УДК 514.763.5

Л.А. РОМАНОВИЧ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ГРУППОИДЕ Ли $\Pi^k(B)$

В работе построены геометрические структуры на группоиде Ли $\Pi^k(B)$. Введены канонический морфизм группоидов Ли $\pi_k^{k-1}: \Pi^k(B) \to \Pi^{k-1}(B)$, представление алгеброида Ли $A\Pi^k(B)$ как алгеброида Ли J^kTB k-струй векторных полей на B, скобка с усечением $A\Pi^k(B) \wedge A\Pi^k(B) \to A\Pi^{k-1}(B)$.

Основное внимание в статье уделено обобщению классической формы Картана на группоид Ли $\Pi^k(B)$, исследованию ее свойств. Это связано с тем, что фундаментальная форма Картана играет важную роль при исследовании G-структур на гладких многообразиях.

В качестве примера исследована G-структура высшего порядка $J_k(\frac{G \times G}{H}) \subset \Pi^k(B)$ на однородном пространстве B = G/H.

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях и связностей на этих структурах. Классический подход к такому исследованию базируется на понятии главного расслоения. С другой стороны, в работах Ш. Эресмана развит еще один подход к построению основ геометрии, который базируется на понятиях группоида Ли, алгеброида Ли и k-струи гладкого отображения. Изложение основ дифференциальной геометрии, использующее группоиды Ли и алгеброиды Ли, приведено в монографии К. Маккензи [1]. Хотя главное расслоение и группоид Ли различаются только формально, использование группоидов Ли допускает более эффективное применение теории групп Ли.

В работе [2] Нго Ван Кё применил метод Эресмана и теорию Спенсера к исследованию G-структур высшего порядка на гладком многообразии, используя понятие группоида Ли $\Pi^k(B)$, элементами которого являются k-струи локальных диффеоморфизмов многообразия B. Для изложения базовой теории G-структур при помощи метода Эресмана необходимо построить для группоида Ли $\Pi^k(B)$ аналоги некоторых важных понятий, характеристик и свойств расслоений реперов высшего порядка. Эли Картан ввел понятие фундаментальной формы для изучения свойств псевдогрупп. Она также играет важную роль при исследовании G-структур. Обобщение фундаментальной формы Картана на произвольном группоиде Ли построено в работах И.В. Белько [3, 4].

Нашей целью является построение геометрических структур на группоиде Ли $\Pi^k(B)$. С расслоения реперов высших порядков на группоид Ли $\Pi^k(B)$ обобщены основные геометрические структуры. Введены канонический морфизм группоидов Ли π_k^{k-1}: $\Pi^k(B) \to \Pi^{k-1}(B)$, представление алгеброида Ли $A\Pi^k(B)$ как алгеброида Ли J^kTB k-струй векторных полей на B, скобка с усечением $A\Pi^k(B) \wedge A\Pi^k(B) \to A\Pi^{k-1}(B)$.

Основное внимание в работе уделено обобщению классической формы Картана на группоид Ли $\Pi^k(B)$, исследованию ее свойств. Это связано с тем, что фундаментальная форма Картана играет важную роль при исследовании G-структур на гладких многообразиях.

В качестве примера исследована G-структура высшего порядка $\boldsymbol{J_k}(\frac{G\times G}{H}) \subset \Pi^k(B)$ на однородном пространстве $B = G/H$. Фундаментальной формой этой G-структуры является сужение формы Θ^k на подалгеброид Ли $\boldsymbol{J_k}(\frac{G\times G}{H}) \subset \Pi^k(B)$.

