

УДК 372.851

И.П. ЛОБАНОК

## О ВОПРОСАХ ПРОПЕДЕВТИКИ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

На этапе реформирования школьного образования при изучении математики большое внимание уделяется интеграции не только внутрипредметного, но и межпредметного характера. Одним из средств реализации интеграции на практике является пропедевтика знаний. Поскольку мы рассматриваем пропедевтику как одно из средств интеграции, то уточняем имеющиеся определения этого понятия. *Пропедевтика* – сообщение предварительных знаний по той или иной математической теме, излагаемое в элементарной, систематизированной и сжатой форме и ведущее как к внутрипредметной, так и межпредметной интеграции школьного курса математики.

В современном понимании понятие пропедевтики смыкается с понятием концентрического изложения материала. Данные эксперимента, проведенного П.М. Эрдниевым, показали преимущества системы, когда материал располагается в виде разворачивающейся ввысь спирали, причем каждый виток спирали образует некоторую внутренне целостную единицу и изучается в одном классе, во взаимопревращении родственных понятий друг в друга внутри каждого цикла. Таким образом отражается философская идея о спиральном развитии. При спиральном расположении материала возникают связи знаний как бы в двух направлениях: горизонтальном (квадратное уравнение, квадратичная функция, квадратичное неравенство) и вертикальном (линейные и квадратные уравнения). Более сильными должны быть горизонтальные связи между однопорядковыми элементами структуры.

С пропедевтикой тесно связано еще одно положение, вытекающее из закона соответствия процесса развития знаний и мышления у ребенка и исторического процесса рождения и становления знаний: процесс формирования и развития понятий о математических структурах в основном должен быть в сжатом, сокращенном виде воспроизводить действительный исторический процесс рождения и становления этих понятий.

Это положение выдвигается многими математиками и называется генетическим методом, или принципом историзма. Лучший способ вести умственное развитие учащегося – помочь ему пройти умственное развитие человеческого рода, его большие линии, а не тысячи мелких ошибок.

Нарушение этого положения может привести к трудностям в преподавании математики, к непониманию учащимися материала. Так, если предлагать ученикам новые математические понятия в их законченной и наиболее развитой форме, к которой наука пришла в процессе длительного исторического и логического развития, то учащиеся лишены возможности наблюдать развитие понятий, процесс их становления. В этом случае становится непонятным, для чего изучают понятия и откуда они взялись.

Пропедевтическое введение математического материала согласуется с выводами психологов. Так, согласно теории поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина, ребенок способен усвоить то или иное понятие (представление) только в процессе деятельности, которая выполняется в различных формах: материальной или материализованной, перцептивной, внеш-

неречевой, умственной. При изучении материала, с которым учащиеся уже предварительно знакомы, некоторые этапы пропускаются и происходит свертывание процесса мышления, что сказывается как на скорости протекания мыслительных операций, так и на их организации.

Как показывают исследования Л.С. Выготского, уровень психического развития ребенка определяется его воспитанием и обучением: "Правильно организованное обучение ребенка ведет за собой детское умственное развитие, вызывает к жизни целый ряд таких процессов развития, которые вне обучения вообще сделались бы невозможными" [2, с. 225]. Под его руководством было экспериментально доказано, что даже маленькие дети (4-5 лет) в результате обучения весьма быстро приобретают навыки логического мышления, в частности, умение классифицировать и аргументированно обосновывать свои выводы.

Трудности, возникающие при изучении систематического курса математики, заключаются в неподготовленности учеников к доказательствам. Учеников настораживает само слово "докажи", и они уже изначально настраиваются на то, что эта задача им не по силам. Исследования психологов школы Л.С. Выготского позволяют утверждать, что подготовку можно и нужно начинать уже в начальной школе, формулируя задачи на сложение, умножение, деление сначала с использованием слов "проверь", "убедись", "сравни", а затем и слова "докажи". Тогда ученики на уроках геометрии не будут опасаться задач на доказательства. Подготовку к сложному доказательству целесообразно начинать заблаговременно, сначала показать в решении задачи или доказательстве теоремы элементы "трудного" доказательства. Когда же придет время изучения этого доказательства, трудностей не возникнет.

Д.А. Антонов [1, с. 4-5] в качестве основных трудностей, возникающих в процессе формирования понятий, выделяет следующие:

1) трудности объективного характера, которые возникают, когда понятие высоко абстрактно, сложна его структура и т.п.;

2) трудности субъективного характера, когда учащийся не имеет предварительной специальной подготовки для осмысленного восприятия понятия.

