10} p_i = 1/21 + 2/21 + 2/21 + 3/21 + 3/21 + 3/21 + 2/21 + 2/21 + 2/21 + 1/21 = 21/21 = 1 .$$

Построим ряд распределения в виде таблицы.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p_i	1/21	2/21	2/21	3/21	3/21	3/21	2/21	2/21	2/21	1/21

Многоугольник распределения изображен на рисунке 1.2.

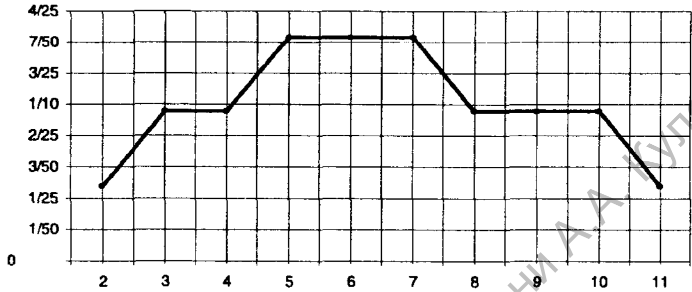


Рис. 1.2. Многоугольник распределения случайной величины из задачи 1

2) Пользуясь системой (1.4), составим функцию распределения данной случайной величины.

$$F(x)=\begin{cases} 0, \; x \le 2, \\ \dfrac{1}{21}, \; 2 < x \le 3, \\ \dfrac{3}{21}, \; 3 < x \le 4, \\ \dfrac{5}{21}, \; 4 < x \le 5, \\ \dfrac{8}{21}, \; 5 < x \le 6, \\ \dfrac{11}{21}, \; 6 < x \le 7, \\ \dfrac{14}{21}, \; 7 < x \le 8, \\ \dfrac{16}{21}, \; 8 < x \le 9, \\ \dfrac{18}{21}, \; 9 < x \le 10, \\ \dfrac{20}{21}, \; 10 < x \le 11, \\ 1, \quad x > 11. \end{cases}$$

График этой функции распределения изображен на рисунке 1.3.

3) По формуле (1.7) имеем $P(3 < X \le 8) = F(8+0) - F(3+0) = \frac{16}{21} - \frac{3}{21} = \frac{13}{21}$.

4) По определению 5 находим математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 2 \cdot \frac{1}{21} + 3 \cdot \frac{2}{21} + 4 \cdot \frac{2}{21} + 5 \cdot \frac{3}{21} + 6 \cdot \frac{3}{21} + 7 \cdot \frac{3}{21} + 8 \cdot \frac{2}{21} + 9 \cdot \frac{2}{21} + 10 \cdot \frac{2}{21} + 11 \cdot \frac{1}{21} =$$

$$= \frac{2}{21} + \frac{6}{21} + \frac{8}{21} + \frac{15}{21} + \frac{18}{21} + 1 + \frac{16}{21} + \frac{18}{21} + \frac{20}{21} + \cdot \frac{11}{21} = \frac{45}{7} \approx 6{,}43.$$

Для нахождения дисперсии воспользуемся теоремой 2. Сначала вычислим $M(X^2) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k$.

$$M(X^2) = 2^2 \cdot \frac{1}{21} + 3^2 \cdot \frac{2}{21} + 4^2 \cdot \frac{2}{21} + 5^2 \cdot \frac{3}{21} + 6^2 \cdot \frac{3}{21} + 7^2 \cdot \frac{3}{21} + 8^2 \cdot \frac{2}{21} + 9^2 \cdot \frac{2}{21} + 10^2 \cdot \frac{2}{21} + 11^2 \cdot \frac{1}{21} =$$

$$= \frac{4}{21} + \frac{18}{21} + \frac{32}{21} + \frac{75}{21} + \frac{108}{21} + 7 + \frac{128}{21} + \frac{162}{21} + \frac{200}{21} + \cdot \frac{121}{21} = \frac{995}{21} \approx 47{,}38.$$

Тогда $D(X) = 47{,}38 - 6{,}43^2 = 6{,}05$.

Согласно определению 10 среднее квадратическое отклонение случайной величины X есть $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{6{,}05} \approx 2{,}46$. ♦

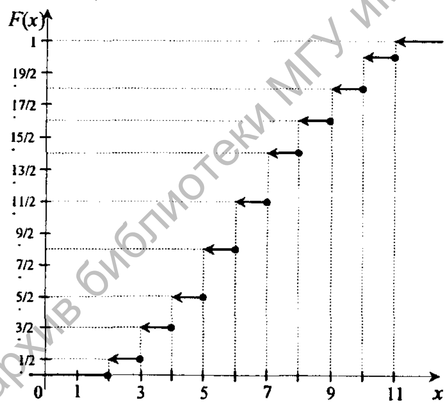


Рис. 1.3. График функции распределения случайной величины из задачи 1

Упражнения

А1. Докажите формулы (1.7).

А2. Для независимых случайных величин X и Y, заданных таблицами

x_i	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,6

y_j	-1	0	1	2
p'_j	0,2	0,3	0,4	0,1

построить закон распределения их суммы $X+Y$ и произведения $X \cdot Y$.

А3. Рассматривая неслучайную величину *a* как частный вид случайной, построить ее функцию распределения и найти математическое ожидание, дисперсию, третий начальный момент.

А4. Докажите свойства 1 и 2 математического ожидания для дискретной случайной величины.

А5. Докажите свойства 1 и 2 дисперсии для дискретной случайной величины.

В1. Случайная величина X задана следующей таблицей

x_k	-2	-1	0	1	2
p_k	0,1	0,2	0,3	0,1	0,3

Требуется: 1) построить многоугольник распределения; 2) найти функцию распределения и построить ее график; 3) найти $P(-1 \le X < 1{,}5)$, $P(0 < X < 2)$; 4) найти числовые характеристики случайной величины X (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение).

В2. Стрелок стреляет по мишени, имея всего 4 патрона. За каждое попадание ему начисляется 5 очков. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,6. Для случайной величины X – число полученных очков требуется: 1) построить ряд распределения; 2) построить многоугольник распределения; 3) найти функцию распределения и построить ее график; 4) найти $P(5 < X < 15)$; 5) найти числовые характеристики (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение).

В3. Два стрелка сделали по выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,8. Составить ряд распределения для числа попаданий в мишень. Найти функцию распределения и построить ее график.

В4. Составить таблицу распределения вероятностей для числа попаданий в мишень при 3 выстрелах, если вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 2/3.

В5. Прибор состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в отдельном опыте равна 0,1. Для случайной величины X – число отказавших элементов в одном опыте найти: 1) ряд распределения в виде таблицы; 2) функцию распределения F(x) и построить ее график; 3) числовые характеристики M(X), D(X), σ(X).

В6. Построить ряд и функцию распределения случайной величины X. Найти ее числовые характеристики M(X), D(X), σ(X).

а) В группе из **6** изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое вынутое проверяют до тех пор, пока не найдут бракованное. Случайная величина X – число проверенных изделий;

б) Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,5, для второго 0,6. Случайная величина X – общее число попаданий.

C1. Восстановите ряд распределения дискретной случайной величины по ее функции распределения

1) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}01, & 0<x\le 1,\\ 0{,}13, & 1<x\le 2,\\ 0{,}37, & 2<x\le 4,\\ 0{,}7, & 4<x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$ 2) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ 0{,}1, & -2<x\le -1,\\ 0{,}4, & -1<x\le 1,\\ 0{,}9, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

C2. Составить таблицу распределения вероятностей для суммы очков, выпавших при бросании двух игральных костей.

C3. Найти функцию распределения для числа выпадений герба при двух подбрасываниях монеты и построить ее график.

C4. В тесте студенту предлагается ответить на 8 вопросов. За каждый правильный ответ он получает 2 балла. Вероятность правильного ответа на вопрос равна 0,7. Для CB X – число, заработанных студентов баллов, требуется: 1) построить ряд распределения; 2) построить многоугольник распределения; 3) найти функцию распределения и построить ее график; 4) найти $P(3\le X\le 8)$, $P(4<X<16)$; 5) найти числовые характеристики CB X (математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение).

C5. Два студента независимо друг от друга решают домашнее задание, состоящее из двух задач. Вероятность решить любую из этих задач для первого студента равна 0,7, а для второго – 0,8. Для случайной величины $Y=X_1-X_2$, где X_i, $i=1,2$, – число задач, решенных i-ым студентом, построить ряд распределения и найти числовые характеристики M(X), D(X), σ (X).

C6. Построить ряд и функцию распределения случайной величины X. Найти ее числовые характеристики M(X), D(X), σ(X).

а) Из урны, содержащей три белых и пять черных шаров, наугад извлекают три шара. Случайная величина X – число вынутых черных шаров;

б) Охотник, имеющий пять патронов, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Случайная величина X –число израсходованных патронов.

D1. Докажите свойства 3 для математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.

D2. На рисунке 1.4. изображены вложенные друг в друга прямоугольники, длины сторон которых равны возможным значениям x_k CB X, а высоты – вероятностям p_k этих значений, $k=\overline{1,n}$. Известно, что площадь каждого последующего прямоугольника больше площади предыдущего в 2 раза. Найти число n возможных значений СВ X, если $x_1 = 1$, $p_1 = 0,1$, $M(X) = 204,7$.

D3. Закон распределения СВ X имеет вид

x_k	x_1	x_2	x_3
p_k	p_1	0,4	p_3

Найти $P(X = x_3)$, если известно, что $p_3 = 2p_1$.

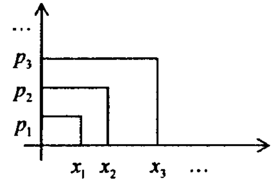


Рис. 1.4. Рисунок к задаче D2.

D4. Вероятность получения герба при каждом из пяти бросаний монеты равна 0,5. Составить ряд распределения отношения числа X появлений герба к числу Y появлений цифры.

Тема 2
Одномерные случайные величины непрерывного типа

Определение 1. Одномерная случайная величина X называется ***непрерывной*** случайной величиной (или случайной величиной ***непрерывного типа***), если:

1) ее возможные значения сплошь заполняют промежуток (или несколько промежутков) числовой оси;

2) существует такая неотрицательная функция $f(x)$, называемая ***плотностью распределения вероятности***, что вероятность попадания случайной величины X в промежуток $[\alpha;\beta]$ равна определенному интегралу от $f(x)$ по этому промежутку, т.е.

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{2.1}$$

Плотность распределения вероятности $f(x)$ целесообразно рассматривать как функцию, определенную на всей вещественной оси Ox. В тех промежутках, где нет значений случайной величины, плотность принимается равной 0.

***Свойства плотности распределения вероятности*:**

1. $f(x) \geq 0$, $\forall x \in (-\infty;+\infty)$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

3. $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = 0$.

Плотность распределения вероятностей $f(x)$ часто называют ***дифференциальной функцией распределения.***

Из определения 4 темы 1 и формулы (2.1) получаем, что для непрерывной случайной величины функция распределения определяется из равенства

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (2.2)$$

Из равенства (2.2) следует, что функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины является первообразной для ее плотности распределения вероятности $f(x)$.

Для функции распределения непрерывной случайной величины справедливы все свойства функции распределения, перечисленные в теме 1.

Так как для непрерывной случайной величины вероятность принять отдельно взятое значение равна 0, т.е. $P(X = x_0) = 0$, то, в силу формул (1.5) и (1.7), имеют место равенства

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \qquad (2.3)$$

Определение 2. ***Математическим ожиданием*** $M(X)$ непрерывной случайной величины X называется число, определяемое равенством

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \qquad (2.4)$$

Из определения 9 темы 1 и определения 2 получаем

Определение 3. ***Дисперсией*** $D(X)$ непрерывной случайной величины X называется число, определяемое равенством

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx. \qquad (2.5)$$

Замечание 1. Для математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины справедливы все их свойства, перечисленные в теме 1.

Определение 4. Медианой M_e случайной величины X называется такое её значение x_0, для которого выполняется равенство $P(X < x_0) = P(X > x_0)$.

Замечание 2. В случае распределения, симметричного относительно своего математического ожидания, медиана совпадает с математическим ожиданием. Поэтому понятие медианы иногда используют, как характеристику асимметричности распределения.

Вычисляется медиана из условия $F(x)=\frac{1}{2}$.

Определение 5. Мода M_0 непрерывной случайной величины с плотностью вероятности $f(x)$ есть точка x_0 максимума плотность вероятности $f(x)$.

Если многоугольник распределений (кривая распределения) имеет более одного максимума, распределение называют ***полимодальным***.

