МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
"МОГИЛЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А. А. КУЛЕШОВА"

Л.А. РОМАНОВИЧ

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Контрольные задания и методические указания к ним

им.А.А.Кулешова

Могилев 2003

УДК 519.21(075)
ББК 22.3
Р69

Рецензент
кандидат физико-математических наук,
доцент МГУ им. А. А. Кулешова
Б. Д. Чеботаревский

Печатается по решению редакционно-издательского и экспертного совета МГУ им. А.А. Кулешова

Романович Л. А.

Р69 Основы высшей математики и информатики: Контрольные задания и метод. рекомендации к ним. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2003. – 18 с.

Контрольные задания предназначены для студентов ВУЗов заочной формы обучения, обучающихся по специальности "Правоведение".

УДК 519.21(075)
ББК 22.3

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Номер варианта контрольной работы совпадает с последней цифрой номера зачетной книжки.

2. Условие задания должно быть переписано полностью с указанием соответствующих данных выбранного варианта.

3. Решение должно быть полным, снабженным достаточными пояснениями.

4. При оформлении задания необходимо оставлять поля для замечаний рецензента и несколько чистых листов для исправления замечаний, если работа не зачтена.

5. На титульном листе обязательно должны быть указаны фамилия, имя и отчество студента, факультет, специальность и курс, домашний адрес и телефон.

6. В конце работы должен быть приведен список использованных источников.

ПРОГРАММА КУРСА “ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ”

Понятие матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами.

Определители второго, третьего, n-го порядков. Свойства определителей. Обратная матрица.

Линейные уравнения. Системы линейных уравнений. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Формулы Крамера. Матричный метод.

Арифметические векторы. Линейная зависимость системы векторов. Базис. Координаты вектора в базисе.

Задачи о принятии решения. Задачи линейного программирования. Математическая модель задачи линейного программирования. Графический способ решения задачи линейного программирования.

Множества. Операции над множествами. Отображения. Отношения. Подмножество множества.

Простейшие комбинаторные задачи. Перестановки. Размещения. Сочетания.

Случайные события и их классификация. Операции над случайными событиями. Частота события. Вероятность. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Случайная величина. Закон распределения. Функция распределения. Математическое ожидание. Дисперсия.

Предмет информатики. Персональный компьютер.

Операционная система.

Основные характеристики операционной системы Windows 98. Общие принципы работы в Windows.

Рабочий стол и панель задач. Формирование рабочего стола.

Окно Windows (основные элементы и их назначение).

Получение помощи.

Принципы хранения информации в компьютере. Работа с файлами в Windows 98 (проводник Windows 98).

Механизм обмена информацией между приложениями (буфер обмена).

Текстовый редактор Word (основные возможности, применение, общие принципы работы).

Электронные таблицы Excel (основные возможности, применение, общие принципы работы).

Компьютерные вирусы. Антивирусные программы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Даны две матрицы A и B. Найти: а) $3A + 2B$; б) AB; в) A^{-1}, если

1.0 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.1 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1.2 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.3 $A=\begin{bmatrix}4 & -3 & 0\\ 5 & -2 & 4\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 5\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

1.4 $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 5\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

1.5 $A=\begin{bmatrix}7 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 5\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

1.6 $A=\begin{bmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ -4 & 2 & 5\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

1.7 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 5 & -2 & 4\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 5\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

1.8 $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 5\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -3 & -1\\ 1 & 2 & 4\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

1.9 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 3 & 5\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ 7 & 2 & 6\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

2. Проверить совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решить ее: а) методом Гаусса; б) по формулам Крамера; в) матричным способом, если

2.0 $\begin{cases}3x-y+4z=1\\ 2x+y+5z=4\\ x+2z=1\end{cases}$ 2.1 $\begin{cases}x-2y=-8\\ -3x-4y-2z=-10\\ x+3y+3z=13\end{cases}$ 2.2 $\begin{cases}3x-2y+4z=-5\\ -x+4y-5z=11\\ 2x+y-z=1\end{cases}$

