УДК 517.926

И.В. МАРЧЕНКО

О СТАРШЕМ ПОКАЗАТЕЛЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ ИЗ КЛАССОВ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ НЕМОНОТОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathrm{R}^n,\ t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что $\|A(t)\| \leq M < +\infty$ при всех $t \geq 0$. Наряду с системой (1), рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y,\ y \in \mathrm{R}^n,\ t \geq 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей возмущений Q, удовлетворяющей условию интегральной ограниченности [1, с. 252], т.е. неравенству $\int\limits_t^{t+1} \|Q(\tau)\| d\tau \leq C_Q < +\infty$ при всех $t \geq 0$, где C_Q – некоторая константа, зависящая от Q.

Определение 1. Характеристическим показателем Ляпунова вектор-функции $f : [0,+\infty[\to \mathrm{R}^n$ называется число $\lambda[f] := \overline{\lim\limits_{t \to +\infty}}\, t^{-1} \ln\|f(t)\|$.

Еще Ляпуновым было установлено [2, с. 31-34], что каждое ненулевое решение системы (1) имеет конечный характеристический показатель, решения с различными показателями линейно независимы и для любого $\alpha \in \mathrm{R}$ решения, удовлетворяющие условию $\lambda[x] \leq \alpha$, образуют линейное подпространство пространства решений. Отсюда следует, что система (1) может иметь не более n различных значений показателя и каждому такому значению можно приписать кратность, равную наибольшему числу линейно независимых решений, показатель которых имеет это значение. Таким образом, всякой системе (1) можно поставить в соответствие ее совокупность характеристических показателей $\lambda_1(A) \leq \ldots \leq \lambda_n(A)$, упорядоченных по возрастанию. Для показателей системы (2) будем использовать обозначения $\lambda_1(A+Q) \leq \ldots \leq \lambda_n(A+Q)$. Показатель $\lambda_n(A)$ называется старшим показателем системы (1).

Всякий показатель под действием сколь угодно малых возмущений может смещаться как вверх, так и вниз. Естественно, что для старшего показателя, служащего для оценки решений сверху, в первую очередь, важна точная оценка сверху. Таким образом, возникает задача построения достижимых верхних оценок для старшего показателя системы (2) с возмущениями из некоторого класса малости $\mathfrak{M}$, то есть величин $\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\limits_{Q\in\mathfrak{M}} \lambda_n(A+Q)$. В качестве класса малости $\mathfrak{M}$ здесь могут рассматриваться, например, класс бесконечно малых, т.е. стремящихся к 0 на бесконечности, возмущений; класс экспоненциально убывающих возмущений и другие. Эта задача является одной из важнейших задач современной теории характеристических показателей.

Самым первым достижением в этом направлении явилось вычисление старшего центрального показателя $\Omega(A)$, введенного в [3] как оценка сверху для старшего показателя систем (2) с малыми возмущениями. Достижимость этой оценки доказана В.М. Миллионщиковым в [4] с помощью его, ставшего уже классическим, метода поворотов [4, 5, см. также 6, с. 90]. В [7] показано, что старший центральный показатель достижим также и в классе бесконечно малых возмущений. Старший сигма-показатель $\nabla_\sigma(A)$, соответствующий классу σ-возмущений, т.е. возмущений, экспоненциально убывающих на бесконечности с показателем убывания не меньшим, чем $\sigma > 0$, вычислен в [8], а его свойства как функции параметра $\sigma > 0$ подробно изучены в работах [9-12]. Старший экспоненциальный показатель $\nabla_0(A)$, соответствующий предельному классу всех экспоненциально убывающих возмущений, вычислен в [13]. Промежуточные случаи, когда возмущение затухает на бесконечности, но скорость его убывания медленнее, чем экспоненциальная, рассмотрены в [14, 15]. Для малых в среднем возмущений эта задача решается в [16].