Из определения 12 темы 1 и определения 2 следует, что ***начальный момент s-го порядка*** непрерывной случайной величины X можно вычислить по формуле

$$\alpha_s(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)dx.$$

Из определения 13 темы 1 и определения 2 получаем, что ***центральный момент s-го порядка*** непрерывной случайной величины X находится из равенства

$$\mu_s(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^s f(x)dx.$$

Задача 1. Плотность распределения вероятности случайной величины X задана формулой

$$f(x)=\begin{cases} c(2x+x^2), & 0\le x\le 4,\\ 0, & x<0,\ x>4.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент с; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность попадания величины X вне интервала (2,5; 3);

д) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. а) Для определения коэффициента c воспользуемся свойством 2 плотности распределения вероятности. Находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\int_0^4 c(2x+x^2)dx+\int_4^{+\infty}0\cdot dx=c\int_0^4(2x+x^2)dx=c\left(x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=c\left(16+\frac{64}{3}\right)=c\frac{112}{3}.$$

Из равенства $c\frac{112}{3}=1$ получаем $c=\frac{3}{112}$.

б) Для нахождения функции распределения воспользуемся равенством (2.2).

Если $0\le x\le 4$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dt+\int_0^x\frac{3}{112}(2t+t^2)dt=\frac{3}{112}\left(t^2+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^x=\frac{3}{112}\left(x^2+\frac{x^3}{3}\right).$$

Тогда

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{3}{112}\left(x^2+\dfrac{x^3}{3}\right), & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

в) Из равенства (2.4) получаем

$$M(X)=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\frac{3}{112}\int_{0}^{4}x\left(2x+x^2\right)dx+\int_{4}^{+\infty}0\cdot dx=\frac{3}{112}\left(2\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{3}{112}\left(\frac{128}{3}+64\right)=\frac{320}{112}\approx 2{,}86\,.$$

Для нахождения дисперсии случайной величины X воспользуемся формулой $D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2$.

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx\,.$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{0}0\cdot dx+\frac{3}{112}\int_{0}^{4}x^2\left(2x+x^2\right)dx+\int_{4}^{+\infty}0\cdot dx=\frac{3}{112}\left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{3}{112}(128+204{,}8)=\frac{998{,}4}{112}\approx 8{,}91\,.$$

$$D(X)=8{,}91-(2{,}86)^2=0{,}7304\,.$$

г) Из равенства (2.3) получаем

$$P(2{,}5<X<3)=F(3)-F(2{,}5)=\frac{3}{112}(9+9)-\frac{3}{112}\left(6{,}25+\frac{15{,}625}{3}\right)=$$

$$=\frac{3}{112}\left(18-\frac{34{,}375}{3}\right)=\frac{19{,}625}{112}\approx 0{,}18$$

Вероятность того, что случайная величина X попадет вне интервала (2,5; 3) находится по формуле для вероятностей противоположных событий

$$P(X\notin(2{,}5;3))=1-P(2{,}5<X<3)=1-0{,}18=0{,}82\,.$$

д) Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ изображены на рисунках 2.1 и 2.2 соответственно.♦

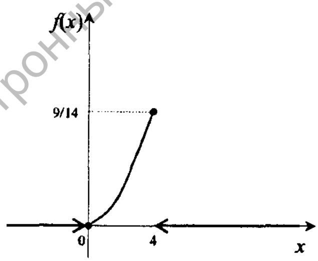


Рис. 2.1. График функции $f(x)$ из задачи 1

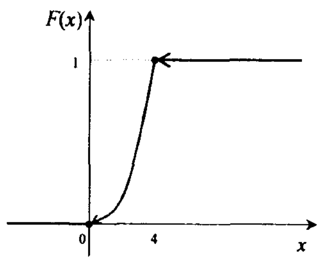


Рис. 2.2. График функции $F(x)$ из задачи 1

Упражнения

А1. Может ли при каком-либо значении аргумента быть:

1) функция распределения больше единицы?
2) плотность распределения вероятности больше единицы?
3) функция распределения отрицательной?
4) плотность распределения вероятности отрицательной?

А2. Какова размерность: 1) функции распределения; 2) плотности распределения вероятности; 3) математического ожидания; 4) дисперсии; 5) среднего квадратического отклонения; 6) третьего начального момента?

А3. Каково должно быть a, чтобы функция $f(x) = ae^{-x^2}$ являлась плотностью распределения вероятности случайной величины X, изменяющейся в бесконечных пределах?

А4.Докажите свойства 1 и 2 математического ожидания для непрерывной случайной величины.

А5. Докажите свойства 1 и 2 дисперсии для непрерывной случайной величины.

В1. Какая из функций $y_1 = \frac{1}{1+x^2}$, $y_2 = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$, $y_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\, x$ может быть функцией распределения непрерывной случайной величины X?

В2. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \ge \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\cos x}{2}, & |x| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения и построить графики плотности распределения вероятности и функции распределения.

В3. Найти плотность вероятности случайной величины X с функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{\pi}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right), & 0 < x < \pi, \\ 1, & x \ge \pi. \end{cases}$$

В4. Зная, что плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X задана равенством $f(x) = \begin{cases} a\cos^2 x, & -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$ определить: 1) коэффициент a; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) $P\left(0 \le X \le \frac{\pi}{4}\right)$; 4) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

B5. Случайная величина X имеет плотность распределения вероятности

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ae^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

Найти: 1) постоянную a; 2) $P(0<X\le 2)$; 3) функцию распределения случайной величины X; 4) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

C1. Функция распределения случайной величины X имеет вид $F(x)=a+b\,arctg\dfrac{x}{2}$, $x\in R$ (закон Коши). Найти: а) постоянные a и b; б) плотность вероятности.

C2. Случайная величина X имеет плотность распределения вероятности $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$, $x\in R$. Найти: 1) коэффициент a; 2) функцию распределения случайной величины X; 3) $P(-1<X<1)$.

C3. Случайная величина X имеет плотность распределения вероятности $f(x)=ae^{-|x|}$. Найти: 1) постоянную a; 2) $P(0<X<1)$; 3) функцию распределения случайной величины X; 4) математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

C4. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины имеет вид $f(x)=\begin{cases}ax, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x<0,\ x>2.\end{cases}$ Требуется: 1) найти коэффициент a; 2) определить функцию распределения $F(x)$; 3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$; 4) вычислить вероятности $P(0\le X<1)$, $P\left(-2<X<\dfrac{1}{2}\right)$, $P\left(\dfrac{3}{2}<X<4\right)$; 5) найти числовые характеристики случайной величины X (M(X), D(X),σ(X)).

C5. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины имеет вид $f(x)=\begin{cases}a(x+1), & -1\le x\le 1,\\ 0, & x<-1,\ x>1.\end{cases}$ Требуется: 1) найти коэффициент a; 2) определить функцию распределения $F(x)$; 3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$; 4) вычислить вероятности $P(0\le X<1)$, $P\left(-2<X<\dfrac{1}{4}\right)$, $P\left(\dfrac{1}{2}<X<2\right)$; 5) найти числовые характеристики случайной величины X (M(X), D(X),σ(X)).

C6. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ ax^2 & при\ 0<x\le 14,\\ 1 & при\ x>14,\end{cases}$$

Требуется: 1) определить функцию распределения $f(x)$; 2) найти коэффициент a; 3) построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$; 4) вычислить вероятность $P(7 \le X < 14)$; 5) найти числовые характеристики случайной величины X (M(X), D(X),σ(X)).

D1. Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэлея $F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x \ge 0$. Найти: а) моду распределения; б) медиану распределения; в) плотность распределения вероятности $f(x)$.

Тема 3
Основные законы распределения одномерных случайных величин

Определение 1. Случайная величина X называется ***распределенной по биномиальному закону***, если ее возможные значения 0, 1, 2, …, *n*, а соответствующие этим значениям вероятности вычисляются по формуле Бернулли

$$p_k = P(X = k) = P_{m,n} = C_n^k p^k q^{n-k}, \ k = \overline{0,n}. \qquad (3.1)$$

Определение 2. Дискретная случайная величина называется ***равномерно распределенной***, если она принимает n различных значений x_1, x_2, …, x_n с соответствующими вероятностями $p_k = \frac{1}{n}$, $k = \overline{1,n}$.

Определение 3. Случайная величина X, принимающая целые неотрицательные значения 0, 1, 2, …, называется ***распределенной по закону Пуассона***, если вероятности этих возможных значений находятся по формуле Пуассона

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \ k = 0,1,2,... \qquad (3.2)$$

Определение 4. Непрерывная случайная величина называется ***равномерно распределенной или имеющей равномерное распределение***, если ее плотность распределения вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < a, \ x > b, \\ \dfrac{1}{b-a}, \ a \le x \le b. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Функция распределения равномерно распределенной случайной величины определяется формулой

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a},\ a<x\le b,\\ 1,\ x>b.\end{cases} \qquad (3.4)$$

Вероятность попадания в промежуток $|\alpha;\beta|$ для этой случайной величины в зависимости от расположения значений α и β на числовой оси будет равна

$$P(X\in|\alpha;\beta|)=\begin{cases}0,\ \alpha,\beta\le a \ \text{или}\ \alpha,\beta>b,\\ \dfrac{\beta-a}{b-a},\ \alpha\le a<\beta,\\ \dfrac{\beta-\alpha}{b-a},\ a<\alpha<\beta\le b,\\ \dfrac{b-\alpha}{b-a},\ a<\alpha\le b<\beta.\end{cases} \qquad (3.5)$$

Определение 5. Непрерывная случайная величина X называется ***показательно распределенной или имеющей показательное распределение***, если ее плотность вероятности имеет вид $f(x)=\begin{cases}0,\ x<0,\\ \mu e^{-\mu x},\ x\ge 0.\end{cases}$

Функция распределения показательно распределенной случайной величины определяется формулой

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0,\\ 1-e^{-\mu x},\ x>0.\end{cases} \qquad (3.6)$$

Вероятность попадания в промежуток $|\alpha;\beta|$ для этой случайной величины в зависимости от расположения значений α и β на числовой оси будет равна

$$P(X\in|\alpha;\beta|)=\begin{cases}0,\ \alpha,\beta\le 0,\\ 1-e^{-\mu\beta},\ \alpha\le 0<\beta,\\ e^{-\mu\alpha}-e^{-\mu\beta},\ 0<\alpha<\beta.\end{cases} \qquad (3.7)$$

Определение 6. Непрерывная случайная величина X называется ***нормально распределенной*** или ***распределенной по закону Гаусса***, если ее плотность распределения вероятности имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (3.8)$$

Функция распределения нормально распределенной случайной величины определяется формулой

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \qquad (3.9)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Вероятность попадания в промежуток $|\alpha;\beta|$ для этой случайной величины будет равна

$$P(X \in |\alpha;\beta|) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (3.10)$$

Вероятность того, что нормально распределенная случайная величина X отклонится (по модулю) от математического ожидания a не более, чем на δ, равна

$$P(|X - a| \le \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (3.11)$$

Таблица 3.1

Числовые характеристики некоторых распределений

Распределения	Числовые характеристики		
	M(X)	D(X)	σ(X)
Дискретные			
1. Биномиальное	np	npq	$\sqrt{npq}$
2. Пуассона	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
3. Равномерное со значениями $x_i = i,\ i = \overline{1, n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$
Непрерывные			
1. Равномерное	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
2. Показательное	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{\mu^2}$	$\frac{1}{\mu}$
3. Нормальное	a	σ^2	σ

Задача 1. Производится 20 независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Для случайной величины X – число появлений события A в 20 опытах найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, вероятность попадания в промежуток $(3;8)$.

Решение. Случайная величина X распределена по биномиальному закону. По условию n = 20, p = 0,4, q = 1 – p = 0,6. Пользуясь таблицей 3.1, находим $M(X)$ = np = 20·0,4 = 8, $D(X)$ = npq = 20·0,4·0,6 = 4,8, $\sigma(X)$ = $= \sqrt{D(X)} = \sqrt{4,8} \approx 2,19$. Согласно формуле (3.1) имеем

$$P(X \in (3;8)) = \sum_{k=4}^{7} P(X = k) = \sum_{k=4}^{7} C_{20}^{k} \cdot p^k \cdot q^{20-k} = \sum_{k=4}^{7} C_{20}^{k} \cdot 0,4^k \cdot 0,6^{20-k} = 0,0350 + 0,0746 +$$

$$+ 0,1244 + 0,1659 = 0,3999 .$$ ♦

Задача 2. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с математическим ожиданием равным 3. Найти: а) вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание; б) вероятность того, что величина X примет положительное значение.

Решение. Из таблицы 3.1. следует, что $M(X)=\lambda=3$. Используя формулу (3.2), получаем

а) $P(X<3)=\sum_{k=0}^{2}P(X=k)=\sum_{k=0}^{2}\frac{3^k e^{-3}}{k!}=e^{-3}\left(1+3+\frac{9}{2}\right)=\frac{17}{2e^3}\approx 0{,}4232$;

б) $P(X>0)=1-P(X=0)=1-e^{-3}=0{,}9502$. ♦

Задача 3. Записать плотность распределения вероятности, функцию распределения, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, распределенной равномерно в интервале $(0;2)$. Вычислить вероятности $P(1<X<1{,}5)$, $P(-3<X<0{,}4)$.