2.3 $\begin{cases} 6x-2y+8z=2 \\ 2x+y+5z=4 \\ 2x+4z=2 \end{cases}$ 2.4 $\begin{cases} 3x-6y=-24 \\ 3x+4y+2z=10 \\ x+3y+3z=13 \end{cases}$ 2.5 $\begin{cases} 4x+y-3z=19 \\ 5x+3y-6z=33 \\ x+y+7z=0 \end{cases}$

2.6 $\begin{cases} 3x-2y+4z=-5 \\ -x+4y-5z=11 \\ 6x-4y+8z=1 \end{cases}$ 2.7 $\begin{cases} -2y+4z=-5 \\ -x+4y-5z=-11 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$ 2.8 $\begin{cases} x-6y=-2 \\ 3x+y+2z=10 \\ x+3y+3z=13 \end{cases}$

2.9 $\begin{cases} 3x-6y=-2 \\ x+y+2z=10 \\ x+3y+3z=13 \end{cases}$.

3.Доказать, что векторы **а, в, с** образуют базис и найти координаты вектора **р** в этом базисе, если

3.0 **а** = (5, 4, 1), **в** = (-3, 5, 2), **с** = (7, 23, 4), **р** = (7, 23, 4)
3.1 **а** = (2, -1, 4), **в** = (-3, 0, 2), **с** = (4, 5, -3), **р** = (0, 11, -14).
3.2 **а** = (-1, 1, 2), **в** = (2, 3, -5), **с** = (-6, 3, -1), **р**= (28, -19, -7).
3.3 **а** = (1, 3, 4), **в** = (-2, 5, 0), **с** = (3, -2, -4), **р** =(13, -5, -4).
3.4 **а** = (1,-1,1), **в** (-5,-3,1), **с**(-2,-1,0), **р** = (-15,-10,5).
3.5 **а** = (3,1,2), **в** = (-7,-2,-4), **с** = (-4, 0, 3), **р** = (16, 6, 15).
3.6 **а** = (-3,0,1), **в** = (2,7,-3), **с** = (-4,3,5), **р** = (-16, 33,13).
3.7 **а** = (5, 1, 2), **в** = (-2,1,-3), **с** = (4,-3,5), **р** = (15,-15,24).
3.8 **а** = (0, 2, -3), **в** = (4, -3, -2), **с** = (-5, -4, 0), **р** = (-19, -5, -4).
3.9 **а** = (3, -1, 2), **в** = (-2, 3, 1), **с** = (4, -5, -3), **р** = (-3, 2, -3).

4. Решить задачу линейного программирования графическим способом.

4.0 $f = x + 9y \to max$, $\begin{cases} 6x-5y\ge 17 \\ x+2y\le 34 \\ -4x+9y\ge 17 \end{cases}$

4.1 $f = 3x + 4y \to min$, $\begin{cases} -x+y\le 3 \\ 5x+3y\le 97 \\ x+7y\ge 77 \end{cases}$

4.2 $f = 2x + 3y \to max$, $\begin{cases} x-y\ge 1 \\ x+2y\le 4 \\ -x+y\ge 0 \end{cases}$

4.3 $f = x + 7y \to min$, $\begin{cases} 12x-10y\ge 34 \\ x+2y\le 34 \\ -4x+9y\ge 17 \end{cases}$

4.4 $f = 6x + y \to max$, $\begin{cases} 2x-y\ge 4 \\ x+3y\le 37 \\ -4x+9y\ge 20 \end{cases}$

4.5 $f = 5x + 3y \to min$, $\begin{cases} 6x-5y\ge 17 \\ x+2y\le 34 \\ -4x+9y\ge 17 \end{cases}$

4.6 $f = 6x + y \to max$,

$$\begin{cases} 6x - 5y \ge 17 \\ x + 2y \le 34 \\ -4x + 9y \ge 17 \end{cases}$$

4.7 $f = 3x + 2y \to min$,

$$\begin{cases} 6x - 5y \ge 17 \\ x + 2y \le 34 \\ -4x + 9y \ge 17 \end{cases}$$

4.8 $f = 5x + y \to \max$,

$$\begin{cases} 6x - 5y \ge 17 \\ x + 2y \le 34 \\ -4x + 9y \ge 17 \end{cases}$$

4.9 $f = x + y \to min$

$$\begin{cases} 2x - y \ge 4 \\ x + 3y \le 37 \\ -4x + 9y \ge 20 \end{cases}$$

5. Используя основные теоремы и формулы теории вероятностей, решить следующие задачи:

5.0 Три исследователя, независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном изменении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

5.1 Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности безотказной работы элементов (за время t) соответственно равны: $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}9$. Найти вероятность того, что за время t будут работать безотказно два элемента.