Другие трудности можно охарактеризовать двумя особенностями:

1) психологического характера, когда учащемуся предлагается такой материал, для усвоения которого он не подготовлен, в его сознании в ходе предшествующего обучения не заложены основные идеи изучаемого материала, т.е. у школьника отсутствует соответствующая интуиция;

2) методического характера – новизна, изолированность понятия от других разделов школьного курса, когда в учебном курсе нет достаточного материала для предварительного развития представлений и опыта школьника, т.е. понятие не было сформировано на пропедевтическом уровне.

Таким образом, чем раньше мы начинаем изучать то или иное математическое понятие, свойство, факт без особых углублений в теорию, тем легче будет в дальнейшем изучение этого математического объекта с соответствующими теоретическими обоснованиями.

В обучении математике большое значение придается имеющейся у учащихся витагенной информации, под которой понимают информацию, связанную с жизненным опытом и ставшую достоянием личности, отложенную в резервах долговременной памяти и находящуюся в состоянии постоянной готовности к актуализации в адекватных ситуациях. Это своеобразный сплав мыслей, знаний, эмоций, поступков, прожитых индивидом и имеющих для него определенную (чаще всего весьма значимую) ценность. Эта информация связана с памятью разума, чувств, поведения, т.е. это то, что прожито человеком.

Идея опоры на жизненный опыт школьников в учебно-воспитательном процессе получила развитие в теориях и концепциях следующих направлений: личностно ориентированное обучение (Д.А. Белухин, Э.Ф. Зеер, И.С. Якиманская), педагогика сотрудничества (Ш.А. Амонашвили), теория эвристического обучения (А.В. Хуторской), индивидуализация и дифференциация обучения (И.Э. Унт), теория проблемного обучения (И.Я. Лернер, М.И. Махмутов, М.М. Скаткин), концепция оптимизации и интенсификации учебно-воспитательного процесса (Ю.К. Бабанский), теория развивающего обучения (В.В. Давыдов, Л.В. Занков), технология педагогических мастерских (А.А. Окунев), технология коллективного способа обучения (В.К. Дьяченко), теория решения изобретательских задач (А.Г. Альтшуллер). В указанных концепциях и теориях обучения жизненный опыт школьников используется для иллюстрации изучаемого материала, для создания проблемной ситуации и поиска путей для ее разрешения, для корректировки имеющихся представлений и понятий, но не как основа организации учебно-воспитательного процесса.

Опора на витагенный опыт учащихся – один из возможных путей ее решения. Поэтому мы говорим о необходимости изучения витагенного опыта школьников, определения уровня их информированности в предмете, выбора модели обучения и экспериментальной проверки влияния технологий витагенного обучения на развитие познавательного интереса.

Выделяются пять основополагающих компонентов накопленного учащимися опыта: характер витагенной информации учащихся в знаниях естественнонаучного цикла, их отношение к природе, уровень развития интереса к природе и изучаемому предмету, сформированность надпредметных умений и навыков, образовательный статус учащихся. Выделение подобных компонентов обусловлено рядом положений:

1) уровень витагенной информированности школьников зависит от их социокультурного окружения, образовательного уровня семьи;

2) витагенный опыт складывается из опыта действий, опыта чувств, опыта умственных операций и т.п., интенсивность которых зависит от уровня развития познавательного интереса школьников, выступающих в роли субъектов того или иного вида деятельности;

3) познавательный интерес, являясь главнейшим мотивом учения, способствует формированию не только учебного опыта, но и витагенного, основой которого является витагенная информация;

4) витагенная информация, выступая как совокупность знаний, чувств, поступков, отражает мироощущение личности на определенных стадиях ее развития. Таким образом, характер витагенной информации является показателем определенного уровня развития витагенной информированности школьников;

5) характер витагенной информации определяется отношением индивида к тому или иному предмету (в нашем случае – к математике), т.е. витагенная информированность в том или ином предмете напрямую зависит от субъективного отношения индивида к нему;

6) сформированность надпредметных умений и навыков при характеристике различных групп учащихся по уровню витагенной информированности представляется нам значимой, т.к. показать свою информированность в полном объеме смогут учащиеся, способные выделять главное, группировать, классифицировать объекты, самостоятельно находить информацию и т.д.;

7) высокий образовательный статус учащегося является, с одной стороны, следствием определенного уровня витагенной информированности, а с другой – предопределяет рост информированности, т.к. ученики с высокой степенью обу-

чаемости более успешно приобретают и учебный, и жизненный опыт и эффективнее его используют в адекватных ситуациях.