Решение. Так как по условию $a=0$, $b=2$, согласно формулам (3.3) и (3.4) находим

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\ x>2,\\ \frac{1}{2}, & 0\le x\le 2.\end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Из таблицы 3.1 имеем $M(X)=\frac{a+b}{2}=1$, $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{1}{3}$. Из равенств (3.5) получаем $P(1<X<1{,}5)=\frac{1{,}5-1}{2}=0{,}25$, $P(-3<X<0{,}4)=\frac{0{,}4-0}{2}=0{,}2$. ♦

Задача 4. Случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 3e^{-3x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Записать функцию распределения этой случайной величины и найти для нее математическое ожидание, дисперсию, вероятность $P(0{,}13<X<0{,}7)$.

Решение. По функции $f(x)$ определяем, что параметр $\mu=3$. Тогда в силу формулы (3.6) получаем

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-3x}, & x>0.\end{cases}$$

По таблице 3.1 находим $M(X)=\frac{1}{\mu}=\frac{1}{3}$, $D(X)=\frac{1}{\mu^2}=\frac{1}{9}$. Из равенств (3.7) имеем

$$P(0{,}13<X<0{,}7)=e^{-\mu\alpha}-e^{-\mu\beta}=e^{-0{,}39}-e^{-2{,}1}\approx 0{,}5546.\ ♦$$

Задача 5. Заданы математическое ожидание $a=11$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma=4$ нормально распределенной случайной величины X. Записать плотность вероятности и функцию распределения случайной величины X. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (13; 23); б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения X – *a* окажется меньше 6.

Решение. Из соотношений (3.8) и (3.9) следует, что для данной случайной величины плотность вероятности и функция распределения соответственно имеют вид

$$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-11)^2}{32}},\quad F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-11}{4}\right).$$

а) С помощью равенства (3.10) находим

$$P(13<X<23)=\Phi\left(\frac{23-11}{4}\right)-\Phi\left(\frac{13-11}{4}\right)=\Phi(3)-\Phi(0,5)=0,49865-0,1915=0,30715\cdot$$

б) В силу формулы (3.11) имеем $P(|X-11|\le 6)=2\Phi\left(\frac{6}{4}\right)=2\Phi(1,5)=2\cdot 0,4332=0,8664$. ♦

Упражнения.

А1. Убедитесь в справедливости формул (3.5), (3.7).

А2. Докажите равенство (3.11).

В1. Стрельба ведется по наблюдаемой цели. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,4 и от выстрела к выстрелу не меняется. Вычислить математическое ожидание и дисперсию СВ X – числа попаданий при 50 выстрелах.

В2. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

В3. СВ X распределена равномерно в промежутке (2; 8). Записать плотность распре еления вероятности и функцию распределения этой СВ и построить графики этих функций. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение СВ X.

В4. Математическое ожидание нормально распределенной СВ X равно 3 и среднее квадратическое отклонение 2. Написать плотность распределения вероятности СВ X.

В5. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной СВ X соответственно равны 10 и 2. Найти P(12 < X < 14).

В6. Производится стрельба по цели из артиллеристского орудия. Принимая, что дальность полета снаряда имеет нормальное распределение с дисперсией, равной 900, рассчитать, какой процент выпускаемых снарядов будет иметь перелет от 20 до 50 м.

В7. Сколько испытаний случайного события с вероятностью появления p = 0,01 в каждом испытании надо произвести, чтобы с вероятностью большей 0,95, быть уверенным, что событие произойдет хотя бы один раз?

B8. Автомат штампует детали. Контролируемая длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактическая длина изготовленных деталей не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) менее 40 мм.

B9. Случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0{,}04\,e^{-0{,}04x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Записать функцию распределения этой случайной величины и найти для нее математическое ожидание, дисперсию, вероятность $P(1<X<2)$.

C1. Завод отправил на базу 5000 радиоламп. Вероятность того, что в пути лампа будет повреждена равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут не более трех поврежденных ламп. Найти среднее число поврежденных ламп.

C2. СВ X распределена по нормальному закону с M(X) = 30 и D(X) = 4. Найти такое δ, чтобы вероятность выполнения неравенства |X – 30| < δ равнялась 0,8.

C3. СВ X имеет равномерное распределение с математическим ожиданием M(X) = 3 и дисперсией D(X) = 4/3. Найти функцию распределения СВ X и построить ее график.

C4. Станок-автомат изготовляет детали, длина которых по стандарту не более, чем 0,5 мм. Среди продукции станка 7% нестандартной. Считая, что длины деталей имеют нормальное распределение, найти их дисперсию.

C5. За рассматриваемый период времени среднее число ошибочных соединений, приходящееся на одного телефонного абонента, равно 8. Какова вероятность того, что для данного абонента число ошибочных соединений будет больше 4?

C6. Нормально распределенная случайная величина X задана своими параметрами a = 3 (математическое ожидание) и σ = 1 (среднее квадратическое отклонение). Требуется:

а) написать плотность вероятности и схематически изобразить ее график;

б) найти вероятность того, что X примет значение из интервала (4; 6);

в) найти вероятность того, что X отклонится (по модулю) от a не более, чем на $\delta = 2$.

C7. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром μ = 0,1. Записать плотность распределения вероятности и функцию распределения случайной величины X и построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию, вероятность $P(0{,}1<X<0{,}2)$.

C8. Телефонная станция получает в среднем 20 вызовов в минуту. Какова вероятность того, что за 6 секунд она получит ровно 3 вызова?

C9. Случайная величина X – число появлений цифры при16 подбрасываниях монеты. Найти математическое ожидание, дисперсию, вероятность $P(4 < X < 12)$.

D1. Случайная величина X распределена по «закону прямоугольного треугольника» в интервале (0; a) (см. рис. 3.1). Требуется: а) написать выражение плотности распределения вероятности; б) найти функцию распределения $F(x)$; в) найти вероятность попадания случайной величины X в промежуток $\left(\frac{a}{2}; a\right)$.

D2. Случайная величина X подчинена закону Симпсона («закону равнобедренного треугольника») на промежутке $(-a; a)$ (см. рис. 3.2). Записать плотность распределения вероятности, найти функцию распределения и построить ее график, найти числовые характеристики случайной величины X (M(X), D(X),σ(X)).

D3. Обследуется группа животных; каждое из них с вероятностью p является больным. Обследование производится путем анализа крови. Если смешать кровь n животных, то анализ этой смеси будет положительным, если среди n животных будет хотя бы одно больное. Требуется обследовать большое число N животных. Предлагается два способа обследования:

1) обследовать всех N животных; в этом случае нужно провести N анализов;

2) вести обследование по группам, смешав сначала кровь группы из n животных; если анализ отрицательный, считать, что все животные группы здоровы и переходить к следующей группе из n животных; если анализ положительный, обследовать каждое из n животных и после этого переходить к следующей группе ($n > 1$).

Определить какой способ обследования выгоднее – первый или второй – в смысле минимального среднего числа анализов. Определить при каком $n = n^*$ для обследования группы животных потребуется в среднем наименьшее число анализов.

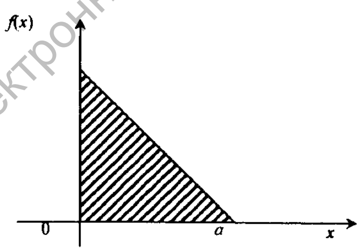


Рис. 3.1

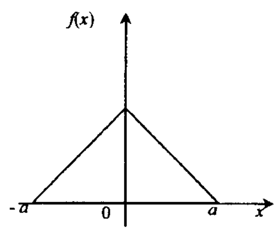


Рис. 3.2

Тема 4

Многомерные случайные величины дискретного типа

Определение 1. Случайная величина (X, Y) называется ***двумерной***, если ее возможные значения определяются парами чисел (x, y). Случайные величины X и Y называются ***составляющими*** двумерной случайной величины и представляют собой одномерные случайные величины.

Определение 2. Двумерная случайная величина (X, Y) называется ***дискретной***, если ее составляющие дискретные случайные величины.

Аналогичным образом вводятся понятия случайных величин трех и более размерностей. Многомерные случайные величины еще называют системами случайных величин, а составляющие – слагаемыми системы.

Геометрически двумерная случайная величина (X, Y) интерпретируется на плоскости xOy либо как случайная точка (X, Y), либо как случайный вектор, направленный из начала координат в точку (X, Y).

Если дискретная двумерная случайная величина (X, Y) задана с помощью таблицы 4.1, то можно составить таблицу распределения для каждой составляющей (см. табл. 4.2, 4.3).

Таблица 4.1

Распределение дискретной двумерной случайной величины (X, Y)

$Y \backslash X$	x_1	x_2	…	x_n	p_i
y_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}	p_1
y_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}	p_2
…	…	…	…	…	…
y_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}	p_m
p'_j	p'_1	p'_2	…	p'_n	1

Таблица 4.2

Таблица распределения составляющей X

X	x_1	x_2	…	x_n
p'_j	p'_1	p'_2	…	p'_n

Таблица 4.3

Таблица распределения составляющей Y

Y	y_1	y_2	…	y_m
p_i	p_1	p_2	…	p_m

Чтобы заполнить вторую строку в таблице 4.2 (таблице 4.3), надо просуммировать соответствующие заполняемой ячейке вероятности из таблицы 4.1 по столбцу (по строке), т.е. воспользоваться формулами

$$p'_j = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}, \qquad p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}.$$

Определение 3. Функцией распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность одновременного появления событий $X < x$ и $Y < y$, $x, y \in R$, т.е.

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y), \ x, \ y \in R. \qquad (4.1)$$

Геометрически равенство (4.1) означает, что функция $F(x, y)$ есть вероятность попадания точек с координатами (x, y) в бесконечный прямоугольник $\Pi = \{(x, y) \in R^2 \mid X < x, Y < y\}$ (заштрихованная на рисунке 4.1 область).

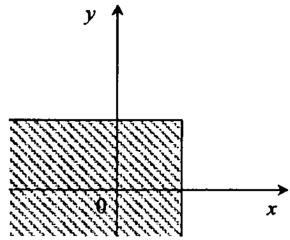


Рис. 4.1

Свойства функции распределения F(x, y):

1. $0 \le F(x, y) \le 1, \ \forall (x, y) \in R^2$.
2.

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} F(x, y) = 0, \ F(x, -\infty) = \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = 0,$$

$$F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = F_2(y), \ F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F_1(x),$$

$$F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1,$$

где $F_1(x)$, $F_2(y)$ – функции распределения составляющих X и Y соответственно.

3. $F(x, y)$ – неубывающая функция по обоим аргументам.
4. Справедливы равенства

$$P(x_1 < X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y),$$

$$P(x < X, y_1 < Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1),$$

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \qquad (4.2)$$

Определение 4. Двумерная случайная величина (X, Y) называется ***независимой***, если закон распределения каждой из ее составляющих не зависит от того, какие возможные значения принимаются другой составляющей.

Теорема 1. Для того чтобы составляющие X и Y двумерной случайной величины (X, Y) были независимы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Зависимость между составляющими характеризуется с помощью условных законов распределения, которые вводятся в случае зависимых составляющих.

Определение 5. Вероятность события $X = x_i$, вычисленная при условии, что событие $Y = y_j$ произошло, называется ***условной вероятностью*** этого события и обозначается $p(X = x_i | Y = y_j)$ или $p(x_i | y_j)$ при фиксированных i, j.

Определение 6. ***Условным законом распределения*** случайной величины, входящей в системы случайных величин, называется ее закон распределения, найденный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Применяя формулу условной вероятности события, для дискретных случайных величин, заданных системой 4.1, можно записать формулы, определяющие условные законы распределения

$$p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p_{ji}}{p_j}, \quad p(y_j | x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)} = \frac{p_{ji}}{p_i'}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}. \qquad (4.3)$$

Определение 7. ***Условным математическим ожиданием*** дискретной случайной величины Y при $X = x$ называется величина

$$M(Y | X = x) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j | x). \qquad (4.4)$$

Такие числовые характеристики двумерной случайной величины, как математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, определяются через соответствующие числовые характеристики составляющих и представляют собой пары чисел

$$M(X,Y) = (M(X), M(Y)), \quad D(X,Y) = (D(X), D(Y)), \quad \sigma(X,Y) = (\sigma(X), \sigma(Y)), \qquad (4.5)$$

которые для дискретной случайной величины находятся в соответствии с формулами (1.8) – (1.10).