Приведем описание группоида Ли $\Pi^k(B)$ и его алгеброида Ли. Пусть B – гладкое многообразие. $\Pi^k(B)$ – множество k-струй локальных диффеоморфизмов многообразия B. Структура группоида на множестве $\Pi^k(B)$ определяется с помощью отображений $\alpha(j_x^k f) = x$, $\beta(j_x^k f) = f(x)$, $\varepsilon(x) = j_x^k id_B$, $j_{f(x)}^k\varphi \cdot j_x^k f =$ $= j_x^k(\varphi \circ f)$. Гладкая структура в $\Pi^k(B)$ вводится с помощью гладкого атласа $\{(U_i, \varphi_i)\}$ в B, где $\varphi_i : U_i \to B$ – локальная карта в B. Обозначим через L_n^k дифференциальную группу порядка k. Ее элементами являются k-струи в точке $O \in R^n$ локальных диффеоморфизмов пространства R^n, сохраняющих точку О. Группа L_n^k является группой Ли. Пусть $h: U \to V$ – локальный диффеоморфизм, $U \subset U_i$, $V \subset U_j$. Тогда его k-струя $j_x^k h$ однозначно определяется такими точками $x \in U_i$, $y = h(x) \in U_j$ и k-струей $j_o^k(t_{-\varphi_j(h(x))} \circ \varphi_j \circ h \circ \varphi_i^{-1} \circ t_{\varphi_i(x)})$, где t_u обозначает трансляцию пространства R^n на элемент $u \in R^n$. Отображение $h_{ji}^x = t_{-\varphi_j(h(x))} \circ \varphi_j \circ h \circ \varphi_i^{-1} \circ t_{\varphi_i(x)}$ является локальным диффеоморфизмом пространства R^n, сохраняющим точку О. Таким образом возникает биективное отображение

$$\varphi_{ji} : \Pi^k(B)_{U_i}^{U_j} \to (\varphi_j(U_j) \times L_n^k \times \varphi_i(U_i)) : j_x^k h \to (\varphi_j(h(x)), j_o^k(h_{ji}^x), \varphi_i(x)).$$

С помощью отображений φ_{ji} гладкую структуру можно перенести с подмножеств $\varphi_j(U_j) \times L_n^k \times \varphi_i(U_i)$ на подмножества $\Pi^k(B)_{U_i}^{U_j}$. При замене локальных карт соответствующие замены в $\Pi^k(B)_{U_i}^{U_j}$ будут диффеоморфизмами, следовательно, $\Pi^k(B)_{U_i}^{U_j}$ является гладким многообразием. Карты φ_{ji} определяют локальные тривиализации для $\Pi^k(B)$. Отсюда следует гладкость операций и их нужные свойства. Транзитивность $\Pi^k(B)$ очевидна.

К. Макензи с точностью до некоторых деталей устанавливает соответствие между группоидами Ли и главными расслоениями, а также между расслоениями, ассоциированными с группоидами Ли и с главными расслоениями. Для главных и ассоциированных расслоений хорошо известен способ задания с помощью коциклов. К. Макензи приводит способ задания группоидов Ли с помощью коциклов. Пусть Ω – группоид Ли на *B*, $b \in B$, $G = \Omega_b^b$ – группа изотропии. Выберем атлас $\{(U_i, \sigma_i)\}$ локальных сечений для Ω_b, состоящий из покрытия $\{U_i\}$ для *B* и гладких отображений $\sigma_i : U_i \to \Omega_b$, для которых $\beta_b \circ \sigma_i = id_{U_i}$ для всех *i*. Рассмотрим отображения $\sigma_{ji} : U_j \times G \times U_i \to \Omega_{U_i}^{U_j} : (y, g, x) \to \sigma_j(y) g \sigma_i(x)^{-1}$.

Эти отображения будут диффеоморфизмами на открытые множества в Ω. Проекциям на первый и третий сомножители сопоставляются проекции в исток и устье соответственно. Отображения $g_{ij} : U_j \cap U_i \to G : x \to \sigma_j(x)^{-1} \sigma_i(x)$ являются функциями перехода для главного расслоения Ω_b относительно атласа тривиализаций $\{(U_i, \varphi_i)\}$, где $\varphi_i : U_i \times G \to \Omega_b(x, g) \to \sigma_i(x) g$. Умножение в Ω связано с отображениями σ_{ji} и g_{ji} следующей формулой

$$\sigma_{lk}(x, g, y) \cdot \sigma_{ji}(y, h, x) = \sigma_{li}(z, g g_{kj}(y) h, x),$$

$$\forall y \in U_{kj},\ \forall g, h \in G,\ \forall x \in U_i,\ \forall z \in U_l.$$

Отображения g_{ij} удовлетворяют условиям коцикла. Атлас $\{(U_i, \sigma_{ij})\}$ называется атласом *локальных тривиализаций* группоида Ли Ω. Таким образом, структуру группоида Ли можно построить, склеивая его из подмножеств вида $U_j \times G \times U_i$ и пользуясь последней формулой для определения умножения.