5.2 Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

5.3 Вероятность успешного выполнения упражнения первым спортсменом равна 0,5, а вторым – 0,7. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, причем каждый делает по две попытки. Выполнивший упражнение первым получает приз. Найти вероятность получения приза спортсменами.

5.4 В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказа первого, второго и третьего элемента соответственно равны: $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}15$, $p_3 = 0{,}2$. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет?

5.5 По данным переписи населения Англии установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья составили 5% обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья 7,9%, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья – 78,2%, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья – 8,9%. Найти связь между цветом глаз отца и сына.

5.6 Вероятность того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится не менее чем в двух ящиках.

5.7 Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из четырех проверенных изделий не менее двух изделий высшего качества.

5.8 В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятности, из которых четыре в переплете. Библиотекарь наудачу взял три учебника. Найти вероятность того, что не менее двух учебников в переплете.

5.9 Вероятность того, что в течении часа станок потребует внимания рабочего равна 0,3. Найти вероятность того, что в течении часа из семи работающих станков внимания рабочего потребует не более двух станков.

6. Техническое устройство состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из них равна, соответственно, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Найти ряд распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины X – числа отказавших элементов, если

6.0 $p_1 = 0{,}1, p_2 = 0{,}2, p_3 = 0{,}3, p_4 = 0{,}2, p_5 = 0{,}1$.

6.1 $p_1 = 0{,}2, p_2 = 0{,}2, p_3 = 0{,}3, p_4 = 0{,}2, p_5 = 0{,}1$.

6.2 $p_1 = 0{,}1, p_2 = 0{,}3, p_3 = 0{,}3, p_4 = 0{,}2, p_5 = 0{,}1$.

6.3 $p_1 = 0{,}4, p_2 = 0{,}2, p_3 = 0{,}3, p_4 = 0{,}2, p_5 = 0{,}1$.

6.4 $p_1 = 0{,}3, p_2 = 0{,}2, p_3 = 0{,}3, p_4 = 0{,}2, p_5 = 0{,}3$.

6.5 $p_1 = 0{,}1, p_2 = 0{,}3, p_3 = 0{,}3, p_4 = 0{,}1, p_5 = 0{,}1$.

6.6 $p_1 = 0{,}1, p_2 = 0{,}2, p_3 = 0{,}2, p_4 = 0{,}2, p_5 = 0{,}1$.

6.7 $p_1 = 0{,}2, p_2 = 0{,}2, p_3 = 0{,}1, p_4 = 0{,}2, p_5 = 0{,}1$.

6.8 $p_1 = 0{,}1, p_2 = 0{,}2, p_3 = 0{,}3, p_4 = 0{,}2, p_5 = 0{,}2$.

6.9 $p_1 = 0{,}1, p_2 = 0{,}1, p_3 = 0{,}1, p_4 = 0{,}2, p_5 = 0{,}1$.

Решение варианта “α”

1. α Даны две матрицы A и B. Найти: а) $3A + 2B$; б) AB; в) A^{-1}, если

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Решение.