Определение 8. ***Начальным моментом порядка*** $k + s$ случайной величины (X, Y) называется величина

$$\alpha_{k,s}(X,Y) = M(X^k Y^s).$$

Определение 9. ***Центральным моментом порядка*** $k + s$ случайной величины (X, Y) называется величина

$$\mu_{k,s}(X,Y) = M\left((X - M(X))^k (Y - M(Y))^s\right).$$

Из определений 8, 9 и равенства (1.8) получаем формулы для нахождения моментов дискретных двумерных случайных величин, заданных таблицей 4.1,

$$\alpha_{k,s}(X,Y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i^k y_j^s p_{ji}, \quad \mu_{k,s}(X,Y) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k (y_j - M(Y))^s p_{ji}. \qquad (4.6)$$

Для характеристики связи между составляющими служат корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Определение 10. ***Корреляционным моментом*** $k(X,Y)$ случайной величины (X,Y) называется центральный момент порядка 1+1, т.е.

$$k(X,Y)=\mu_{1,1}(X,Y)=M((X-M(X))(Y-M(Y))).$$

Из формулы (4.6) и определения 10 следует, что для дискретной случайной величины (X,Y) корреляционный момент находится из равенства

$$k(X,Y)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))p_{ij}\,. \qquad (4.7)$$

Свойства корреляционного момента $k(X, Y)$:

1. $k(X,Y)=M(X\cdot Y)-M(X)M(Y)$.
2. Если случайные величины X и Y независимы, то $k(X, Y) = 0$.
3. $k(CX,Y)=Ck(X,Y)$, $k(X,CY)=Ck(X,Y)$, где C – произвольная постоянная.
4. $k\left(\sum_i X_i,Y\right)=\sum_i k(X_i,Y)$.
5. $|k(X,Y)|\le\sqrt{D(X)D(Y)}$.

Определение 11. ***Коэффициентом корреляции*** $r_{x,y}$ случайной величины (X, Y) называется безразмерная величина

$$r_{x,y}=\frac{k(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\,. \qquad (4.8)$$

Свойства коэффициентом корреляции $r_{x,y}$:

1. $|r_{x,y}|\le 1$.
2. Если случайные величины X и Y независимы, то $r_{x,y} = 0$.
3. Если между случайными величинами X и Y линейная зависимость, т.е. $Y=aX+b$, то $|r_{x,y}|=1$, причем знак коэффициента корреляции определяется знаком коэффициента a.

Определение 12. Случайные величины X и Y называются ***некоррелированными***, если их корреляционный момент (коэффициент корреляции) равен нулю.

Замечание 1. Равенство $r_{x,y}=0$ не всегда означает независимость случайных величин X и Y, т.е. из независимости случайных величин всегда следует их некоррелированность, а вот из некоррелированности не всегда следует независимость.

Замечание 2. Для случайных величин, распределенных по нормальному закону, некоррелированность равносильна независимости.

Определение 13. ***Корреляционной матрицей n-мерной случайной величины*** $(X_1,...,X_n)$ называется матрица, составленная из корреляционных моментов всех этих величин, взятых попарно

$$\left\|k(X_i,X_j)\right\| = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (4.9)$$

где $k_{ij} = k(X_i,X_j)$ – корреляционный момент случайных величин X_i, X_j.

Замечание 3. Корреляционная матрица симметрична относительно главной диагонали, так как $k_{ij} = k_{ji}$.

Замечание 4. По главной диагонали корреляционной матрицы стоят дисперсии случайных величин $X_1,...,X_n$, так как $k_{ii} = D(X_i)$.

Определение 14. ***Нормированной корреляционной матрицей n-мерной случайной величины*** $(X_1,...,X_n)$ называется матрица, составленная из коэффициентов корреляции всех этих величин, взятых попарно

$$\left\|r_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4.10)$$

где $r_{ij} = \dfrac{k(X_i,X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)}$ – коэффициент корреляции случайных величин X_i, X_j.

Задача 1. Два стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу, каждый по своей мишени. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка; случайная величина Y – второго стрелка. Вероятность непопадания в мишень для первого стрелка равна q_1, для второго стрелка q_2. Построить функцию распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y). Вычислить вероятность попадания случайной величины (X, Y) в прямоугольник $\Pi = \left\{(x,y) \in R^2 \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{4}\right\}$.

Решение. Так как случайные величины X и Y по условию задачи независимы, то

$$F(x, y) = F_1(x)\, F_2(y).$$

Законы распределения случайных величин X и Y имеют вид

x_i	0	1
p_i	q_1	$1-q_1$

y_j	0	1
p'_j	q_2	$1-q_2$

Пользуясь формулой (1.4) для функции распределения одномерной случайной величины, составим функции распределения составляющих X и Y.

$$F_1(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ q_1, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases} \qquad F_2(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ q_2, & 0<y\le 1,\\ 1, & y>1.\end{cases}$$

Значения функции $F(x, y)$ занесем в таблицу 4.4.

Таблица 4.4

Значения функции распределения $F(x, y)$ из задачи 1

$Y\backslash X$	$x\le 0$	$0<x\le 1$	$x>1$
$y\le 0$	0	0	0
$0<y\le 1$	0	q_1q_2	q_2
$y>1$	0	q_1	1

Согласно равенству (4.2) имеем

$$P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2},0<Y<\frac{1}{4}\right)=F\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)-F\left(\frac{1}{2};0\right)+F\left(-\frac{1}{2};0\right)=$$

$$=q_1q_2-0-0+0=q_1q_2.\blacklozenge$$

Задача 2. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан таблицей

$Y\backslash X$	0	1
0	0,1	0,2
14	0,3	c

c – const. Найти c, числовые характеристики $M(X,Y)$, $D(X,Y)$, $\sigma(X,Y)$ случайной величины (X, Y), коэффициент корреляции. Проверить являются ли случайные величины X и Y зависимыми. Если да, то составить условные законы распределения и найти условные математические ожидания.

Решение. Постоянную c найдем из свойства дискретной двумерной случайной величины, согласно которому сумма вероятностей всех ее значений равна единице, т.е.

$$0,1+0,2+0,3+c=1.$$

Отсюда $c = 0,4$.

Таким образом, закон распределения данной случайной величины определяется таблицей 4.5.

Таблица 4.5

Закон распределения случайной величины (X, Y) из задачи 2

$Y\backslash X$	0	1	p_i
0	0,1	0,2	0,3
14	0,3	0,4	0,7
p'_j	0,4	0,6	

Здесь p_i – вероятности значений случайной величины X, p'_j – вероятности значений случайной величины Y.

Найдем числовые характеристики двумерной случайной величины (X, Y), для чего вычислим числовые характеристики составляющих.

$$M(X)=\sum x_j p'_j = 0\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}6 = 0{,}6\,,\; M(Y)=\sum y_i p_i = 0\cdot 0{,}3 + 14\cdot 0{,}7 = 9{,}8\,.$$

$$M(X^2)=\sum x_j^2 p'_j = 0^2\cdot 0{,}4 + 1^2\cdot 0{,}6 = 0{,}6\,,\; M(Y^2)=\sum y_i^2 p_i = 0^2\cdot 0{,}3 + 14^2\cdot 0{,}7 = 137{,}2\,.$$

По теореме 2 темы 1 получаем

$$D(X)=0{,}6-0{,}6^2=0{,}24\,,\; D(Y)=137{,}2-9{,}8^2=41{,}16\,.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{41{,}16}=6{,}4156\,,\; \sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{0{,}24}=0{,}4899\,.$$

Таким образом, согласно (4.5) имеем

$$M(X,Y)=(0{,}6;\,9{,}8),\; D(X,Y)=(0{,}24;\,41{,}16),\; \sigma(X,Y)=(6{,}4156;\,0{,}4899)\,.$$

Так как

$$M(XY)=\sum x_i y_j p_{ij} = 0\cdot 0\cdot 0{,}1 + 0\cdot 1\cdot 0{,}2 + 14\cdot 0\cdot 0{,}3 + 14\cdot 1\cdot 0{,}4 = 5{,}6\,,$$

то по свойству 1 корреляционного момента находим

$$k(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y)=5{,}6-0{,}6\cdot 9{,}8=-0{,}28\,.$$

По формуле (4.8) получаем коэффициент корреляции

$$r_{x,y}=\frac{k(XY)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{-0{,}28}{6{,}4156\cdot 0{,}4899}=-0{,}09\,.$$

Так как коэффициент корреляции отличен от нуля, то случайные величины X и Y зависимыми.

Составим условный закон распределения случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение 0. Для этого по формулам (4.3) найдем условные вероятности

$$p(X=0|\,Y=0)=\frac{p_{11}}{p_1}=\frac{0{,}1}{0{,}3}=\frac{1}{3},\; p(X=1|\,Y=0)=\frac{p_{12}}{p_1}=\frac{0{,}2}{0{,}3}=\frac{2}{3}\,.$$

Проверяем равенство $\sum_{i=1}^{n} p(x_i\,|\,y_j)=1$. Оно выполняется.

Тогда условный закон распределения $p(X\,|Y=0)$ имеет вид

x_i	0	1
$p(x_i\|0)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

В силу формулы (4.4) для условного математического ожидания получаем

$$M(X\,|Y=0)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i\,|0)=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\,.$$

Аналогично тому, как это сделано выше, находим остальные условные законы распределения и соответствующие условные математические ожидания.

$p(X \mid Y = 1)$:

x_i	0	1
$p(x_i \mid 14)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

$p(Y \mid X = 0)$:

y_j	0	14
$p(y_j \mid 0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$p(Y \mid X = 1)$:

y_j	0	14
$p(y_j \mid 1)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$M(X \mid Y = 14) = \frac{4}{7}$, $M(Y \mid X = 0) = 10{,}5$, $M(Y \mid X = 1) = 9\frac{1}{3}$. ♦

Задача 3. Рассматривается трехмерная случайная величина (X, Y, Z), законы распределения составляющих которой заданы таблицами 4.5 – 4.7.

Таблица 4.6

Закон распределения случайной величины (Y, Z) из задачи 3.

Y\Z	-1	2	p_i
0	0,05	0,25	0,3
14	0,45	0,25	0,7
p'_j	0,5	0,5	

Таблица 4.7

Закон распределения случайной величины (X, Z) из задачи 3

X\Z	-1	2	p_i
0	0,1	0,3	0,4
1	0,4	0,2	0,6
p'_j	0,5	0,5	

Составить корреляционную и нормированную корреляционную матрицы случайной величины (X, Y, Z).

Решение. Из задачи 2 имеем

$$k(X, X) = D(X) = 0{,}24,\ k(Y, Y) = D(Y) = 41{,}16,\ k(X, Y) = -0{,}28,\ r_{x,y} = -0{,}09.$$

Аналогично тому, как это делалось в задаче 2, по каждой из таблиц 4.6 и 4.7 находим

$$k(Z, Z) = D(Z) = 2{,}25,\ k(Y, Z) = -4{,}2,\ r_{y,z} = -0{,}44,\ k(X, Z) = -4{,}9,\ r_{x,z} = -0{,}51.$$

По формуле (4.9) составим корреляционную матрицу случайной величины (X,Y,Z).

$$\|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} k(X,X) & k(X,Y) & k(X,Z) \\ k(Y,X) & k(Y,Y) & k(Y,Z) \\ k(Z,X) & k(Z,Y) & k(Z,Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,24 & -0,28 & -4,9 \\ -0,28 & 41,16 & -4,2 \\ -4,9 & -4,2 & 2,25 \end{pmatrix}.$$

По формуле (4.10) находим нормированную корреляционную матрицу случайной величины (X,Y,Z).

$$\|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & r_{x,y} & r_{x,z} \\ r_{y,x} & 1 & r_{y,z} \\ r_{z,x} & r_{z,y} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,09 & -0,51 \\ -0,09 & 1 & -0,44 \\ -0,51 & -0,44 & 1 \end{pmatrix}. \ \blacklozenge$$

Задача 4. Закон распределения трехмерной случайной величины (X,Y,Z) определяется таблицей 4.8, содержащей вероятности ее возможных значений. Составить корреляционную и нормированную корреляционную матрицы случайной величины (X,Y,Z).

Таблица 4.8

Закон распределения случайной величины (X, Y, Z) из задачи 4

(x_i,y_j,z_k)	$p(x_i,y_j,z_k)$	(x_i,y_j,z_k)	$p(x_i,y_j,z_k)$	(x_i,y_j,z_k)	$p(x_i,y_j,z_k)$
(-1, 0, 1)	0,02	(0, 0, 1)	0,07	(1, 0, 1)	0,09
(-1, 0, 2)	0,03	(0, 0, 2)	0,13	(1, 0, 2)	0,04
(-1, 1, 1)	0,08	(0, 1, 1)	0,12	(1, 1, 1)	0,12
(-1, 1, 2)	0,16	(0, 1, 2)	0,11	(1, 1, 2)	0,03

Решение. Найдем числовые характеристики составляющих системы (*X*, *Y*, *Z*). Для этого составим по таблице 4.8 их законы распределения (таблицы 4.9 – 4.11). Например, чтобы найти $P(X = -1)$ следует просуммировать вероятности $p(-1, y_j, z_k)$, соответствующие значению $x_i = -1$ и находящиеся во втором столбце таблицы 4.8, т.е. $P(X=-1)=0,02+0,03+0,08+$ $+0,16=1$. Для нахождения вероятностей $P(X = 0)$ и $P(X = 1)$ суммирование вероятностей производится по четвертому и шестому столбцу таблицы 4.8 соответственно. Аналогичным образом, путем суммирования вероятностей $p(x_i, y_j, z_k)$ для фиксированного значения рассматриваемой составляющей, заполняются остальные таблицы распределения.