В геометрических приложениях теории группоидов Ли подгруппоиды Ли возникают как подгруппоиды изотропии гладких действий. Для локально тривиального расслоения *p*: *E* → *B* и группоида Ли $\mathbf{\Omega}$ на *B* обозначим через $\mathbf{\Omega}$∗*E* множество $\{(\xi, a) \in \Omega \times E | \alpha(\xi) = p(a)\}$. Это множество является замкнутым вложенным подмногообразием в $\mathbf{\Omega} \times$ E.

Понятие алгеброида Ли является обобщением понятия алгебры Ли. В 1967 году J. Pradines ввел понятие алгеброида Ли для дифференцируемого группоида. Алгеброид Ли вводится как векторное расслоение, наделенное морфизмом на касательное расслоение и скобкой сечений. Еще раньше, в 1957 г. М. Атья построил точную последовательность векторных расслоений для главного расслоения, которая является примером алгеброида Ли. Пусть B – гладкое многообразие. *Алгеброид Ли над B* – это векторное расслоение (A, p, B) вместе с морфизмом векторных расслоений $q : A \to TB$ над B, называемым анкерным отображением, и скобкой $[,]: \Gamma A \times \Gamma A \to \Gamma A$, которая **R**-билинейна, кососимметрична, удовлетворяет тождеству Якоби и связана с q соотношениями:

1) $q([\xi,\eta]) = [q(\xi),q(\eta)], \forall \xi,\eta \in \Gamma A$,

2) $[\xi, f\eta] = f[\xi,\eta] + q(\xi)(f)\eta, \forall \xi,\eta \in \Gamma A, \forall f \in C^{\infty}(B)$.

Многообразие B называется базой *алгеброида Ли* A. A называется *транзитивным*, если q – субмерсия, *регулярным* – если q имеет локально постоянный ранг, *вполне интранзитивным* – если $q = 0$.

Каждому дифференцируемому группоиду сопоставляется алгеброид Ли. Приведем описание алгеброида Ли для группоида Ли. Пусть $\mathbf{\Omega}$ – группоид Ли с базой B. Для всякого $\xi \in \Omega$ правый сдвиг $R_{\xi} : \Omega_{\beta\xi} \to \Omega_{\alpha\xi}$ является преобразованием α-слоев. Поэтому, говоря о правоинвариантных полях на $\mathbf{\Omega}$, нужно рассматривать только α-вертикальные поля. Векторное поле $X \in \Gamma T\Omega$ называется *правоинвариантным*, если оно α-вертикально и $X(\eta\xi) = T(R_{\xi})_{\eta}(X_{\eta})$, $\forall \xi,\ \eta \in \Omega$. Алгеброид Ли $A(\mathbf{\Omega})$ со скобкой [.,.] и анкерным отображением q называется алгеброидом Ли для группоида Ли $\mathbf{\Omega}$.

П. Либерманн установила изоморфизм между векторными пространствами $T_{\bar{x}}(\Pi^k(B))_x$ и $J^k(TB)_x$: $\varphi : J^k(TB)_x \to T_{\bar{x}}(\Pi^k(B))_x : j_x^k X \to \varphi_x^k(X) = X_{\bar{x}}^k$, где $X_{\bar{x}}^k$ – естественный лифт векторного поля $X \in \Gamma(TB)$, для которого φ_t – локальный поток на $\Pi^k(B)_x$ и , вместе с ним, векторное поле X^k. В векторном расслоении $(J_k(TB), p, B)$ скобка сечений определяется следующими свойствами:

1. $[j^k X, j^k Y] = j^k[X,Y]$, если $X,Y \in \Gamma(TB)$;

2. $[\mu, f\sigma] = f[\mu,\sigma] + p(\mu)(f)\sigma$, если $f \in C^{\infty}(B), \mu,\sigma \in \Gamma(J^k(TB))$.

