Л.А. РОМАНОВИЧ, А.В. ЛАПИНА
МГУ имени А.А. Кулешова (г. Могилев, Беларусь)

ИНВАРИАНТНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях. Интенсивная научная работа в этом направлении проводится уже не первое десятилетие. Среди дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях особое место занимают связности первого и высших порядков. Интерес представляет изучение связностей, инвариантных относительно действия групп Ли.

Наше исследование посвящено локальному описанию связностей первого порядка на проективной плоскости, инвариантных относительно действия группы матриц со следом 1. В процессе работы перед нами стояли задачи:

– показать, что проективная плоскость является двумерным гладким многообразием, изучить локальные карты, определяющие эту структуру;

– доказать существование инвариантной связности первого порядка на проективной плоскости;

– получить функции инвариантной связности первого порядка на проективной плоскости;

– вычислить кривизну и кручение инвариантной связности первого порядка на проективной плоскости.

В качестве модели проективной плоскости мы использовали арифметическую проективную плоскость P^2, элементами которой являются классы эквивалентности $\left[x^1, x^2, x^3\right] \lambda\left(x^1, x^2, x^3\right), x^i \in R, \lambda \in R, \lambda \neq 0$. Структура гладкого многообразия определена локальными тривиализациями:

$$U\left\{\left[x^1, x^2, x^3\right] x^1 \neq 0\right\}, \quad \varphi_1\left(\left[x^1, x^2, x^3\right]\right)=\left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}\right);$$

$$U\left\{\left[x^1, x^2, x^3\right] x^2 \neq 0\right\}, \quad \varphi_2\left(\left[x^1, x^2, x^3\right]\right)=\left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}\right);$$

$$U\left\{\left[x^1, x^2, x^3\right] x^3 \neq 0\right\}, \quad \varphi_3\left(\left[x^1, x^2, x^3\right]\right)=\left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right).$$

В качестве действующей группы мы использовали группу Ли, состоящую из матриц вида:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

Координатное выражение этого действия относительно карты (U, φ_1) имеет вид:

$$\varphi_1(g, x)=\left(\frac{ax^2+bx^3}{x^1}, \frac{cx^2+dx^3}{x^1}\right).$$

$$\begin{cases} f^1(g, x)=\dfrac{ax^2+bx^3}{x^1}; \\ f^2(g, x)=\dfrac{cx^2+dx^3}{x^1} \end{cases}$$

В современной геометрии существует несколько эквивалентных определений понятия связности. Использование их зависит от применяемого метода в процессе того или иного исследования. Классическим считается определение связности, сформулированное Ш. Кобаяси и К. Номидзу [1]. Мы использовали следующее понятие связности на гладком многообразии [2, с.186]: Связностью порядка p на гладком многообразии B называется морфизм векторных расслоений $\lambda_p : TB \to J^p(TB)$, где TB и $J^p(TB)$ – касательное расслоение к многообразию B и продолжение касательного расслоения порядка p соответственно.

Если на многообразии B действует группа Ли G, то естественным является условие инвариантности связности: $\lambda(gX) = g\lambda(X)$, где $g \in G$, $X \in TB$. Записав это условие в координатах для проективной плоскости и подставив значения производных $\left.\frac{\partial y^i}{\partial x^q}\right|_{x_0}$, мы получили систему уравнений относительно функций связности $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(x)$:

$$\Gamma^1_{11}(0-0) - \Gamma^1_{12}0\cdot 0 - \Gamma^1_{21}0\cdot 0 - \Gamma^1_{22}0\cdot 0 + a\cdot\Gamma^2_{11} = 0,$$
$$0\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{11}(c - 0\cdot 0) - \Gamma^2_{12}0\cdot 0 - \Gamma^2_{21}0\cdot 0 - \Gamma^2_{22}0\cdot 0 = 0,$$
$$\Gamma^1_{11}a\cdot 0 + \Gamma^1_{12}(0 - c\cdot 0) - \Gamma^1_{21}a\cdot 0 - \Gamma^1_{22}c\cdot 0 + a\Gamma^2_{12} = -a,$$
$$-\Gamma^1_{11}0\cdot a - \Gamma^1_{12}0\cdot a + \Gamma^1_{21}(0 - 0\cdot c) - \Gamma^1_{22}0\cdot c + a\Gamma^2_{21} = -a,$$
$$0\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}a\cdot 0 + \Gamma^2_{12}(c - c\cdot 0) - \Gamma^2_{21}a\cdot 0 - \Gamma^2_{22}c\cdot 0 = -c,$$
$$-\Gamma^1_{11}a\cdot a - \Gamma^1_{12}c\cdot a - \Gamma^1_{21}a\cdot c + \Gamma^1_{22}(0 - c\cdot c) + a\Gamma^2_{22} = 0,$$
$$0\Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{11}0\cdot a - \Gamma^2_{12}0\cdot a + \Gamma^2_{21}(c - 0\cdot c) - \Gamma^2_{22}0\cdot c = -c,$$
$$0\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}a\cdot a + \Gamma^2_{12}(c - c\cdot a) - \Gamma^2_{21}a\cdot c - \Gamma^2_{22}c\cdot c = 0.$$

Решениями этой системы являются следующие функции связности:

$\Gamma^2_{11} = 0$;

$\Gamma^2_{12} = -1$;

$\Gamma^2_{21} = -1$;

$\Gamma^2_{22} = \frac{2a-1}{c}$;

$$-\Gamma^1_{11}a\cdot a - \Gamma^1_{12}c\cdot a - \Gamma^1_{21}a\cdot c + \Gamma^1_{22}(-c\cdot c) + a\frac{2a-1}{c} = 0.$$

Таким образом, результаты нашего исследования следующие:

– доказано, что на проективной плоскости существует единственная связность первого порядка, инвариантная относительно действия группы Ли матриц со следом 1;

– получены формулы функций инвариантной связности первого порядка на проективной плоскости.

В настоящее время ведется работа по нахождению геометрических характеристик, а именно кривизны и кручения соответствующей связности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 414 с.

2. Ngo van Que. Du prolongement des espaces fibres et des struktures infinitesimales // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1967. – T. 17, № 1. – P. 159–223.