Таблица 4.9

Закон распределения составляющей X из задачи 4

x_i	-1	0	1
p_i	0,29	0,43	0,28

Таблица 4.10

Закон распределения составляющей Y из задачи 4

y_i	0	1
p_i	0,38	0,62

Таблица 4.11

Закон распределения составляющей Z из задачи 4

z_i	1	2
p_i	0,5	0,5

Аналогично тому, как это делалось в задаче 1 темы 1, находим чис овые характеристики составляющих. В результате получаем

$$M(X)=-0{,}01,\ D(X)=0{,}5699,\ M(Y)=0{,}62,\ D(Y)=0{,}2356,\ M(Z)=1{,}5,\ D(Z)=0{,}25.$$

По формуле (4.7) находим корреляционный момент $k(X,Y)$.

$$k(X,Y)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))(y_j-M(Y))p_{ij}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}(x_i+0{,}01)(y_j-0{,}62)p_{ij}=$$
$$=(-1+0{,}01)\cdot(0-0{,}62)\cdot(0{,}02+0{,}03)+(-1+0{,}01)\cdot(1-0{,}62)\cdot(0{,}08+0{,}16)+$$
$$+(0+0{,}01)\cdot(0-0{,}62)\cdot(0{,}07+0{,}13)+(0+0{,}01)\cdot(1-0{,}62)\cdot(0{,}12+0{,}11)+$$
$$+(1+0{,}01)\cdot(0-0{,}62)\cdot(0{,}09+0{,}04)+(1+0{,}01)\cdot(1-0{,}62)\cdot(0{,}12+0{,}03)=-0{,}0838.$$

Аналогичным образом, находим остальные корреляционные моменты. В результате получаем

$$k(X,Z)=-0{,}015,\ k(Y,Z)=-0{,}01.$$

По формуле (4.8) вычисляем коэффициенты корреляции.

$$r_{x,y}=\frac{-0{,}0838}{\sqrt{0{,}5699\cdot 0{,}2356}}=-0{,}2287,\ r_{x,z}=\frac{-0{,}015}{\sqrt{0{,}5699\cdot 0{,}25}}=-0{,}3047,$$
$$r_{y,z}=\frac{-0{,}01}{\sqrt{0{,}2356\cdot 0{,}25}}=-0{,}0412.$$

В соответствии с равенствами (4.9) и (4.10) составляем корреляционную $\|k_{ij}\|$ и нормированную корреляционную $\|r_{ij}\|$ матрицы случайной величины (X,Y,Z).

$$\|k_{ij}\|=\begin{pmatrix}0{,}5699 & -0{,}0838 & -0{,}015\\ -0{,}0838 & 0{,}2356 & -0{,}01\\ -0{,}015 & -0{,}01 & 0{,}25\end{pmatrix},\ \|\kappa_{ij}\|=\begin{pmatrix}1 & -0{,}2287 & -0{,}3047\\ -0{,}2287 & 1 & -0{,}0412\\ -0{,}3047 & -0{,}0412 & 1\end{pmatrix}.\ \blacklozenge$$

Замечание 4. При нахождении корреляционных моментов в задаче 4 можно было поступить следующим образом. По таблице 4.8 составить таблицы распределения для двумерных случайных величин (X,Y), (Y,Z), (X,Z), а далее проводить вычисления так, как это было сделано при решении задачи 3. Так, например, таблица распределения для случайной величины (X,Z) имеет вид

Z\X	-1	0	1
1	0,1	0,19	0,21
2	0,19	0,24	0,07

Упражнения

А1. Доказать равенство (4.2), пользуясь геометрической интерпретацией функции распределения $F(x,y)$.

А2. Найти $k(C,Y)$, где $C = const$.

А3. Доказать свойство 2 корреляционного момента.

А4. Доказать свойство 3 коэффициента корреляции.

В1. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна р. Рассматриваются две случайные величины: X – число попаданий; Y – число промахов. Построить функцию распределения $F(x,y)$ двумерной случайной величины (X,Y).

В2. Два стрелка независимо друг от друга производят два выстрела по мишени. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка; случайная величина Y – второго стрелка. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,7, для второго стрелка 0,8. Построить функцию распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y). Найти числовые характеристики $M(X, Y)$, $D(X, Y)$, $\sigma(X, Y)$ случайной величины (X, Y).

В3. Двумерная случайная величина (X, Y) задана следующей таблицей.

$Y\backslash X$	1	2	3
0	0,01	0,04	0,16
4	0,03	0,08	0,12
5	0,14	0,25	0,17

Составить функцию распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y). Вычислить начальный момент 2+2 порядка и центральный момент 1+2 порядка.

В4. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан таблицей

$Y\backslash X$	4	6
1	0,15	0,45
2	0,23	c

c – const. Найти c, числовые характеристики $M(X, Y)$, $D(X, Y)$, $\sigma(X, Y)$ случайной величины (X, Y), коэффициент корреляции. Проверить являются ли случайные величины X и Y зависимыми. Если да, то составить условные законы распределения и найти условные математические ожидания.

В5. Рассматривается трехмерная случайная величина (X, Y, Z), законы распределения составляющих которой заданы следующими таблицами.

$X\backslash Y$	1	2
1	0,18	0,17
3	0,42	0,23

Y\Z	-1	1
1	0,11	0,49
2	0,24	0,16

X\Z	-1	1
1	0,15	0,20
3	0,20	0,45

Составить корреляционную и нормированную корреляционную матрицы случайной величины (X, Y, Z).

B6. Из урны, в которой a белых, b черных и c красных шаров, вынимается один шар. Случайные величины X, Y, Z определяются следующими условиями

$$X = \begin{cases} 1, & \text{если появится белый шар,} \\ 0, & \text{если появится черный или красный шар.} \end{cases}$$

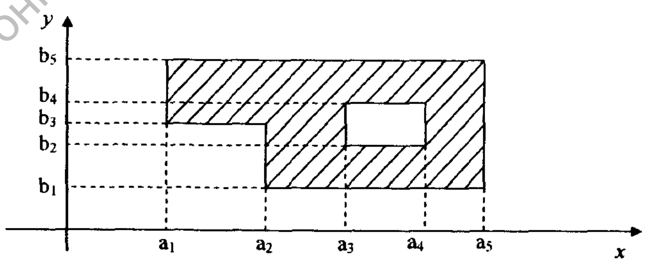
$$Y = \begin{cases} 1, & \text{если появится черный шар,} \\ 0, & \text{если появится белый или красный шар.} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{если появится красный шар,} \\ 0, & \text{если появится черный или белый шар.} \end{cases}$$

Построить корреляционную и нормированную корреляционную матрицы системы случайных величин (X, Y, Z).

C1. Три стрелка независимо один от другого производят по одному выстрелу по мишени. Случайная величина X – число попаданий первого стрелка; случайная величина Y – второго стрелка, случайная величина Z – третьего стрелка. Вероятность непопадания в мишень для первого стрелка равна q_1, для второго стрелка q_2, для третьего – q_3. Построить функцию распределения $F(x, y, z)$ трехмерной случайной величины (X, Y, Z).

C2. Определить вероятность попадания случайной точки в указанную на рисунке заштрихованную область, если задана функция распределения $F(x, y)$.



С3. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задан таблицей

$Y\backslash X$	2	3
0	0,14	0,26
2	0,18	c

c – const. Найти c, числовые характеристики $M(X, Y)$, $D(X, Y)$, $\sigma(X, Y)$ случайной величины (X, Y), коэффициент корреляции. Проверить являются ли случайные величины X и Y зависимыми. Если да, то составить условные законы распределения и найти условные математические ожидания.

С4. Рассматривается трехмерная случайная величина (X, Y, Z), законы распределения составляющих которой заданы следующими таблицами.

$X\backslash Y$	-1	3
-1	0,36	0,12
2	0,18	0,34

$Y\backslash Z$	3	4
-1	0,19	0,35
3	0,33	0,13

$X\backslash Z$	3	4
-1	0,23	0,25
2	0,29	0,23

Составить корреляционную и нормированную корреляционную матрицы случайной величины (X, Y, Z).

С5. Дана корреляционная матрица системы случайных величин (X_1, X_2, X_3).

$$\|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{pmatrix}$$

Составить нормированную корреляционную матрицу $\|r_{ij}\|$.

С6. Закон распределения трехмерной случайной величины (X, Y, Z) определяется таблицей 4.12, содержащей вероятности ее возможных значений. Составить корреляционную и нормированную корреляционную матрицы случайной величины (X, Y, Z).

Таблица 4.12.

(x_i, y_j, z_k)	$p(x_i, y_j, z_k)$	(x_i, y_j, z_k)	$p(x_i, y_j, z_k)$	(x_i, y_j, z_k)	$p(x_i, y_j, z_k)$
(1, -1, -2)	0,05	(2, -1, -2)	0,04	(3, -1, -2)	0,11
(1, -1, -1)	0,12	(2, -1, -1)	0,01	(3, -1, -1)	0,09
(1, 0, -2)	0,07	(2, 0, -2)	0,14	(3, 0, -2)	0,12
(1, 0, -1)	0,03	(2, 0, -1)	0,17	(3, 0, -1)	0,05

D1. Доказать, что

$$M\big((X-M(X))(Y-M(Y))(Z-M(Z))\big)=$$

$$=M(XYZ)-M(X)k(Y,Z)-M(Y)k(X,Z)-M(Z)k(X,Y)-M(X)M(Y)M(Z)$$

D2. Случайные величины X и Y связаны соотношением $mX + nY = c$, где m, n, c – неслучайные величины (числа) и $m \neq 0$, $n \neq 0$. Найти для них корреляционный момент.

D3. Однотипные детали в зависимости от точности изготовления различаются по форме на круглые и овальные, а по весу – на легкие и тяжелые. Вероятности того, что взятая наудачу деталь окажется круглой и легкой, овальной и легкой, круглой и тяжелой, овальной и тяжелой, соответственно равны 0,40; 0,05; 0,10; 0,45. Взята одна деталь. Найти математические ожидания и дисперсии числа круглых деталей X и числа легких деталей Y, корреляционный момент $k(X, Y)$ между числом круглых и числом легких деталей.

Тема 5
Многомерные случайные величины непрерывного типа

Определение 1. Двумерная случайная величина (X, Y) называется ***непрерывной***, если ее составляющие непрерывные случайные величины.

Функция распределения непрерывной двумерной случайной величины обладает всеми свойствами, перечисленными в теме 4.

Определение 2. ***Плотностью распределения вероятности*** $f(x, y)$ непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная производная функции распределения $F(x, y)$, т.е.

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}. \qquad (5.1)$$

Свойства плотности распределения вероятности $f(x, y)$:

Плотность распределения вероятности $f(x, y)$ целесообразно рассматривать как функцию, определенную на всей вещественной плоскости, считая ее равной нулю в тех областях, где нет значений случайной величины.

Свойства плотности распределения вероятности:

1. $f(x,y)\geq 0$, $\forall (x,y)\in R^2$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$.

По плотности распределения вероятностей $f(x, y)$ можно найти функцию распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины, а также функции распределения $F_1(x)$, $F_2(y)$ и плотности вероятности $f_1(x)$, $f_2(y)$ ее составляющих X и Y из равенств

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dudv, \tag{5.2}$$

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,y)dudy,\ F_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y}f(x,v)dxdv, \tag{5.3}$$

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\ f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx. \tag{5.4}$$

Из определения 3 темы 4 и соотношения (5.2) следует, что вероятность попадания непрерывной случайной величины (X, Y) с плотностью $f(x, y)$ в прямоугольник $\Pi=\{(x,y)\in R^2 \mid \alpha\le x\le\beta, \gamma\le y\le\delta\}$ моно вычислить по формуле

$$P(\alpha\le X\le\beta,\gamma\le Y\le\delta)=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta}f(x,y)dxdy.$$

Замечание 1. Зная законы распределения составляющих, не всегда можно найти закон распределения двумерной случайной величины. Для этого должна быть известна зависимость между составляющими.

Теорема 1. Для того чтобы составляющие X и Y двумерной случайной величины (X, Y) были независимы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Теорема 2 (умножения плотностей распределения вероятностей). Справедливы равенства

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y|x),\ f(x,y)=f_2(y)\cdot f_1(x|y),$$

где $f_1(x|y)$, $f_2(y|x)$ – условные плотности распределения.