а) По определениям операций умножения матрицы на число и сложения матриц имеем:

$$3A + 2B = 3\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & 15 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

б) По определению операции умножения матриц имеем

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0\cdot1+2\cdot0+1\cdot2 & 0\cdot2+2\cdot(-1)+1\cdot1 & 0\cdot1+2\cdot3+1\cdot4 \\ 1\cdot1+1\cdot0+3\cdot2 & 1\cdot2+1\cdot(-1)+3\cdot3 & 1\cdot1+1\cdot3+3\cdot4 \\ -1\cdot1+1\cdot0+0\cdot2 & -1\cdot2+1\cdot(-1)+0\cdot1 & -1\cdot1+1\cdot3+0\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 7 & 10 & 16 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

в) Для того, чтобы найти обратную матрицу для матрицы A, воспользуемся формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$, где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot1\cdot0 + 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot3\cdot(-1) + 1\cdot1\cdot(-1) - 2\cdot1\cdot0 - 3\cdot1\cdot0 = 1 - 6 + 1 = -6.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = = 1\cdot0 - 3\cdot1 = -3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -(1\cdot0 - 3\cdot(-1)) = -3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1 - 1\cdot(-1) = 2, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(2\cdot0 - 1\cdot1) = 1,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot0 - 1\cdot(-1) = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(0\cdot(-1) - 2\cdot(-1)) = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot3 - 1\cdot1 = 5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0\cdot3 - 1\cdot1) = 1,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\cdot1 - 2\cdot1 = -2,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Ответ: а) $\begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & 15 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 7 & 10 & 16 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$, в) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

2.α Проверить совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решить ее: а) методом Жордана-Гаусса; б) по формулам Крамера; в) матричным способом, если

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 8x+3y-6z=2 \\ 4x+y-3z=3 \end{cases}.$$

Решение. Найдем ранги основной и расширенной матриц системы. Для основной матрицы определитель $\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-3) + 1\cdot(-6)\cdot 4 + 8\cdot 1\cdot(-1) -$ $-(-1)\cdot 3\cdot 4 - 8\cdot 1\cdot(-3) - 1\cdot 1\cdot(-6) = -9 - 24 - 8 + 12 + 24 + 6 = 1 \neq 0$, значит матрица невырожденная. Ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы, значит система совместна.

а) Решим исходную систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса. Для краткости оформим решение в матричном виде.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -6 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{array}\right]$$

$$x = -8,\ y = -4,\ z = -13.$$

б) Так как исходная система линейных уравнений является невырожденной, то ее решение можно найти по формулам Крамера: $x = \dfrac{\varDelta_1}{\varDelta}$, $y = \dfrac{\varDelta_2}{\varDelta}$, $z = \dfrac{\varDelta_3}{\varDelta}$, где $\varDelta_к$ – определитель матрицы, полученной из основной путем замены к-го столбца столбцом свободных членов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-3) + 1\cdot(-6)\cdot 4 + 8\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 3\cdot 4 - 8\cdot 1\cdot(-3) - 1\cdot 1\cdot(-6) =$$

$$= -9 - 24 - 8 + 12 + 24 + 6 = 1.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&3&-6\\3&1&-3\end{vmatrix}=1\cdot3\cdot(-3)+1\cdot(-6)\cdot3+2\cdot1\cdot(-1)-(-1)\cdot3\cdot3-1\cdot2\cdot(-3)-1\cdot1\cdot(-6)=$$

$$=-9-18-2+9+6+6=-8.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&-1\\8&2&-6\\3&1&-3\end{vmatrix}==1\cdot2\cdot(-3)+8\cdot3\cdot(-1)+1\cdot(-6)\cdot4-(-1)\cdot2\cdot4-1\cdot8\cdot(-3)-1\cdot3\cdot(-6)=$$

$$=-6-24-24+8+24+18=-4.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\8&3&2\\4&3&-3\end{vmatrix}=1\cdot3\cdot3+1\cdot8\cdot1+1\cdot2\cdot4-1\cdot3\cdot4-1\cdot8\cdot3-1\cdot2\cdot1=$$

$$=9+8+8-12-24-2=-13.$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-8;\ y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-4;\ z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-13.$$

в) Для решения исходной системы матричным способом воспользуемся формулой $X=A^{-1}\cdot B$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix},\ |A|=1.$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3&-6\\1&-3\end{vmatrix}=-9+6=-3,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}8&-6\\4&-3\end{vmatrix}=-(-24+24)=0,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}8&3\\4&1\end{vmatrix}=8-12=-4,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1&-1\\1&-3\end{vmatrix}=-(-3+1)=2,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1&-1\\4&-3\end{vmatrix}=-3+4=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\4&1\end{vmatrix}=-(1-4)=3,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&-1\\3&-6\end{vmatrix}=-6+3=-3,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&-1\\8&-6\end{vmatrix}=-(-6+8)=-2,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5,$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4-9 \\ 0+2-6 \\ -4+6-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

Ответ: (-8; -4; -13).