Во всех этих работах достижимость получаемых оценок доказывалась, прямо или косвенно, с помощью метода поворотов, а для построения самих этих оценок применялся метод верхних функций, впервые сформулированный, вероятно, в [3]. Принципиальной особенностью метода поворотов является его дискретность. При его использовании возмущения сосредоточиваются вблизи точек некоторой последовательности моментов времени, в которые происходит переход между различными решениями невозмущенной системы, а вычисление характеристических показателей возмущенных систем осуществляется по значениям, принимаемым решениями в этих точках.

Метод же верхних функций включает в себя ряд технических приемов, связанных с использованием интегральных неравенств и леммы Гронуолла-Беллмана, что позволяет сделать его дискретным лишь частично (см. [1, с. 106]). Для его применения выбирают функции R: $[0, +\infty[\, \to \mathbf{R}$ и a: $[0, +\infty[\, \to \mathbf{R}$ такие, что для матрицы Коши системы (1) справедлива оценка $\ln\|X(t,s)\| \le R(t)-R(s)+a(s)$. При этом функция a обычно выбирается так, чтобы интеграл $\int\limits_0^t e^{a(s)}\|Q(s)\|ds$ имел нулевой или, по крайней мере, близкий к нулевому показатель для любого $Q\in\mathfrak{M}$, а функция R чаще всего строится на основе матрицы Коши системы (1) с помощью разбиения полуоси точками специальным образом выбранных последовательностей. Метод верхних функций весьма универсален и обладает широкой применимостью, однако его использование требует определенного искусства, заключающегося, прежде всего, в умении правильно выбрать функции R и a.

В [18] предложен новый метод оценки характеристических показателей возмущенных линейных дифференциальных систем, который является полностью дискретным и не использует стандартную технику применения леммы Гронуолла-Беллмана. Кроме того, этот метод в отличие от метода верхних функций проще в использовании и не требует при своем применении каких-либо неформализованных навыков. С другой стороны, следует отметить, что он является более специализированным, чем метод верхних функций, так как применим только в случае линейных систем с линейными же возмущениями.

С помощью этого метода оказалось возможным рассмотреть следующие классы возмущений: класс $\mathfrak{B}[r]$, состоящий из возмущений Q, для которых при всех $t \geq 0$ выполнено неравенство $\|Q(t)\| \leq N_Q r(t)$, где N_Q – некоторая постоянная, зависящая от Q, а r – положительная кусочно-непрерывная вещественная функция, определенная и ограниченная на промежутке $[0,+\infty[$; класс $\mathfrak{I}[\varphi]$, состоящий из возмущений Q, удовлетворяющих условию $\int\limits_0^\infty \varphi(t)\|Q(t)\|dt < +\infty$; класс $\mathfrak{L}[\varphi]$, состоящий из интегрально ограниченных возмущений, для которых имеет место равенство $J(Q) := \overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|d\tau = 0$, где φ – положительная локально суммируемая функция, определенная и кусочно-непрерывная на промежутке $[0,+\infty[$, причем $\varphi(t) \geq q > 0$ при всех $t \geq 0$.

Пусть $X(t,\tau)$ и $Y(t,\tau)$ – матрицы Коши систем (1) и (2) соответственно.

Теорема 1. Если при некотором $0 < \varepsilon_0 < 1$ *для каждого* $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$ *выполнено равенство* $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\sum\limits_{k=0}^{m-1} f^{\varepsilon}(k) = 0$, *где* $f(k) = \int\limits_k^{k+1} r(t)dt$, *и существует* $\rho > 0$ *такое, что для любого* $k \in N$ *при всех* $t \in [k-1,k]$, *за исключением конечного числа точек, выполняется неравенство* $f(k) \leq \rho r(t)$, *то справедлива формула* $\Lambda(\mathfrak{B}[r]) = \overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, *где последовательность* η_m *при* $m > 1$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* $\eta_m = \max\limits_{k<m}(\|X(m,k)\| f(k)\eta_k)$, $k, m \in N$, *с произвольным начальным условием* $\eta_1 > 0$.