Определение 3. ***Условным математическим ожиданием*** непрерывной случайной величины Y при $X = x$ называется величина

$$M(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_2(y|x)dy. \tag{5.5}$$

Если случайные величины X и Y независимы, то имеют место соотношения

$$f_1(x|y)=f_1(x),\ f_2(y|x)=f_2(y).$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение двумерной случайной величины, определяются в соответствии с формулами (4.5) и (2.4), (2.5), (1.10), если известны плотности распределения составляющих. По плотности $f(x, y)$ математические ожидания и дисперсии составляющих можно найти из равенств

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy,\ M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy, \tag{5.6}$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x,y)dxdy,\ D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(y-M(Y))^2 f(x,y)dxdy \tag{5.7}$$

Из определений 8, 9 темы 4 и равенства (2.4) получаем формулы для нахождения моментов непрерывной двумерной случайной величины с плотностью распределения вероятности $f(x, y)$

$$\alpha_{k,s}(X,Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y)dxdy, \tag{5.8}$$

$$\mu_{k,s}(X,Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^k(y-M(Y))^s f(x,y)dxdy. \tag{5.9}$$

Из формулы (5.8) и определения 10 темы 4 следует, что для непрерывной случайной величины (X, Y) корреляционный момент находится из равенства

$$k(X,Y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))(y-M(Y))f(x,y)dxdy. \tag{5.10}$$

Задача 1. Двумерная случайная величина (X,Y) имеет плотность распределения вероятности

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cos(x+y), -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Требуется: 1) найти коэффициент a; 2) найти функцию распределения $F(x,y)$; 3) найти вероятность попадания случайной величины (X, Y) в прямоугольник $\Pi=\left\{(x,y)\in R^2 \mid 0\le x\le\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}\le y\le\pi\right\}$; 4) вычислить числовые характеристики случайной величины (X,Y) $(M(X,Y),\ D(X,Y),\ k(X,Y))$; 5) найти плотности распределения вероятности и функции распределения составляющих; 6) проверить, являются ли случайные величины X и Y зависимыми. Если да, то составить условные законы распределения и вычислить условные математические ожидания; 7) вычислить моменты $\alpha_{2,1}(X,Y)$ и $\mu_{2,2}(X,Y)$.

Решение. 1) Для нахождения коэффициента a воспользуемся свойством 2 плотности распределения вероятности.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dxdy = a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)dx =$$

$$=2a\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = 4a = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a=\frac{1}{4}.$$

2) Функцию распределения найдем с помощью равенства (5.2). При $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y \le \frac{\pi}{2}$ имеем

$$F(x,y) = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{y}\cos(u+v)dudv = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\left(\sin(y+u) - \sin\left(u - \frac{\pi}{2}\right)\right)du = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}(\sin(y+u) + \cos u)du =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\cos(x+y) - \sin x + \sin y - 1\right).$$

Учитывая свойство 2 плотности вероятности, получаем

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, \ x \le -\frac{\pi}{2} \text{ или } y \le -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{4}\left(-\cos(x+y) - \sin x + \sin y - 1\right), -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

3) Вероятность попадания случайной величины (X,Y) в прямоугольник Π найдем по формуле (4.2).

$$P\left(0 \le x \le \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \le y \le \pi\right) = F\left(\pi; \frac{\pi}{4}\right) - F(0;\pi) - F\left(\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right) + F\left(0; -\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 1 -$$

$$-\frac{1}{4}\left(-\cos 0 - \sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} - 1\right) + \frac{1}{4}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - \sin 0 - \sin\frac{\pi}{4} - 1\right) = \frac{1}{4}.$$

4) По формулам (5.6) и (5.7) находим

$$M(X) = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x+y)dxdy = 0, \ M(Y) = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y\cos(x+y)dxdy = 0,$$

$$D(X) = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x+y)dxdy = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-4\cos y + \frac{\pi^2}{2}\cos y\right)dy = \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos y dy = \frac{\pi^2}{4} - 2,$$

$$D(Y) = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y^2\cos(x+y)dxdy = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

По формуле (5.10) имеем

$$k(X,Y) = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xy\cos(x+y)dxdy = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y\sin y dy = -1.$$

5) Используя равенства (5.3) и (5.4), находим

$$F_1(x)=\begin{cases}0,\ x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(u+y)dudy=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos u du=\dfrac{1}{2}(\sin x+1),\ -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1,\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$F_2(y)=\begin{cases}0,\ y\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{y}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+v)dxdv=\dfrac{1}{2}(\sin y+1),\ -\dfrac{\pi}{2}<y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1,\ y>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$f_1(x)=\frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dy=\frac{1}{2}\cos x,\ f_2(y)=\frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)dx=\frac{1}{2}\cos y.$$

6) Так как $k(X,Y)=-1\ne 0$, то случайные величины X и Y зависимы. По теореме 2 находим условные законы распределения.

$$f_1(x|y)=\frac{\frac{1}{4}\cos(x+y)}{\frac{1}{2}\cos y}=\frac{\cos(x+y)}{2\cos y},\ f_2(y|x)=\frac{\frac{1}{4}\cos(x+y)}{\frac{1}{2}\cos x}=\frac{\cos(x+y)}{2\cos x}.$$

Согласно формуле (5.5) имеем

$$M(X\,|\,Y=y)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\frac{\cos(x+y)}{\cos y}dx=-\frac{1}{2}tg\,y,$$

$$M(Y\,|\,X=x)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}y\frac{\cos(x+y)}{\cos x}dy=-\frac{1}{2}tg\,x.$$

7) По формулам (5.8) и (5.9) находим моменты

$$\alpha_{2,1}(X,Y)=\frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2y\cos(x+y)dxdy=0,$$

$$\mu_{2,2}(X,Y)=\frac{1}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2y^2\cos(x+y)dxdy=\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right)\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x dx=\frac{\pi^4}{16}-\pi^2+4.\ \blacklozenge$$

Упражнения

А1. Дана поверхность $z = f(x,y)$, изображающая плотность распределения системы (X,Y). Задано некоторое значение x. Дать геометрическую интерпретацию: а) значению $f_1(x)$ в точке x; б) условной плотности распределения вероятности $f_2(y|x)$.

А2. Система трех случайных величин (X,Y,Z) имеет плотность распределения вероятности $f(x,y,z)$. Написать выражения: 1) плотности распределения $f_1(x)$ составляющей X; 2) плотности распределения $f_{2,3}(y,z)$ системы (Y,Z); 3) условной плотности распределения $f_{2,3}(y,z\,|\,x)$; 4) условной плотности распределения $f_2(y|\,x,z)$; 5) функции распределения $F(x,y,z)$; 6) функции распределения $F_1(x)$ составляющей X; 7) функции распределения $F_{1,2}(x,y)$ системы (X,Y).

В1. По функции распределения случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0,\ \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

найти: 1) плотность вероятности $f(x,y)$; 2) числовые характеристики случайной величины (X,Y) ($M(X,Y)$, $D(X,Y)$, $k(X,Y)$, r_{xy}); 3) вероятность попадания случайной точки (x,y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{3}$. Являются ли случайные величины X и Y независимыми? Почему?

В2. Найти плотность распределения вероятности $f(x,y)$ двумерной случайной величины (X, Y), имеющей функцию распределения

$$F(x,y)=\begin{cases}1-3^{-x}-3^{-y}+3^{-x-y},\ x\ge 0, y\ge 0,\\ 0,\ \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

В3. Для плотности распределения вероятности $f(x,y)=\dfrac{a}{(9+x^2)(16+y^2)}$ найти постоянную a.

В4. Задана плотность распределения вероятности двумерной случайной величины $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$. Найти: 1) плотности распределения вероятности составляющих $f_1(x)$, $f_2(y)$; 2) условные плотности распределения вероятности составляющих $f_1(x|y)$, $f_2(y|x)$.

В5. Независимые случайные величины X и Y имеют равномерное распределение на интервалах (-1; 1) и (0; 2) соответственно. Найти плотность распределения вероятности и функцию распределения системы (X, Y).

B6. Система случайных величин (X, Y) распределена с постоянной плотностью внутри квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. Записать выражение для плотностей распределения вероятности $f(x,y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$. Построить функцию распределения системы. Определить, являются ли случайные величины X и Y независимыми.

B7. Плотность распределения вероятности системы СВ (X, Y) имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} a\sin(x+y), \text{ при } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти: 1) коэффициент a; 2) функцию распределения $F(x, y)$ системы случайных величин (X, Y); 3) плотности распределения вероятности составляющих; 4) числовые характеристики случайной величины (X, Y) (M(X, Y), D(X, Y)); 5) коэффициент корреляции r_{xy}; 6) условные законы распределения.

B8. Найти коэффициент корреляции r_{xy} системы случайных величин (X, Y) с плотностью распределения вероятности

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos x \cdot \cos y, \; 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

C1. Найти плотность распределения вероятности $f(x,y)$ двумерной случайной величины (X, Y), имеющей функцию распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(1-e^{-4x}\right)\left(1-e^{-2y}\right), \; x>0, y>0, \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

C2. Для плотности распределения вероятности $f(x,y) = \dfrac{a}{\left(x^2+y^2+1\right)^3}$ найти постоянную a.

C3. Функция распределения случайной величины (X, Y) имеет вид

$$F(x,y) = \begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, \; x \ge 0, y \ge 0, \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти: 1) плотность распределения вероятности $f(x,y)$; 2) вероятность попадания случайной точки (x,y) в треугольник с вершинами A(1; 3), B(3; 3), C(2; 8).

C4. Задана плотность распределения вероятности двумерной случайной величины $f(x,y) = ae^{-x^2-2xy-4y^2}$. Найти: 1) постоянную a; 2) плотности распределения вероятности $f_1(x)$ и $f_2(y)$ составляющих; 3) условные плотности распределения вероятности $f_1(x|y)$, $f_2(y|x)$ составляющих.

C5. Система случайных величин (X, Y) имеет плотность вероятности $f(x,y) = \dfrac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$. Найти: 1) коэффициент a; 2) вероятность попадания в квадрат $-1<x<1$, $-1<y<1$; 3) функцию распределения системы (X, Y).

С6. Для системы СВ (X, Y) с плотностью распределения вероятности

$$f(x,y)=\begin{cases} ae^{-(3x+2y)}, \text{ при } x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти: 1) коэффициент a; 2) функцию распределения $F(x,y)$ системы случайных величин (X, Y); 3) плотность распределения вероятности каждой составляющей; 4) числовые характеристики случайной величины (X, Y) (M(X, Y), D(X, Y)); 5) коэффициент корреляции r_{xy}.

С7. Найти коэффициент корреляции r_{xy} системы случайных величин (X, Y) с плотностью распределения вероятности

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y,\ 0<x<1,\ 0<y<1,\\ 0, \text{ \textit{в остальных случаях.}}\end{cases}$$

С8. Система случайных величин (X, Y) имеет плотность распределения вероятности

$$f(x,y)=\begin{cases} \sin x\cdot\sin y,\ 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и коэффициент корреляции системы.

D1. Иглу длиной l бросают на плоскость, на которой на расстоянии L друг от друга проведены параллельные линии. Определить вероятность пересечения иглой одной из линий, если $l < L$ (задача Бюффона).

D2. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$; случайная величина Y связана с ней соотношением $Y = X^2$. Найти функцию распределения $F(x, y)$ системы (X, Y).

Ответы

Тема 1.

А2.

$x_i + y_j$	0	1	2	3	4	5
p_{ij}	0,02	0,07	0,24	0,3	0,3	0,07

$x_i \cdot y_j$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6
p'_{ij}	0,14	0,04	0,02	0,3	0,04	0,09	0,28	0,02	0,07

А3. $F(x)=\begin{cases}0, x \le a,\\ 1, x > a.\end{cases}$ $M(X)=a$, $D(X)=0$, $\alpha_3(X)=a^3$.

В1. 3) $P(-1 \le X < 1{,}5)=0{,}6$, $P(0 < X < 2)=0{,}1$; 4) $M(X)=0{,}3$, $D(X)=1{,}81$, $\sigma(X)=1{,}35$.

В2. 1)

x_i	0	5	10	15	20
p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

3) $F(x)=\begin{cases}0, x \le 0,\\ 0{,}0256,\ 0 < x \le 5,\\ 0{,}1792,\ 5 < x \le 10,\\ 0{,}5248,\ 10 < x \le 15,\\ 0{,}8704,\ 15 < x \le 20,\\ 1,\ x > 20.\end{cases}$ 4) 0,3456; 5) $M(X)=12$, $D(X)=24$, $\sigma(X)=4{,}90$.

В3. P(X = 0) = 0,08, P(X=1) = 0,44, P(X=2) = 0,48. **В4.** $P(X=0)=\frac{1}{27}$, $P(X=1)=\frac{2}{9}$, $P(X=2)=\frac{4}{9}$, $P(X=3)=\frac{8}{27}$.

В5. 1)

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

2) $F(x)=\begin{cases}0, x \le 0,\\ 0{,}729,\ 0 < x \le 1,\\ 0{,}972,\ 1 < x \le 2,\\ 0{,}999,\ 2 < x \le 3,\\ 1,\ x > 3.\end{cases}$ 3) $M(X)=0{,}3$, $D(X)=0{,}27$, $\sigma(X)=0{,}52$.

