Н.П. Морозов

О КОМПОЗИЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Пусть даны системы класса $C^1_{R^2}$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y) \\ \dot{y} &= Q(x,y) \end{aligned}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,y) \\ \dot{y} &= Q(x,y) \end{aligned}. \tag{2}$$

Композициями (1) ∘ (2) и (2) ∘ (1) этих систем назовем соответственно системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(F(x,y),G(x,y)) \\ \dot{y} &= Q(F(x,y),G(x,y)) \end{aligned}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(P(x,y),Q(x,y)) \\ \dot{y} &= G(P(x,y),Q(x,y)) \end{aligned}. \tag{4}$$

Пусть выполнены условия:

$\begin{cases} u = P(x,y) \\ v = Q(x,y) \end{cases}$ есть диффеоморфизм $f : R^2 \leftrightarrow R^2$ с единственной неподвижной точкой O(0;0). Точка O(0;0) – особая точка для системы (1). В частности, если (1) и (2) линейные системы (или линеаризации нелинейных систем) с матрицами A и B соответственно, то их композиции есть линейные системы с матрицами AB и BA соответственно. Учитывая, что эти матрицы подобны, можно сделать вывод, что системы (3) и (4) в линейном случае топологически эквивалентны. В нелинейном случае системы (3) и (4) локально топологически эквивалентны в окрестностях своих состояний равновесия, если корни характеристического уравнения не имеют нулевых действительных частей.

Изучен вопрос о типе состояния равновесия систем (3) и (4) в зависимости от типа состояния равновесия их линеаризаций.

Представляет интерес вопрос о предельных циклах композиций в зависимости от свойств правых частей систем (1) и (2).

В том случае, когда одна из систем (в дальнейшем система (2)) есть система Гамильтона или ортогональная ей, получены ответы на следующие вопросы:

1. Возможны ли предельные циклы у композиций (3) и (4), если система (1) предельных циклов не имеет.

2. Если система (1) имеет предельный цикл, то при каких условиях (свойствах гамильтониана) предельный цикл будут иметь и система (3).

Утвердительный ответ на первый вопрос дает следующий пример: если система (1) есть линейная система с матрицей

$$A = \frac{1}{af - cd}\begin{pmatrix} a(\mu c - f) & c(\mu d + a) \\ d(\mu c - f) & f(\mu d + a) \end{pmatrix}, (af \neq 0 \text{ и } af - cd \neq 0)$$

и $H = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu f + c}{\mu c - f}x^2 - 2xy + \frac{\mu a - d}{\mu d + a}y^2\right) + \frac{af - cd}{3}\left(\frac{x^3}{\mu c - f} + \frac{y^3}{\mu d + a}\right)$,

то система $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \cdot grad\ H$ при $ad < cf$ и достаточно малых $\mu > 0$ имеет устойчивый предельный цикл.

Изучен также случай композиции произвольной линейной системы и гамильтоновой системы с гамильтонианом третьей степени.

Рассмотрим теперь композицию системы Льенара и системы, имеющей $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$, $\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial y}$ три особые точки.

Теорема 1. Если выполнены условия:

1) функция $f(z) > 0$ при $z \neq 0$, $f(0) = 0$ и $f''(z) > 0$ при $z \in R$;

2) $\dfrac{\partial H}{\partial x} = -x(x-a)(x-b)$, $\dfrac{\partial H}{\partial y} = cy$, $c > 0$, $a < 0 < b$.

Тогда система

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} - \lambda\left(f\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) - \mu\right)\frac{\partial H}{\partial x},$$
$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

при достаточно малых $\mu > 0$ имеет два устойчивых предельных цикла, окружающих особые точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$.

Рассмотрим композицию линейной системы и системы Льенара

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \lambda(f(x) - \mu)x, \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

а именно:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y - \lambda(f(x) - \mu)x \\ -x \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0,\ \mu > 0. \tag{5}$$

Теорема 2. Если $\Delta = ad - bc < 0$, то система (5) предельных циклов не имеет. Если $\Delta > 0$, $\lambda > 0, \mu > 0$, то система (5) имеет предельный цикл тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$a \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{c-b}{a} + \lambda\mu > 0.$$

Изучение нелинейных систем в рассматриваемом контексте может найти приложения в современной физике при изучении нелинейных взаимодействий векторных полей.