При обучении математике можно выделить три уровня витагенной информированности школьников в математических предметах, которые в целом можно охарактеризовать следующим образом:

- 1) низкий уровень витагенной информированности – это элементарные житейские знания с низким образовательным потенциалом;
- 2) средний уровень – это элементарно-эмпирические знания с достаточным образовательным потенциалом;
- 3) высокий уровень – элементарно-научные знания, обладающие высоким образовательным потенциалом для дальнейшего развития как самого носителя знания, так и для окружающих.

В процессе обучения математике у учащихся витагенный опыт может возрасти. Выделим факторы, способствующие переходу учащихся от низкого уровня на более высокий:

- 1) знание учителем уровня витагенной информированности учащихся;
- 2) субъект-субъектная основа организации образовательного процесса;
- 3) развитие познавательного интереса;
- 4) осознание ребенком своего незнания;
- 5) формирование ценностного отношения к знанию;
- 6) умение актуализировать витагенный опыт в адекватных ситуациях;
- 7) формирование умения взаимодействовать со всеми субъектами учебного процесса;
- 8) умение соотносить витагенную и научную информацию;
- 9) умение преодолевать когнитивный диссонанс;
- 10) современная и грамотная корректировка математических и житейских представлений учащихся;
- 11) создание ситуации успеха для каждого ученика.

Как мы уже отмечали, при изучении математики опора на витагенную информацию необходима, а для этого нужна ее актуализация. Для успешной актуализации витагенного опыта школьников при обучении математике целесообразно выполнять следующие условия:

- 1) снять психологический барьер, дать детям возможность почувствовать свою защищенность;
- 2) дать возможность высказаться каждому ученику;
- 3) обсудить правила общения в классе (быть откровенным, говорить по очереди, не перебивать, не высмеивать других и т.д.);
- 4) оставлять достаточно времени в конце урока, чтобы обсудить проделанную работу и отметить наиболее содержательные высказывания;
- 5) на первых уроках применять работу в парах, т.к. детям поначалу легче говорить друг с другом;
- 6) в конце урока, занятия поблагодарить и похвалить детей за их работу;
- 7) давать возможность высказываться до конца всем учащимся, в том числе и тем, чей витагенный опыт не является в достаточной степени научным;
- 8) необходимо предлагать упражнения, при выполнении которых ученики способны почувствовать ценность своего витагенного опыта;
- 9) быть искренним и принимать детей такими, какие они есть;
- 10) поддерживать стремление учащихся расширить свое информационное поле, витагенный опыт;
- 11) научить детей взаимодействовать таким образом, чтобы они умели ценить мнение других и при необходимости корректировать свою точку зрения;
- 12) создавать ситуации успеха для каждого ученика.

Пропедевтика знаний как педагогическая категория имеет цели, функции, виды и формы.

Цели пропедевтики реализуются на следующих основных уровнях: наглядно-ситуативном, начально-формалистическом, формально-логическом.

*Наглядно-ситуативный* уровень обучения – уровень обучения учащихся, при котором часто используются жизненный опыт, полученные ранее знания, знакомые ситуации, которые подвергаются математическому изучению.

*Начально-формалистический* уровень обучения – уровень обучения математике, при котором происходит первичное изучение явлений и процессов.

*Формально-логический* уровень обучения является необходимым условием сознательного изучения теоретических вопросов.

Пропедевтическое обучение выполняет *обучающую функцию*. Оно направлено на сближение материала смежных дисциплин или различных тем одной дисциплины благодаря установившимся внутрипредметным или межпредметным интеграционным связям, способствует более качественному усвоению материала. Пропедевтическое обучение помогает лучше усвоить изучаемый в данный момент материал, поскольку материал вводится в сопоставительных целях и, таким образом, оттеняет свойства изучаемого объекта, служит различению этих свойств, что ведет к интеграции математического материала. Опережение способствует также лучшему осмыслению изучаемого материала, т.е. осуществляется подготовка учащихся к восприятию будущего материала.

Пропедевтика выполняет *развивающую функцию*. Сравнение, сопоставление, аналогия – все это не только способствует лучшему усвоению знаний, но и, приводя мыслительную деятельность учащихся в состояние внутреннего напряжения, развивает их различные познавательные способности.

Пропедевтика обладает *мотивационно-побудительной функцией*, поскольку новый материал, направленный на перспективу, при сближении со старым побуждает к деятельности. Познавательный интерес возникает при этом из нестандартности, необычности действий учащихся.

В зависимости от того, сколько раз происходит изучение некоторого математического факта на пропедевтическом уровне, можно выделить следующие виды пропедевтики: точечная, эпизодическая пропедевтика и перспективно-опережающее обучение.

*Точечная пропедевтика* – это изучение некоторого математического материала или понятия на пропедевтическом уровне на отдельно взятом уроке до основного изучения этого материала.