Замечание 1. В теореме 1 предполагается, что для функции r справедлива оценка $r(t) \leq 1/2$ при всех $t \geq 0$. Это не ограничивает общности рассмотрения. Действительно, вместо функции r возьмем функцию r^*, определяемую формулой $r^*(t) := a^{-1}r(t)/2$, для которой условие $r^*(t) \leq 1/2$ выполнено при всех $t \geq 0$. Тогда, используя равенство, связывающее функции r и r^*, для любой матрицы Q, принадлежащей одному из классов $\mathfrak{B}[r]$ или $\mathfrak{B}[r^*]$, всегда можно получить оценку $\|Q(t)\| \leq N_Q^* r^*(t) = N_Q r(t)$, где $N_Q^* = 2aN_Q$, а значит $\mathfrak{B}[r] = \mathfrak{B}[r^*]$.

Теорема 2. Если при некотором $0 < \varepsilon_0 < 1$ *для каждого* $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$ *выполняется равенство* $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\, m^{-1}\sum\limits_{k=1}^{m} \theta^{-(1+\varepsilon)}(k)\int\limits_{k-1}^{k}\varphi(\tau)d\tau = 0$, *где*

$\theta(k) = \operatorname{ess\,inf}\{\varphi(t) : k \le t \le k+1\}$ – *существенный супремум*[1] *функции* φ, *то справедлива формула* $\Lambda(L[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, *где последовательность* η_m *при* $m > 1$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* $\eta_m = \max\limits_{k<m}\left(\|X(m,k)\|\theta^{-1}(k)\eta_k\right)$, $m,\ k \in \mathrm{N}$, *с произвольным начальным условием* $\eta_1 > 0$.

Теорема 3. Если при некотором $0 < \varepsilon_0 < 1$ *для каждого* $\varepsilon \in \left]0, \varepsilon_0\right[$ *выполнено неравенство* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(k\theta(k)\right)^{-(1+\varepsilon)}\int\limits_{k-1}^{k}\varphi(t)\,dt < +\infty$, *где* $\theta(k) = \operatorname{ess\,inf}\{\varphi(t) : k \le t \le k+1\}$, *то справедлива формула* $\Lambda(\mathfrak{S}[\varphi]) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\ln\eta_m$, *где последовательность* η_m *определяется рекуррентно соотношениями* $\eta_1 > 0$, $\eta_m = \max\limits_{k<m}\left(\|X(m,k)\|k^{-1}v^{-1}(k)\eta_k\right)$, *k*, $m \in N$, $m > 1$.

Замечание 2. В теоремах 2 и 3 предполагается, что для функции φ при всех $t \ge 0$ справедлива оценка $\varphi(t) \ge 2$. Это также не ограничивает общности рассмотрения. Действительно, возьмем вместо функции φ функцию φ^*, определяемую формулой $\varphi^*(t) := 2q^{-1}\varphi(t)$, для которой выполняется условие $\varphi^*(t) \ge 2$. В силу соотношений $\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\|Q(\tau)\|d\tau = q/2\, \overline{\lim_{t\to+\infty}}\, t^{-1}\int\limits_0^t \varphi^*(\tau)\|Q(\tau)\|d\tau = 0$ справедливо равенство $\mathfrak{L}[\varphi] = \mathfrak{L}[\varphi^*]$, где матрица Q принадлежит любому из этих двух классов. В том случае, когда матрица Q принадлежит одному из классов $\mathfrak{S}[\varphi]$ или $\mathfrak{S}[\varphi^*]$, будет выполняться равенство $\mathfrak{S}[\varphi] = \mathfrak{S}[\varphi^*]$, так как имеют место соотношения $\int\limits_0^{\infty}\varphi(\tau)\|Q(\tau)\|d\tau = q/2\int\limits_0^{\infty}\varphi^*(\tau)\|Q(\tau)\|d\tau < +\infty$.