В6. а) $M(X)=3{,}50$, $D(X)=2{,}92$, $\sigma(X)=1{,}71$; б) $M(X)=2{,}2$, $D(X)=0{,}98$, $\sigma(X)=0{,}99$,

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,04	0,2	0,37	0,3	0,09

С1. 1)

x_i	0	1	2	4	6
p_i	0,01	0,12	0,24	0,33	0,3

2)

x_i	-2	-1	1	2
p_i	0,1	0,3	0,5	0,1

C2.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

C3. $F(x)=\begin{cases}0,\ x<0,\\ 0{,}25,\ 0<x\le 1,\\ 0{,}75,\ 1<x\le 2,\\ 1,\ x>2.\end{cases}$ **C4.** 4) $P(3\le X\le 8)$=0,19288, $P(4<X<16)$=0,93106; 5) $M(X)$ = 11,2, $D(X)$ = 6,72, $\sigma(X)=2{,}59$. **C5.** $M(Y)$=-0,2, $D(Y)$=0,74, $\sigma(Y)$=0,86.

y_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,0576	0,2976	0,4516	0,1736	0,0196

C6. а) $M(X)$ = 1,125, $D(X)$ = 0,502, $\sigma(X)=0{,}709$; б) $M(X)$ = 2,3056, $D(X)$ = 1,96,

$\sigma(X)=1{,}40$, $F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 1,\\ 0{,}4,\ 1<x\le 2,\\ 0{,}64,\ 2<x\le 3,\\ 0{,}78,\ 3<x\le 4,\\ 0{,}87,\ 4<x\le 5,\\ 1,\ x>5.\end{cases}$

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,4	0,24	0,14	0,09	0,13

D2. 10. **D3.** 0,4. **D4.**

z_i	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	4	∞
p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Тема 2.

A1. 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) нет. **A2.** 1) безразмерна; 2) обратная размерности случайной величины; 3) размерность случайной величины; 4) размерность квадрата случайной величины; 5) размерность случайной величины; 6) размерность куба случайной величины. **A3.** $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. **B1.** y_2, y_3.

B2. $F(x)=\begin{cases}0,\ x\le -\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}(\sin x+1),\ -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2},\\ 1,\ x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ **B3.** $f(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0, x\ge\pi,\\ \frac{1}{\pi}(1-\cos 2x),\ 0<x<\pi.\end{cases}$ **B4.** 1) $\frac{2}{\pi}$;

2) $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{\pi}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\pi}{2}\right), -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, \ x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 3) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2\pi}$; 4) $M(X)=0$, $D(X)=\dfrac{\pi^2-6}{12}$.

B5. 1) 1; 2) $1-e^{-2}$; 3) $F(x)=1-e^{-x}$, $x>0$; 4) $M(X)=1$, $D(X)=1$. **C1.** а) $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{1}{\pi}$; б) $f(x)=\dfrac{2}{\pi\left(x^2+4\right)}$. **C2.** 1) $\dfrac{1}{\pi}$; 2) $F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}arctg\,x$; 3) $\dfrac{1}{2}$. **C3.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{e-1}{2e}$;

3) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{x}, \ x\le 0,\\ 1-\dfrac{1}{2}e^{-x}, \ x>0.\end{cases}$ 4) $M(X)=0$, $D(X)=2$. **C4.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, \ 0<x\le 2,\\ 1, \ x>2\end{cases}$

4) $P(0\le X<1)=\dfrac{1}{4}$, $P\left(-2<X<\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{16}$, $P\left(\dfrac{3}{2}<X<4\right)=\dfrac{7}{16}$; 5) $M(X)=\dfrac{4}{3}$, $D(X)=\dfrac{2}{9}$,

$\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C5.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le -1,\\ \dfrac{x^2+x}{2}, -1<x\le 1,\\ 1, \ x>1\end{cases}$ 4) $P(0\le X<1)=1$,

$P\left(-2<X<\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{5}{32}$, $P\left(\dfrac{1}{2}<X<2\right)=\dfrac{5}{8}$; 5) $M(X)=\dfrac{1}{3}$, $D(X)=\dfrac{2}{9}$, $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

C6. 1) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{98}, & 0<x\le 14,\\ 0, & x>14.\end{cases}$ 2) $a=\dfrac{1}{196}$; 4) 0,75; 5) $M(X)$ = 9,33, $D(X)$ = 10, 95,

$\sigma(X)=3{,}31$. **D1.** а) σ; б) $\sigma\sqrt{2\ln 2}$; в) $f(x)=\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

Тема 3.

B1. $M(X)$=20, $D(x)$=12. **B2.** $\dfrac{3}{5}$. **B3.** $f(x)=\begin{cases}0, \ x<2, \ x>8,\\ \dfrac{1}{6}, \ 2\le x\le 8.\end{cases}$, $F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 2,\\ \dfrac{x-2}{6}, \ 2<x\le 8,\\ 1, \ x>8.\end{cases}$

$M(X)$=5, $D(x)$=3, $\sigma(X)=\sqrt{3}$. **B5.** 0,1359. **B6.** 0,2047. **B7.** 299. **B8.** а) 0,0824; б) 0,0027. **B9.** $M(X)$=25, $D(x)$=625, $P(1<X<2)=0{,}0377$. **C1.** 0,98. **C2.** 2,563.

C3. $f(x)=\begin{cases}0, \ x<1, \ x>5,\\ \dfrac{1}{4}, \ 1\le x\le 5.\end{cases}$ **C4.** 0,0761. **C5.** 0,9. **C6.** а) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$;

б) 0,1574; в) 0,9544. **C7.** $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0{,}1e^{-0{,}1x}, & x\ge 0.\end{cases}$, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-0{,}1x}, & x>0.\end{cases}$ $M(X)=10$, $D(x)=100$, $P(0{,}1<X<0{,}2)=0{,}0099$. **C8.** 0,18. **C9.** $M(X)=8$, $D(x)=4$, $P(4<X<12)=0{,}9232$ **D1.** а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0;a),\\ \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right), & x\in(0;a).\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x}{a}\left(2-\frac{x}{a}\right), & 0<x\le a,\\ 1, & x>a.\end{cases}$ в) 0,25; г) $M(X)=\frac{a}{3}$, $D(x)=\frac{a^2}{18}$, $\sigma(X)=\frac{a}{3\sqrt{2}}$. **D2.** а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(-a;a),\\ \frac{1}{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right), & x\in(0;a).\end{cases}$

в) $M(X)=0$, $D(x)=\frac{a^2}{6}$, $\sigma(X)=\frac{a}{\sqrt{6}}$; г) $\frac{7}{8}$.

Тема 4.

A2. 0. **B1.**

$x_i \setminus y_j$	0	1
0	0	q
1	p	0

$F(x,y)$	$x\le 0$	$0<x\le 1$	$x>1$
$y\le 0$	0	0	0
$0<y\le 1$	0	0	p
$y>1$	0	q	1

B2.

$F(x,y)$	$x\le 0$	$0<x\le 1$	$1<x\le 2$	$x>2$
$y\le 0$	0	0	0	0
$0<y\le 1$	0	0,0036	0,0204	0,04
$1<y\le 2$	0	0,0324	0,1836	0,36
$y>2$	0	0,09	0,51	1

$M(X,Y)$ = (1,4; 1,6), $D(X,Y)$ = (0,42; 0,32), $\sigma(X,Y)$ = (0,65; 0,57).

B3.

$F(x,y)$	$x\le 1$	$1<x\le 2$	$2<x\le 3$	$x>3$
$y\le 0$	0	0	0	0
$0<y\le 4$	0	0,01	0,05	0,21
$4<y\le 5$	0	0,04	0,16	0,44
$y>5$	0	0,18	0,55	1

$\alpha_{2,2}(X,Y)=89{,}63$, $\mu_{2,1}(X,Y)=0{,}07$.

B4. $c=0{,}17$, $M(X,Y)$ = (5,24; 1,4), $D(X,Y)$ = (0,9424; 0,24), $\sigma(X,Y)$ = (0,97; 0,49), $r_{x,y}=-0{,}328$. X и Y зависимы.

$p(X \mid Y=1)$:

x_i	4	6
$p(x_i \mid 1)$	0,25	0,75

$p(X \mid Y=2)$:

x_i	4	6
$p(x_i \mid 2)$	0,575	0,425

$p(Y \mid X=4)$:

y_i	1	2
$p(y_i \mid 4)$	0,395	0,605

$p(Y \mid X=6)$:

y_i	1	2
$p(y_i \mid 6)$	0,726	0,274

$M(X \mid Y=1) = 5{,}5$, $M(X \mid Y=2) = 4{,}85$, $M(Y \mid X=4) = 1{,}605$, $M(Y \mid X=6) = 1{,}274$.

B5. $\|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0{,}91 & -0{,}06 & 0{,}8 \\ -0{,}06 & 0{,}24 & 0{,}22 \\ 0{,}8 & 0{,}22 & 0{,}91 \end{pmatrix}$, $\|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}128 & 0{,}121 \\ -0{,}128 & 1 & -0{,}428 \\ 0{,}121 & -0{,}428 & 1 \end{pmatrix}$.

B6. $$\|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} \frac{a(b+c)}{(a+b+c)^2} & \frac{-ab}{(a+b+c)^2} & \frac{-ac}{(a+b+c)^2} \\ \frac{-ab}{(a+b+c)^2} & \frac{b(a+c)}{(a+b+c)^2} & \frac{-bc}{(a+b+c)^2} \\ \frac{-ac}{(a+b+c)^2} & \frac{-bc}{(a+b+c)^2} & \frac{c(a+b)}{(a+b+c)^2} \end{pmatrix},$$

$$\|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} & -\sqrt{\frac{ac}{(a+b)(c+b)}} \\ -\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} & 1 & -\sqrt{\frac{bc}{(b+a)(a+c)}} \\ -\sqrt{\frac{ac}{(a+b)(c+b)}} & -\sqrt{\frac{bc}{(b+a)(a+c)}} & 1 \end{pmatrix}.$$

C1.

$F(x,y,z)$		$z \le 0$	$0 < z \le 1$	$z > 1$
$x \le 0$	$y \le 0$	0	0	0
	$0 < y \le 1$	0	0	0
	$y > 1$	0	0	0
$0 < x \le 1$	$y \le 0$	0	0	0
	$0 < y \le 1$	0	$q_1q_2q_3$	q_1q_2
	$y > 1$	0	q_1q_3	q_1
$x > 1$	$y \le 0$	0	0	0
	$0 < y \le 1$	0	q_2q_3	q_2
	$y > 1$	0	q_3	1

C2. $P = F(a_5, b_5) - F(a_1, b_5) - F(a_5, b_1) - F(a_2, b_3) - F(a_3, b_2) - F(a_4, b_4) + F(a_1, b_3) + F(a_2, b_1) + F(a_3, b_4) + F(a_4, b_3)$. **C3.** $c = 0{,}42$, $M(X,Y) = (2{,}68;\ 1{,}2)$, $D(X,Y) = (0{,}2176;\ 0{,}96)$, $\sigma(X,Y) = (0{,}47;\ 0{,}98)$, $r_{x,y} = 0{,}053$. **X и Y зависимы.**

$p(X \mid Y = 0)$:

x_i	2	3
$p(x_i \mid 0)$	0,35	0,65

$p(X \mid Y = 2)$:

x_i	2	3
$p(x_i \mid 2)$	0,3	0,7

$p(Y \mid X = 2)$:

y_j	0	2
$p(y_j \mid 2)$	0,438	0,563

$p(Y \mid X = 3)$:

y_j	0	2
$p(y_j \mid 3)$	0,382	0,618

$M(X \mid Y = 0) = 2{,}65$, $M(X \mid Y = 2) = 2{,}7$, $M(Y \mid X = 2) = 1{,}125$, $M(Y \mid X = 3) = 1{,}235$.

C4. $\|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2{,}2464 & 1{,}2096 & -0{,}0588 \\ 1{,}2096 & 3{,}9744 & -0{,}3647 \\ -0{,}0588 & -0{,}3647 & 0{,}2496 \end{pmatrix}$, $\|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4048 & -0{,}0785 \\ 0{,}4048 & 1 & -0{,}3647 \\ -0{,}0785 & -0{,}3647 & 1 \end{pmatrix}$.

C5. $\|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$. **C6.** $\|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0{,}63 & 0{,}012 & -0{,}057 \\ 0{,}012 & 0{,}2436 & -0{,}0226 \\ -0{,}057 & -0{,}0226 & 0{,}2491 \end{pmatrix}$,

$\|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}031 & -0{,}144 \\ 0{,}031 & 1 & -0{,}092 \\ -0{,}144 & -0{,}092 & 1 \end{pmatrix}$. **D2.** $k(X,Y) = -\frac{n}{m}D(Y) = -\frac{m}{n}D(X)$. D3. $M(X) = 0{,}5$, $M(Y) = 0{,}45$; $D(X) = 0{,}25$, $D(Y) = 0{,}2475$; $k_{xy} = 0{,}175$.

Тема 5.

B1. 1) $f(x,y) = \cos x \cdot \cos y$, $0 < x \le \frac{\pi}{2}$, $0 < y \le \frac{\pi}{2}$; 2) $M(X,Y) = \left(\frac{\pi}{2} - 1; \frac{\pi}{2} - 1\right)$, $D(X,Y) = (\pi - 3; \pi - 3)$, $k(X,Y) = 0$, $r_{xy} = 0$; 3) $\frac{(\sqrt{2} - 2)(1 - \sqrt{3})}{4}$. Случайные величины X и Y независимы. **B2.** $f(x,y) = \begin{cases} 3^{-x-y}\ln^2 3, & x \ge 0,\ y \ge 0, \\ 0, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$ **B3.** $\frac{12}{\pi^2}$.