3. α Доказать, что векторы **а, в, с** образуют базис и найти координаты вектора **р** в этом базисе, если **а** = (1; -1; 7), **в** = (2; 3; -3), **с** = (3; 2; 5), **р** = (6; 10; 17).

Решение.

Найдем смешанное произведение векторов **а, в, с**:

$$\mathbf{авс} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot5 + 2\cdot2\cdot7 + -1\cdot(-3)\cdot3 - 3\cdot3\cdot7 - (-1)\cdot2\cdot5 - 2\cdot(-3)\cdot1 =$$

$= 15 + 28 - 63 + 10 + 6 = 5 \neq 0$, значит векторы **а, в, с** образуют базис.

Найдем координаты вектора **р** в этом базисе из условия x**а** + y**в** + z**с** = **р**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 5 & 17 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & -17 & -2 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & -17 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \end{array}\right]$$

$$z = \frac{1}{11},\ y = \frac{1}{5}\left(17 \cdot \frac{1}{11} - 2\right) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{11} = -\frac{1}{11},$$

$$x = 6 + y - 7 \cdot z = 6 - \frac{1}{11} - \frac{7}{11} = -\frac{58}{11}.$$

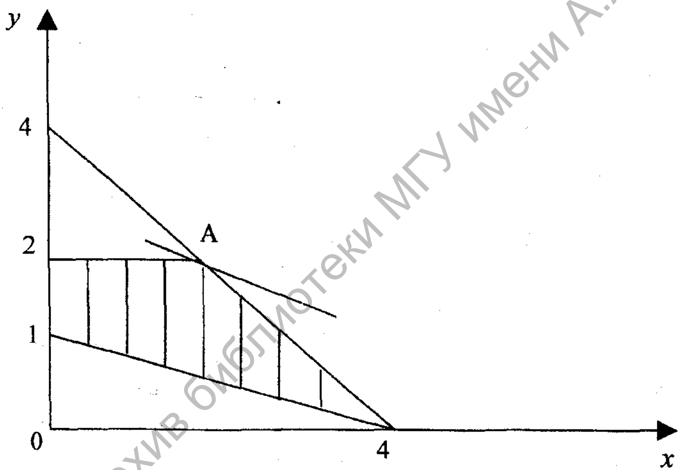
Ответ: координаты $\left(-\frac{58}{11};\ -\frac{1}{11};\ \frac{1}{11}\right)$.

4.α Решить задачу линейного программирования графическим способом, если

$$f = x + 3y \to \max$$

$$\begin{cases} x + 4y \geq 4 \\ x + y \leq 4 \\ y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}.$$

Решение. Построим в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости прямые, соответствующие ограничениям задачи и выделим многоугольник решений.



На рис. построены прямые $x + 4y = 4, x + y = 4, y = 2, x = 0, y = 0$. Каждая из этих прямых разбивает плоскость на две полуплоскости. Исходя из системы неравенств находим пересечение этих полуплоскостей – многоугольник решений. Затем строим линию уровня $x + 3y = a$, где a – любое число, и параллельным переносом передвигаем ее до тех пор, пока она не коснется многоугольника решений в крайней граничной точке или точках так, что весь многоугольник будет расположен ниже или левее этой линии (если это невозможно, то делаем вывод, что задача не имеет решения). На рис. это точка А. Находим координаты точки А из системы $\begin{cases} x + y = 4 \\ y = 2 \end{cases}$. А (2; 2).

Подставляем координаты точки А в уравнение функции цели, получим $f_{max} = 2 + 3 \cdot 2 = 8$.

Замечание: Если решается задача на нахождение минимального значения для функции цели, то линию уровня следует передвигать параллельно до тех пор, пока она не коснется многоугольника решений в крайней граничной точке или точках так, что весь многоугольник будет расположен выше или правее этой линии.