Изложим схему доказательства теорем 1-3. Оно состоит из двух частей: построение оценок сверху для старшего показателя любой системы (2) с воз-мущениями из рассматриваемых классов и доказательства достижимости этих оценок. Оценки сверху для старшего показателя системы (2) с указанными возмущениями во всех трех теоремах строятся с помощью метода, описанного в работе [18] и основывающегося на следующем утверждении.

Пусть заданы возмущения Q и положительная функция β, определенная на множестве $N_0 = N \cup \{0\}$, такая, что справедливо равенство $\overline{\lim_{m\to\infty}}\, m^{-1}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\| = 0$, в котором матрицы V_k определяются равенством $V_k = \int\limits_k^{k+1} X(k,\tau)Q(t)Y(\tau,k)\,d\tau$.

[1] Существенным супремумом измеримой функции φ на множестве *X* называется наибольшее из чисел *C*, для которых имеет место неравенство $\varphi(x) \ge C$ на множестве полной меры из *X*.

Тогда для старшего показателя системы (2) выполняется оценка $\lambda_n(A+Q)=\overline{\lim_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$, где последовательность η_m при $m>1$ удовлетворяет рекуррентной формуле $\eta_m=\max_{k<m}(\|X(m,k)\|\beta(k)\eta_k)$, $k,m\in N$, с произвольным начальным условием $\eta_1>0$, причем величина $\overline{\lim_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$ не зависит от выбора η_1.

Применение этой теоремы осуществляется следующим образом. Выбираем функцию β, полагая $\beta(k)=f^{1-\varepsilon}(k)$ при $k\in N_0$ в теореме 1, $\beta(k)=\theta(k)$ при $k\in N_0$ в теореме 2, $\beta(k)=(k\theta(k))^{-1}$, $k\in N$, а $\beta(0)=1$ в теореме 3, и проверяем равенство $\overline{\lim_{m\to\infty}} m^{-1}\sum_{k=0}^{m-1}\beta^{-1}(k)\|V_k\|=0$. При этом используется тот факт, что для ин-тегрально ограниченной матрицы Q справедливы неравенства $\|V_k\|\le b\int_k^{k+1}\|Q(\tau)\|d\tau\le bC_Q$, где $b:=e^{2M+C_Q}$, а также характеристическое свойство рассматриваемого класса возмущений. Если указанное равенство имеет место, то по теореме 4 получаем оценку сверху для $\lambda_n(A+Q)$. В теореме 1 дополнительно совершается предельный переход при $\varepsilon\to+0$ на основе обобщения свойства А из [8].

Доказательство достижимости получаемых оценок проводится с помощью метода поворотов, но по сравнению со стандартным способом его применения, продемонстрированного в [4, 5, 8, 13], здесь имеются отличия.

Введем обозначения. Пусть d – произвольное множество неотрицательных целых чисел с числом элементов $s\in N_0$. Будем считать, что при $d\ne\varnothing$ элементы множества d упорядочены в порядке возрастания $d_1<\ldots<d_s$. Возьмем некоторую функцию β: $N_0\to\,]0,+\infty[$, и для любых чисел $l,m\in N_0$, $m>l$, и всевозможных множеств $d\subset[l,m[$, определим величину $\Gamma_d^\beta(m,l)=\|X(m,d_s)\|\beta(d_s)\ldots\|X(d_2,d_1)\|\beta(d_1)\|X(d_1,l)\|$. Положим $\Phi(m,l):=\max_{d\in[l,m[}\Gamma_d^\beta(m,l)$. В дальнейшем будем говорить, что множество $D\subset[l,m[$ реализует величину $\Phi=(m,l)$, если D реализует максимум величины $\Gamma_d^\beta(m,l)$ по $d\subset[l,m[$, т.е. $\max_{d\subset[l,m[}\Gamma_d^\beta(m,l)=\Gamma_D^\beta(m,l)$.

Пусть T_k, $k\in N_0$, – некоторая монотонно возрастающая последовательность неотрицательных целых чисел, причем $T_0=0$, и пусть $\Phi_k:=(T_k,T_{k-1})$.