При изучении теоремы Пифагора учащимся можно предложить несколько задач, в ходе решения которых учителю следует сообщить учащимся тот факт, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Этот факт излагается учащимся на пропедевтическом уровне, без доказательства.

Задача 1. Вокруг прямоугольного треугольника с катетами 8 и 6 описана окружность. Найдите ее радиус.

Задача 2. Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 10 см, а один из катетов равен 8 см. Найдите другой катет.

Задача 3. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 6. Другой катет равен 8. Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.

Для решения третьей задачи следует предложить учащимся доказать, что медиана прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы с использованием изученного при решении предыдущих задач факта. Если у учащихся возникают трудности, учитель делает рисунок прямоугольного треугольника,

вписанного в окружность, на доске и обращает внимание учащихся на радиусы, проведенные в вершины треугольника.

*Эпизодическая пропедевтика* – это изучение математического материала или понятий на протяжении ряда уроков до основного изучения этого материала.

Прежде чем учащиеся начнут изучать квадратные уравнения по программе, они неоднократно встретятся с несколькими видами квадратных уравнений при изучении других тем.

Во-первых, учащиеся знакомятся с таким видом квадратных уравнений, которые в процессе решения сводятся к линейным уравнениям. Например, уравнение  $3x^2 - 3x(x-5) = 6(2x+4)$  после преобразований примет вид линейного уравнения  $3x = 24$ .

Во-вторых, при изучении квадратного корня учащиеся знакомятся с еще одним видом квадратного уравнения, а именно  $ax^2 = b$ , которое решается по определению квадратного корня.

В-третьих, с двумя вышеуказанными видами квадратных уравнений учащиеся встречаются и при изучении теоремы Пифагора, поскольку при решении геометрических задач не обойтись без уравнений.

**Задача 4.** Найдите катеты прямоугольного треугольника, если их длины относятся как 3:2, а гипотенуза равна  $\sqrt{52}$ .

В процессе решения этой задачи получаем квадратное уравнение  $(2x)^2 + (3x)^2 = (\sqrt{52})^2$ , которое после преобразований сводится к уравнению  $x^2 = 4$ , т.е. к уравнению вида  $ax^2 = b$ .

**Задача 5.** В прямоугольном треугольнике один катет равен 6 м, а другой катет на 2 м меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу и катет.

При решении задачи 5 получаем уравнение  $(x+2)^2 = 6^2 + x^2$ , с помощью преобразований оно сводится к линейному уравнению  $4x = 32$ .

Таким образом, при эпизодической пропедевтике происходит неоднократное знакомство с некоторым математическим материалом.

*Перспективно-опережающее обучение* – это пропедевтическое изучение материала задолго до его изучения по плану параллельно с основным материалом. При этом тема развивается постепенно, медленно, со всеми логическими переходами.

Изучению теоремы Пифагора может предшествовать перспективно-опережающая работа, которую следует начинать за два месяца до момента изучения темы по плану (она рассчитана по меньшей мере на 10 уроков математики: 8 уроков геометрии и 2 урока алгебры), отводя на уроках алгебры и геометрии не более 3-5 минут.

Поскольку теорему Пифагора можно доказать через площади фигур [3, 6], то перспективно-опережающую работу следует организовать так, чтобы учащиеся получали задания на нахождение площадей комбинаций геометрических фигур. Начинать работу следует с самого простого варианта: "Найти площадь квадрата со стороной 5 см", а затем постепенно усложнять задания за счет увеличения количества элементов фигуры, рассматривая различные комбинации расположения геометрических фигур, а также усложнения формулировок самих заданий. Цели перспективно-опережающей работы, предшествующей изучению теоремы Пифагора, заключаются в следующем:

- 1) научить учащихся работе с квадратами величин;
- 2) приучить учащихся решать задачи с использованием буквенных записей, употребляя квадраты и знаки арифметических действий;
- 3) научить определять катеты и гипотенузу прямоугольных треугольников при произвольном расположении треугольников на плоскости;

- 4) выполнять измерения требуемых сторон треугольника;
- 5) находить значения выражений, в записи которых используются квадраты;
- 6) делать выводы, соответствующие условию задания.

Перспективно-опережающая работа осуществляется не только на уроках геометрии и алгебры [3, с. 4-10], но и при выполнении домашней работы.

Пропедевтика по степени удаленности во времени пропедевтического материала от момента его первичного изучения бывает: ближняя, средняя и дальняя.

*Ближняя пропедевтика* осуществляется в рамках одной учебной темы и ведет к усилению межпонятийных и внутритемных связей.