Ответ: **8.**

5. α Используя основные теоремы и формулы теории вероятностей, решить следующую задачу: Зачетное задание состоит из трех задач. Для получения зачета нужно решить хотя бы две задачи. На каждую задачу предполагается 5 ответов, из которых только один правильный. Студент Иванов отвечает наугад. Какова вероятность того, что он сдаст зачет.

Решение.

Пусть A – событие, состоящее в том, что студент Иванов решил две задачи, B – событие, состоящее в том, что студент Иванов решил три задачи, C_1 – событие, состоящее в том, что студент Иванов решил первую задачу, C_2 – событие, состоящее в том, что студент Иванов решил вторую задачу, C_3 – событие, состоящее в том, что студент Иванов решил третью задачу.

Тогда вероятность сдачи зачета:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = P(C_1C_2\overline{C_3} + C_1\overline{C_2}C_3 + \overline{C_1}C_2C_3) + P(C_1C_2C_3) =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{13}{125}.$$

Ответ: $\frac{13}{125}$.

6. α Техническое устройство состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из них равна, соответственно, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. Найти ряд распределения, функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайной величины X – числа отказавших элементов, если $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}1$; $p_5 = 0{,}1$.

Решение.

Ряд распределения – это один из способов задания закона распределения. Законом распределения случайной величины X называется любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины X и соответствующим этим значениям вероятностями. Имеем пять независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого из них равна, соответственно $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}1$; $p_5 = 0{,}1$. Случайная величина X – число отказавших элементов. Возможные значения: 0, 1, 2 , 3, 4, 5. Найдем соответствующие этим значениям вероятности.

$x = 0$ – все элементы работают исправно.

$$p_1 = p(X = 0) = \bar{p}_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 \bar{p}_4 \bar{p}_5 .$$

$$p_1 = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}35721.$$

$X = 1$ – отказал один из элементов.

$$p_2 = p\ (X = 1) = p_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 \bar{p}_4 \bar{p}_5 + \bar{p}_1 p_2 \bar{p}_3 \bar{p}_4 \bar{p}_5 + \bar{p}_1 \bar{p}_2 p_3 \bar{p}_4 \bar{p}_5 +$$
$$+ \bar{p}_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 p_4 \bar{p}_5 + \bar{p}_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 \bar{p}_4 p_5 .$$

$$p_2 = 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 +$$
$$+ 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ 2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}11907 + 0{,}30618 = 0{,}42525.$$

$X = 2$ – отказало 2 элемента.

$$p_3 = p\ (X = 2) = \bar{p}_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 p_4 p_5 + \bar{p}_1 \bar{p}_2 p_3 \bar{p}_4 p_5 + \bar{p}_1 \bar{p}_2 p_3 p_4 \bar{p}_5 +$$
$$+ \bar{p}_1 p_2 \bar{p}_3 \bar{p}_4 p_5 + \bar{p}_1 p_2 \bar{p}_3 p_4 \bar{p}_5 + p_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 \bar{p}_4 p_5 + p_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 p_4 \bar{p}_5 + p_1 p_2 \bar{p}_3 \bar{p}_4 \bar{p}_5 +$$
$$+ \bar{p}_1 p_2 p_3 \bar{p}_4 \bar{p}_5 + p_1 \bar{p}_2 p_3 \bar{p}_4 \bar{p}_5 .$$

$$p_3 = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 +$$
$$+ 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 +$$
$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 +$$
$$+ 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}10206 + 0{,}01323 +$$
$$+ 0{,}06561 = 0{,}1809.$$