Теорема 5. Если выполнено условие $T_k^{-1}\sum_{i=1}^{k-1}\ln\beta_0(T_i)=0$, *где* $\beta_o(i)=\min\{1,\beta(i)\}$, $i\in N_0$, *то справедливо равенство*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} T_k^{-1}\ln\Phi(T_k,0)=\overline{\lim_{k\to\infty}} T_k^{-1}\sum_{i=1}^{k-1}\ln\Phi_i .$$

Построение происходит в основном по схеме, впервые предложенной в [8], т.е. также, как и там, выбирается последовательность T_k такая, что $\overline{\lim_{k\to\infty}} T_k^{-1}\ln\eta_{T_k}=\overline{\lim_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$, причем $T_k^{-1}\sum_{i=1}^{k-1}\ln\beta_0(T_i)\to0$ при $k\to\infty$, и $T_0=0$, но в отличие от [8] каждый отрезок $[T_{k-1}, T_k]$ разбивается точками множества $D(k)$, реализующего Φ_k, а не точками множества $G(k)$, реализующего $\Phi(T_k,0)$. Это позволяет избавиться от громоздких оценок, которые возникают в [8] вблизи каждой точки T_k и необходимы там для доказательства того, что проводимые построения не слишком сильно уменьшают рост строящегося решения по сравнению с максимальным. Вместо этого в нашем случае сразу применяется теорема 5. Для завершения доказательства используется тот факт, что η_m и $\Phi(m,0)$ совпадают при всех $m > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Былое Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.*** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М., 1966.
2. ***Ляпунов А.М.*** Собр. соч.: В 6 т. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 473 с.
3. ***Виноград Р.Э.*** // Матем. сборник. – 1957. – Т. 42. – № 2. – С. 207-222.
4. ***Миллионщиков В.М.*** // Сиб. матем. журнал. – 1969. – Т. 10. – № 1. – С. 99-104.
5. ***Миллионщиков В.М.*** // Матем. заметки. – 1968. – Т. 4. – Вып. 2. – С.173-180.
6. ***Изобов Н.А.*** // Итоги науки и техн. Мат. анализ. – М., 1974. – Т. 12. – С. 71-146.
7. ***Сергеев И.Н.*** // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 3. – С. 438-448.
8. ***Изобов Н.А.*** // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 7. – С. 1186-1192.
9. ***Барабанов Е.А., Изобов Н.А.*** // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 12. – С. 3-8.
10. ***Барабанов Е.А.*** // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 5. – С. 724-739.
11. ***Барабанов Е.А.*** // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 2. – С. 187-205.
12. ***Фодор Я.*** О задаче Ляпунова о промежуточной устойчивости по первому приближению: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Будапешт, 1983.
13. ***Изобов Н.А.*** // Докл. АН БССР. – 1982. – Т. 26. – № 1. – С.5-8.
14. ***Барабанов Е.А.*** // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 2. – С. 357.
15. ***Барабанов Е.А.*** Точные границы крайних показателей Ляпунова линейных дифференциальных систем при экспоненциальных и степенных возмущениях. Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Минск, 1984.
16. ***Барабанов Е.А., Вишневская О.Г.*** // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41. – № 5. – С. 29-34.
17. ***Сергеев И.Н.*** // Труды семинара им. И.Г. Петровского. 1986. – Вып. 11. – С. 32-73.
18. ***Макаров Е.К., Марченко И.В., Семерикова Н.В.*** // Международная конференция, посвященная 103-летию со дня рождения И.Г. Петровского (XXI совместное заседание ММО и семинара им. И.Г. Петровского), Москва, 16-22 мая 2004 г.: Тезисы докладов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – С. 130-131.

SUMMARY

The exact upper bound for the higher exponent of linear differential system with perturbations from the following classes: the perturbations bounded by non-monotonic functions; perturbations infinitesimal on the average with non-monotonic piecewise continuous weight; perturbations summable on the semi-axis with non-monotonic piecewise continuous weight, is calculated.