О СТАРШЕМ ПОКАЗАТЕЛЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ ИЗ КЛАССОВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ НЕМОНОТОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

И. В. Марченко (Минск, Беларусь)

Рассмотрим возмущенную линейную дифференциальную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

с ограниченной кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов A, интегрально ограниченной кусочно-непрерывной матрицей возмущений Q и старшим показателем $\lambda_n(A+Q)$.

Пусть φ — положительная и кусочно-непрерывная на $[0, +\infty[$ функция, а $\theta(k) = \operatorname{ess\,sup}\{\varphi^{-1}(t) : k \leqslant t \leqslant k+1\}$ — существенный супремум функции φ^{-1} на $[k, k+1[$. Обозначим через $\mathfrak{I}[\varphi]$ множество возмущений Q таких, что выполняется условие $\int\limits_0^\infty \varphi(t)\|Q(t)\|dt < +\infty$, а через $\mathfrak{L}[\varphi]$ — множество матриц Q, для которых имеет место соотношение $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1} \int\limits_0^t \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|d\tau = 0$. Пусть кроме того $X(t,\tau)$ — матрица Коши системы (1) без возмущений, т. е. при $Q(t) \equiv 0$.

В случае монотонно возрастающей функции φ, величина

$$\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\},$$

где $\mathfrak{M} = \mathfrak{I}[\varphi]$ или $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}[\varphi]$, вычислена в [1, 2].

Теорема 1. *Если $\varphi(t) \geqslant 2$ при всех $t \geqslant 0$ и для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполняется равенство*

$$\lim_{m\to+\infty} m^{-1} \sum_{k=1}^{m} \theta^{1+\varepsilon}(k) \int\limits_{k-1}^{k} \varphi(\tau)d\tau = 0,$$

то справедлива формула $\Lambda(\mathfrak{L}[\varphi]) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, где последовательность η_m при $m \in \mathbb{N}$ определяется рекуррентным соотношением

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|\theta(k)\eta_k), \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

Электронный архив библиотеки МГУ имени А. А. Кулешова

с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$.

Теорема 2. *Если* $v(k) := k^{-1}\theta(k) \leqslant 1/2$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$ *и для каждого достаточно малого* $\varepsilon > 0$ *выполнено неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} v^{1+\varepsilon}(k) \int\limits_{k-1}^{k} \varphi(t)dt < +\infty,$$

то справедлива формула $\Lambda(\mathfrak{I}[\varphi]) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, *где последовательность* η_m *при* $m \in \mathbb{N}$ *определяется рекуррентным соотношением*

$$\eta_m = \max_{k<m}(\|X(m,k)\|v(k)\eta_k), \quad k \in \mathbb{N}\cup\{0\},$$

с произвольным начальным условием $\eta_0 > 0$.

Литература

1. Макаров Е. К., Марченко И. В., Семерикова Н. В. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 215 – 224.

2. Марченко И. В. // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 11. С. 1578.

Электронный архив библиотеки МГУ имени А.А. Кулешова