*Средняя пропедевтика* – это пропедевтика математического материала в рамках одного курса (либо курса алгебры, либо курса геометрии); при средней пропедевтике наблюдается усиление как межпонятийных связей, так и межтемных связей в рамках одного курса.

*Дальняя пропедевтика* осуществляется между целостными, содержательными связанными между собой курсами (алгебры и геометрии) в рамках одного предмета.

Таким образом, и ближняя, и средняя пропедевтика ведут к внутрипредметной интеграции, а дальняя – к межпредметной интеграции.

При изучении математики выделяют несколько ступеней пропедевтики: неявная и явная пропедевтика.

*Неявная пропедевтика* заключается в том, что при изучении основного математического материала используются задания пропедевтического характера, на которые не акцентируется внимание, и чаще всего эти задания выполняются по аналогии.

Например, изучая тему “Уравнения”, целесообразно предложить учащимся квадратные уравнения, которые с помощью преобразований сведутся к линейным уравнениям. Однако учителю не обязательно обращать внимание учащихся на то, что у нас дан новый вид уравнений, а именно квадратное уравнение. Вероятнее всего у учащихся не возникнет вопроса о том, как же решать эти уравнения. Они просто по аналогии будут раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые и затем решать полученные линейные уравнения.

*Явная пропедевтика* заключается в том, что при изучении математического материала уделяется особое внимание пропедевтической информации, а также разъясняется необходимость ее изучения. При решении задач 1 и 2 явно вводится тот факт, что центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Также следует учителю сообщить, что позже учащиеся будут этот факт доказывать и применять для решения более сложных задач.

Пропедевтическое изучение математического материала в процессе обучения предполагает использование различных *форм пропедевтики*, к которым можно отнести:

- изложение материала с элементами пропедевтики;
- самостоятельную пропедевтическую работу над теоретическим материалом;
- решение задач, которые опираются на материал будущего изучения;
- решение задач, являющихся элементами доказательств теорем, которые предстоит рассматривать позднее;
- опытное наблюдение фактов, которые позже будут изучаться на теоретическом уровне.

Причем эти формы работы могут применяться не только на уроках, но и на внеклассных занятиях или при выполнении домашних заданий.

При осуществлении пропедевтического обучения необходимо учитывать количество включений материала, изучаемого на пропедевтическом уровне.

*Оптимальная частота пропедевтического включения материала* – такое число включений пропедевтического материала по данному вопросу, при котором достигается максимальный результат.

Закономерность пропедевтического включения материала в учебный процесс такова, что по мере увеличения длины опережения возрастает количество возможных включений материала опережающим способом. Надо иметь в виду и обратную закономерность опережения – по мере удаления материала во времени он все более удаётся в содержательном плане, ослабляются его логические связи с изучаемым материалом.

При осуществлении пропедевтики того или иного математического материала большая роль должна придаваться наглядности. Так, изучению теоремы Пифагора предшествует пропедевтическая работа, которая сопряжена с рядом геометрических задач нахождение площадей комбинаций геометрических фигур [2, с. 4-10]. Без чертежа, который является простейшим средством наглядности, при решении этих задач не обойтись.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Антонов Д.А.** Пропедевтика основ математического анализа в курсе математики средней школы: Автореф. дисс. ... канд. пед. наук. – Москва, 1982.
2. **Выготский Л.С.** Собр. соч. Т. 2. – М., 1952.
3. **Лобанок И.П.** Математика: Учебные материалы с межпредметным содержанием (7-9 классы). – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2004.
4. **Панькова И.И.** Дидактические основы опережения в учебном процессе: Автореф. дисс. ... канд. пед. наук. – Ростов-на-Дону, 1990.
5. **Рогановская Е.Н.** Методика разработки учебно-дидактических материалов на интеграционной основе (в курсе математики 7-9 классов): Учебное пособие. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2000.
6. **Рогановский Н.М.** Геометрия: Учеб. для 7-9-х кл. общеобразоват. шк. с углуб. изучением математики. – Мн.: Нар. асвета, 1-е изд. 1992 – 266 с.; 2-е изд. 1997. – 574 с.; 3-е изд. 2000.
7. **Зрдниец П.М.** О некоторых вопросах дидактики математики // Математика в школе. – 1970. – № 4. – С. 50-56.

#### SUMMARY

*The article deals with methods of teaching mathematics and propaedeutics in particular. The definitions of this notion have been formulated more precisely on the basis of integrative approach. Psychological foundation of the expediency of using propaedeutics in the sphere of mats teaching has been given. Functions, aims, kinds and forms of propaedeutics have been considered, theoretical conclusion being illustrated with practical examples.*