$X = 3$– отказало 3 элемента

$$p_4 = p\ (X = 3) = \bar{p}_1 \bar{p}_2 p_3 p_4 p_5 + \bar{p}_1 p_2 \bar{p}_3 p_4 p_5 + \bar{p}_1 p_2 p_3 \bar{p}_4 p_5 +$$
$$+ \bar{p}_1 p_2 p_3 p_4 \bar{p}_5 + p_1 \bar{p}_2 \bar{p}_3 p_4 p_5 + p_1 \bar{p}_2 p_3 \bar{p}_4 p_5 + p_1 \bar{p}_2 p_3 p_4 \bar{p}_5 + p_1 p_2 \bar{p}_3 p_4 \bar{p}_5 +$$
$$+ p_1 p_2 \bar{p}_3 \bar{p}_4 p_5 + p_1 p_2 \bar{p}_3 p_4 \bar{p}_5 + p_1 p_2 p_3 \bar{p}_4 \bar{p}_5 .$$

$p_4 = 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 +$
$+ 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 +$
$+ 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 +$
$+ 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 +$
$+ 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}01134 + 0{,}02187 + + 0{,}00049 = 0{,}0337.$

$X = 4$ – отказало 4 элемента.

$p_5 = p\,(X = 4) = \bar{p}_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 \bar{p}_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 \bar{p}_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 \bar{p}_4 p_5 +$
$+ p_1 p_2 p_3 p_4 \bar{p}_5.$

$p_5 = 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 +$
$+ 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 +$
$+ 2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}00243 + 0{,}00042 = 0{,}00285.$

$X = 5$ – отказало все 5 элементов.
$p_6 = p\,(X = 5) = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5.$
$p_6 = 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}00009.$

Строим ряд распределения

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,35721	0,42525	0,1809	0,0337	0,00285	0,0009

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1.$

2. Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X принимает значения меньше некоторого фиксированного действительного числа x.

$F\,(x) = P(X < x)$

Функция распределения имеет вид:

$$F\,(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 0{,}35721, 0 < x \le 1 \\ 0{,}78246, 1 < x \le 2 \\ 0{,}96336, 2 < x \le 3 \\ 0.99706, 3 < x \le 4 \\ 0{,}99991, 4 < x \le 5 \\ 1, x > 5 \end{cases}$$

3. Математическое ожидание – сумма произведений значений случайной величины на соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i .$$

$M(X) = 0 \cdot 0{,}035721 + 1 \cdot 0{,}42525 + 2 \cdot 0{,}1809 + 3 \cdot 0{,}0337 + 4 \cdot 0{,}00285 + 5 \cdot 0{,}00009 = 0{,}42525 + 0{,}3618 + 0{,}1011 + 0{,}0114 + 0{,}00045 = 0{,}9.$

Дисперсия – это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от ее математического ожидания. На практике пользуются следующей формулой:

$Д(X) = M(X^2) - (M(X))^2$

$(M(X))^2 = (0{,}9)^2 = 0{,}81.$

$M(X^2) = 1^2 \cdot 0{,}42525 + 2^2 \cdot 0{,}1809 + 3^2 \cdot 0{,}0337 + 4^2 \cdot 0{,}00285 + 5^2 \cdot 0{,}00009 = 0{,}42525 + 0{,}7236 + 0{,}3033 + 0{,}0456 + 0{,}00225 = 1{,}5$

$Д(X) = 1{,}5 - 0{,}81 = 0{,}69.$

Среднеквадратическое отклонение – это корень квадратный из $Д(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}69} \approx 0{,}83.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гусак А.А., Гусак Г.М.* Справочник по высшей математике. – Мн., 1991.
2. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М., 1997.
3. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М., 1998.
4. *Гурский Е.И.* Руководство к решению задач по высшей математике (в двух частях). – Мн., 1990.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Романович Людмила Александровна

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Контрольные задания
и методические указания к ним

Технический редактор *А.Н. Гладун*
Компьютерная верстка *В.С. Малявко*

ЛВ № 384 от 02.05.2003
Сдано в набор 12.12.2003. Подписано в печать 12.01.04 Формат 60x84 1/16
Бумага офсетная № 1. Гарнитура Times New Roman Cyr.
Усл.-печ. л. 1,2. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 70 экз. Заказ 4 .

Учреждение образования "Могилевский государственный университет им. А. А. Кулешова", 212022, Могилев, Космонавтов, 1

Напечатано на ризографе отдела оперативной полиграфии
МГУ им. А.А. Кулешова, ЛП № 281 от 07.02.2001
212022, Могилев, Космонавтов, 1