B4. 1) $f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{5\pi}}e^{-\frac{2}{5}x^2}$, $f_2(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}$; 2) $f_1(x \mid y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2}$, $f_2(y \mid x) = \sqrt{\frac{5}{2\pi}}e^{-\frac{1}{10}(x+5y)^2}$.

B5. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\\ 0,\ \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$ $F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(x+1)}{4}, -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\\ \dfrac{y}{2},\ x>1,\ 0\le y\le 2,\\ \dfrac{x+1}{2}, -1\le x\le 1,\ y>2,\\ 1,\ x>1,\ y>2,\\ 0,\ \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$

B6. $f(x,y)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\\ 0,\ \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$ $f_1(x)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 1,\\ 0,\ \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$

$f_2(y)=\begin{cases}1,\ 0\le y\le 1,\\ 0,\ \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$ $F(x,y)=\begin{cases}0,\ x\le 0\ \textit{или}\ y\le 0,\\ xy,\ 0<x\le 1,\ 0<y\le 1,\\ y,\ x>1,\ 0<y\le 1,\\ x,\ 0<x\le 1,\ y>1,\\ 1,\ x>1,\ y>1.\end{cases}$ **Случайные величины X и Y независимы.** **B7.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $F(x,y)=\begin{cases}0,\ x\le 0\ \textit{или}\ y\le 0,\\ \dfrac{1}{2}(\sin x+\sin y-\sin(x+y)),\ 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0<y\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1,\ \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$

3) $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\sin x+\cos x),\ x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right],\\ 0,\ x\notin\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$ $f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\sin y+\cos y),\ y\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right],\\ 0,\ y\notin\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right].\end{cases}$ 4) $M(X,Y)=\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$D(X,Y)=\left(\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{2}-2;\dfrac{\pi^2}{16}+\dfrac{\pi}{2}-2\right)$; 5) $r_{xy}=-0{,}245$; 6) $f_1(x\,|\,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin y+\cos y}$,

$f_2(y\,|\,x)=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin x+\cos x}$. **B8.** $r_{xy}=0$. **C1.** $f(x,y)=\begin{cases}8e^{-4x-2y},\ x>0,\ y>0,\\ 0,\ \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$ **C2.** $\dfrac{2}{\pi}$.

C3. 1) $f(x,y)=\begin{cases}2^{-x-y}\ln^2 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\\ 0,\ \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$ 2) 0,033. **C4.** 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$; 2) $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}e^{-\frac{3}{4}x^2}$,

$f_2(y)=\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}e^{-3y^2}$; 3) $f_1(x\,|\,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x+y)^2}$, $f_2(y\,|\,x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\left(\frac{1}{2}x+2y\right)^2}$. **C5.** 1) $\dfrac{1}{\pi^2}$; 2) $\dfrac{1}{4}$;

3) $F(x,y)=\dfrac{4xy}{\pi^2\left(1+x^2+x^2y^2+y^2\right)^2}$. **C6.** 1) 6; 2) $F(x,y)=\begin{cases}36e^{-3x-2y},\ x>0,\ y>0,\\ 0,\ \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$

3) $f_1(x)=3e^{-3x}$, $x>0$, $f_2(y)=2e^{-2y}$, $y>0$; 4) $M(X,Y)=\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)$, $D(X,Y)=\left(\dfrac{1}{9};\dfrac{1}{4}\right)$; 5) 0.

C7. -0,091. **C8.** $r_{xy}=0$. **D1.** $\dfrac{2l}{\pi L}$.

Список рекомендуемой литературы

1. *Боровков, А.А.* Теория вероятностей / А.А. Боровков. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 470 с.
2. *Вентцель, Е.С.* Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000. – 366 с.
3. *Вентцель, Е.С.* Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1964. – 576 с.
4. *Гмурман, В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999. – 479 с.
5. *Гмурман, В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1999. – 400 с.
6. *Коваленко, И.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для втузов / И.Н. Коваленко, А.А. Филиппова. – М.: Высш. шк. 1973. – 368 с.
7. *Колемаев, В.А.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для экон. специальностей вузов / В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский; под ред. В.А. Колемаева. – М.: Высш. шк., 1991. – 400 с.
8. *Мостеллер, Ф.* Вероятность / Ф. Мостеллер, Р. Рурке, Дж. Томас; под ред. И.М. Яглома. – М.: МИР, 1969. – 431 с.
9. *Пугачев, В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика / В.С. Пугачев. – М.: Наука, 1979. – 496 с.
10. *Савич, Л.К.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для студентов эконом. специальностей учреждений, обеспечивающих получение высш. образования / Л.К. Савич, Н.А. Смольская; науч. ред. О.И. Лаврова. – Мн.: Адукацiя i выхаванне, 2006. – 208 с.
11. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под общ. ред. А.А. Свешникова. – М.: Наука, 1965. – 632 с.
12. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. / В. Феллер. Т.1. – М.: Мир, 1984. – 738 с.
13. *Гнеденко, Б.В.* Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – Москва: Наука, 1988. – 447 с.
14. *Харин Ю.С.* Теория вероятностей / Ю.С. Харин, Н.М. Зуев. – Мн.: БГУ, 2004. – 199 с.
15. *Ширяев А.Н.* Вероятность: в 2 кн. / А.Н. Ширяев. – М.: МЦНМО, 2004. – 928 с.

Приложение 1

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,48	0,1844	0,96	0,3315	1,44	0,4251	1,92	0,4726	2,40	0,4918	2,88	0,4980
0,01	0,0040	0,49	0,1879	0,97	0,3340	1,45	0,4265	1,93	0,4732	2,41	0,4920	2,89	0,4981
0,02	0,0080	0,50	0,1915	0,98	0,3365	1,46	0,4279	1,94	0,4738	2,42	0,4922	2,90	0,4981
0,03	0,0120	0,51	0,1950	0,99	0,3389	1,47	0,4292	1,95	0,4744	2,43	0,4925	2,91	0,4982
0,04	0,0160	0,52	0,1985	1,00	0,3413	1,48	0,4306	1,96	0,4750	2,44	0,4927	2,92	0,4982
0,05	0,0199	0,53	0,2019	1,01	0,3438	1,49	0,4319	1,97	0,4756	2,45	0,4929	2,93	0,4983
0,06	0,0239	0,54	0,2054	1,02	0,3461	1,50	0,4332	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,94	0,4984
0,07	0,0279	0,55	0,2088	1,03	0,3485	1,51	0,4345	1,99	0,4767	2,47	0,4932	2,95	0,4984
0,08	0,0319	0,56	0,2123	1,04	0,3508	1,52	0,4357	2,00	0,4772	2,48	0,4934	2,96	0,4985
0,09	0,0359	0,57	0,2157	1,05	0,3531	1,53	0,4370	2,01	0,4778	2,49	0,4936	2,97	0,4985
0,10	0,0398	0,58	0,2190	1,06	0,3554	1,54	0,4382	2,02	0,4783	2,50	0,4938	2,98	0,4986
0,11	0,0438	0,59	0,2224	1,07	0,3577	1,55	0,4394	2,03	0,4788	2,51	0,4940	2,99	0,4986
0,12	0,0478	0,60	0,2257	1,08	0,3599	1,56	0,4406	2,04	0,4793	2,52	0,4941	3,00	0,4987
0,13	0,0517	0,61	0,2291	1,09	0,3621	1,57	0,4418	2,05	0,4798	2,53	0,4943	3,01	0,4987
0,14	0,0557	0,62	0,2324	1,10	0,3643	1,58	0,4429	2,06	0,4803	2,54	0,4945	3,02	0,4987
0,15	0,0596	0,63	0,2357	1,11	0,3665	1,59	0,4441	2,07	0,4808	2,55	0,4946	3,03	0,4988
0,16	0,0636	0,64	0,2389	1,12	0,3686	1,60	0,4452	2,08	0,4812	2,56	0,4948	3,04	0,4988
0,17	0,0675	0,65	0,2422	1,13	0,3708	1,61	0,4463	2,09	0,4817	2,57	0,4949	3,05	0,4989
0,18	0,0714	0,66	0,2454	1,14	0,3729	1,62	0,4474	2,10	0,4821	2,58	0,4951	3,06	0,4989
0,19	0,0753	0,67	0,2486	1,15	0,3749	1,63	0,4484	2,11	0,4826	2,59	0,4952	3,07	0,4989
0,20	0,0793	0,68	0,2517	1,16	0,3770	1,64	0,4495	2,12	0,4830	2,60	0,4953	3,08	0,4990
0,21	0,0832	0,69	0,2549	1,17	0,3790	1,65	0,4505	2,13	0,4834	2,61	0,4955	3,12	0,4991
0,22	0,0871	0,70	0,2580	1,18	0,3810	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,62	0,4956	3,14	0,4992
0,23	0,0910	0,71	0,2611	1,19	0,3830	1,67	0,4525	2,15	0,4842	2,63	0,4957	3,18	0,4993
0,24	0,0948	0,72	0,2642	1,20	0,3849	1,68	0,4535	2,16	0,4846	2,64	0,4959	3,22	0,4994
0,25	0.0987	0,73	0,2673	1,21	0,3869	1,69	0,4545	2,17	0,4850	2,65	0,4960	3,27	0,4995
0,26	0,1026	0,74	0,2704	1,22	0,3888	1,70	0,4554	2,18	0,4854	2,66	0,4961	3,33	0,4996
0,27	0,1064	0,75	0,2734	1,23	0,3907	1,71	0,4564	2,19	0,4857	2,67	0,4962	3,39	0,4997
0,28	0,1103	0,76	0,2764	1,24	0,3925	1,72	0,4573	2,20	0,4861	2,68	0,4963	3,49	0,49976
0,29	0,1141	0,77	0,2794	1,25	0,3944	1,73	0,4582	2,21	0,4864	2,69	0,4964	3,60	0,499841
0,30	0,1179	0,78	0,2823	1,26	0,3962	1,74	0,4591	2,22	0,4868	2,70	0,4965	3,61	0,499847
0,31	0,1217	0,79	0,2852	1,27	0,3980	1,75	0,4599	2,23	0,4871	2,71	0,4966	3,62	0,499853
0,32	0,1255	0,80	0,2881	1,28	0,3997	1,76	0,4608	2,24	0,4875	2,72	0,4967	3,63	0,499858
0,33	0,1293	0,81	0,2910	1,29	0,4015	1,77	0,4616	2,25	0,4878	2,73	0,4968	3,64	0,499864
0,34	0,1331	0,82	0,2939	1,30	0,4032	1,78	0,4625	2,26	0,4881	2,74	0,4969	3,65	0,499869
0,35	0,1368	0,83	0,2967	1,31	0,4049	1,79	0,4633	2,27	0,4884	2,75	0,4970	3,66	0,499874
0,36	0,1406	0,84	0,2995	1,32	0,4066	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,76	0,4971	3,67	0,499879
0,37	0,1443	0,85	0,3023	1,33	0,4082	1,81	0,4649	2,29	0,4890	2,77	0,4972	3,68	0,499883
0,38	0,1480	0,86	0,3051	1,34	0,4099	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,78	0,4973	3,69	0,499888
0,39	0,1517	0,87	0,3078	1,35	0,4115	1,83	0,4664	2,31	0,4896	2,79	0,4974	3,70	0,499892
0,40	0,1554	0,88	0,3106	1,36	0,4131	1,84	0,4671	2,32	0,4898	2,80	0,4974	3,75	0,499912

Окончание таблицы

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,41	0,1591	0,89	0,3133	1,37	0,4147	1,85	0,4678	2,33	0,4901	2,81	0,4975	3,80	0,499928
0,42	0,1628	0,90	0,3159	1,38	0,4162	1,86	0,4686	2,34	0,4904	2,82	0,4976	3,90	0,499952
0,43	0,1664	0,91	0,3186	1,39	0,4177	1,87	0,4693	2,35	0,4906	2,83	0,4977	4,00	0,499968
0,44	0,1700	0,92	0,3212	1,40	0,4192	1,88	0,4699	2,36	0,4909	2,84	0,4977	4,30	0,499991
0,45	0,1736	0,93	0,3238	1,41	0,4207	1,89	0,4706	2,37	0,4911	2,85	0,4978	4,50	0,499997
0,46	0,1772	0,94	0,3264	1,42	0,4222	1,90	0,4713	2,38	0,4913	2,86	0,4979	4,70	0,499999
0,47	0,1808	0,95	0,3289	1,43	0,4236	1,91	0,4719	2,39	0,4916	2,87	0,4979	5,00	0,500000

СОДЕРЖАНИЕ

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Марченко Ирина Васильевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические рекомендации

В двух частях

Часть 2

Технический редактор *А. Л. Позняков*
Компьютерная верстка *С. А. Кирильчик*

Подписано в печать 12.11 .2014.
Формат 60x84/16. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,9. Тираж 52 экз. Заказ №388 .

Учреждение образования "Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1
Свидетельство ГРИИРПИ № 1/131 от 03.01.2014 г.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
МГУ имени А. А. Кулешова. 212022, Могилев, Космонавтов, 1.