Л.А. Романович

АЛГЕБРОИДЫ ЛИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Классический подход к исследованию геометрических структур на гладких многообразиях основан на использовании главных и присоединенных расслоений. Наряду с этим, в 50-е годы Ш. Эресман предложил метод исследования геометрических структур и их дифференциальных продолжений, основанный на использовании группоидов Ли и алгеброидов Ли. Такой подход позволяет полнее использовать дифференциальные продолжения и алгебраические аспекты геометрии [1].

Применяя группоидный подход для исследования однородного пространства $B = G/H$, мы используем группоиды Ли $\frac{G \times G}{H}$ и $\Pi^k(B)$, а также соответствующее им алгеброиды $\frac{G \times g}{H}$ и $J^k(TB)$. При этом важную роль играет морфизм $J^k : \frac{G \times G}{\Pi} \to \Pi^k(B) : \langle g_2, g_1 \rangle \to J_x^k\left(l_{g_2} \circ l_{g_1}^{-1}\right)$ и соответствующее ему изотропное представление порядка $k : i_k : H \to \left(\Pi^k(B)\right)_0^0 : n \to J_0^k\, ln$, где $0 = H$ [2].

Пусть заданы диффеоморфизмы σ и σ' пространства B на себя. В дальнейшем будем рассматривать только диффеоморфизмы, которые перестановочны с действием группы G и B, так как они сохраняют структуру однородного пространства.

Определение: Диффеоморфизмы σ и σ' называются эквивалентными, если существует такой элемент $a \in G$, что

$$\sigma' = \ell_a \circ \sigma .$$

Для диффеоморфизмов σ и σ' можно построить соответственно диффеоморфизмы $\overline{\sigma}$ и $\overline{\sigma'}$ такие, что $\overline{\sigma} = lg_1 \circ \sigma$ и $\overline{\sigma}(0) = 0$, $\overline{\sigma'} = lg_2 \circ \sigma$ и $\overline{\sigma'}(0) = 0$. Диффеоморфизмы и называются центрированными относительно точки $0 \in B$.

Нетрудно показать, что σ и σ' эквивалентны тогда и только тогда, когда $\exists h \in H$ такой, что $\overline{\sigma'} = \ell_h \circ \sigma$. Если последнее соотношение выполняется лишь в окрестности точки $0 \in B$, то будем говорить о локальной эквивалентности.

Для всякого диффеоморфизма $\sigma : B \to B$ определим отображение:

$$\Lambda_k : \frac{G \times G}{H} \to \Pi^K(B) : \langle g_1, g_2 \rangle \to j_x^k\left(l_{g_2} \circ \sigma \circ l_{g_1^{-1}}\right), \text{ где } x = g_1 H .$$

Если $\sigma = id_B$, то $\Lambda_k = J_K$, кроме того, отображение $\lambda_k : H \to \left(\Pi^k(B)\right)_0^0 : \lambda_k(h) = j_0^k\left(l_h \circ \vec{\sigma}\right)$ эквивалентно изотропному представлению группы H однородного пространства. Диффеоморфизм $\sigma : B \to B$ можно продолжить до диффеоморфизма $\sigma^k : \Pi^k(B) \to \Pi^k(B) : j_x^k f \to j_x^k(\sigma \circ f)$.

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1 [3], можно доказать следующее утверждение:

Теорема: Группоид $\Lambda_k\left(\frac{G \times G}{H}\right) = \Omega_h^k$ является редукцией группоида Ли $\Pi^k(B)$ до группы изотропии $H_k = H / H^k$. При этом отображение σ^k устанавливает изоморфизм $\Omega_H^k(B)$ и $\Pi_H^k(B)$.

Вывод: Всякий диффеоморфизм $\sigma : B \to B$ определяет на B дифференциальную структуру порядка к, при этом эквивалентным диффеоморфизмам соответствуют одни и те же структуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белько И.В. Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии. – М.: Едиториал УРСС, 2004 – 208 с.
2. Рамановіч Л.А. Інварыянтныя звязнасці ў групоідах Лі // Весці беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта, 1998. – №3. – С.117–121.
3. Романович Л.А. О группоиде Ли продолжений левых сдвигов однородного пространства // Веснік Магілеўскага дзяржаўнага універсітэта імя А.А. Куляшова, 2000 – №1(5). – С.18 – 22.