Так как любые сечения локально можно представить в виде $\mu = \sum f_i j^k X_i, \sigma = \sum g_j j^k Y_j$, то указанные свойства полностью определяют скобку сечений в множестве $\Gamma(J^k(TB))$. Таким образом векторное расслоение $J^k(TB)$ вместе с проекцией p и построенной скобкой сечений является транзитивным алгеброидом Ли, соответствующим группоиду Ли $\Pi^k(B)$.

Зафиксируем точку $x \in B$. Пусть $\xi \in \Pi^k(B)_x$ – репер в точке $y \in B$. Так как пространства $J_y^k TB$ и $T_{\xi_x^y}\Pi^k(B)_x$ изоморфны, то произвольному реперу $\xi = j_x^k \varphi$ и локальному векторному полю X на B соответствует изоморфизм

$$J_x^{k-1}TB \to T_{\xi}\Pi^{k-1}(B)_x : \ j_x^{k-1}X \to (\varphi_* X)_{\xi^{k-1}}^{k-1}.$$

Определим фундаментальную форму Θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ следующим образом. Пусть $p \in T_{\xi}^{\alpha}\Pi^k(B)$ – α-вертикальный касательный вектор в точке ξ. Тогда касательный вектор p можно представить как лифт векторного поля X^k_ξ. Поставим в соответствие вектору $p = X^k_\xi$ в соответствие касательный вектор $X^k_{\frac{}{y}} \in A\Pi^k(B)$ с помощью правого умножения на ξ^{-1}. Затем к вектору $X^k_{\frac{}{y}}$ применим операцию усечения π^{k-1}_k. Наконец переместим полученный вектор в точку x с помощью отображения γ^{-1}. Композиция указанных отображений $\Theta^k = \gamma^{-1} \circ \pi^k_{k-1} \circ \xi^{-1}$ называется фундаментальной формой группоида Ли $\Pi^k(B)$.

Теорема 1. Фундаментальная форма Θ^k на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ обладает следующими свойствами:

1. Форма Θ^k эквивариантна относительно правого действия группы G^k_x;
2. Форма Θ^k левоинвариантна;
3. Ограничение формы Θ^k на алгеброид Ли $A\Pi^k(B)$ совпадает с усечением π^{k-1}_k.

Доказательство.

1. Пусть $\xi = j^k_x\varphi$ и η – элемент группы Ли G^k_x, то есть $\eta = j^k_x\psi$, причем исток и устье диффеоморфизма ψ находятся в точке $x \in B$. Пусть $X^k_\xi \in T^\alpha_\xi \Pi^k(B)$. Так как $\gamma^{-1}(X^k_\xi) = \gamma^{-1}(R_{\eta *} X^k_\xi)$, то

$$\left\langle R_{\eta *} X^k_\xi, \Theta^k \right\rangle = \left((\varphi \circ \psi)^{-1}\right)^{k-1}_* \circ \pi^k_{k-1} \circ \gamma^{-1}(\psi^k_* X^k_\xi) = \left((\psi)^{-1}\right)^{k-1}_* \circ \left\langle X^k_\xi, \Theta^k \right\rangle.$$

Следовательно, форма Θ^k эквивариантна относительно правого действия группы G^k_x.

2. Пусть $\Phi = L(j^k\psi)$, где ψ – левый сдвиг базы B. Тогда

$$\left\langle \Phi_* X^k_\xi, \Theta^k \right\rangle = \left((\psi \circ \varphi)^{-1}\right)^{k-1}_* \circ \pi^k_{k-1} \circ \gamma^{-1}(\psi^k_* X^k_\xi) =$$

$$= \left(\varphi^{-1}\right)^{k-1}_* \circ (\psi^{-1})^{k-1}_* \circ \pi^k_{k-1} \circ \psi^k_* \circ \gamma^{-1}(X^k_\xi) =$$

$$= \left(\varphi^{-1}\right)^{k-1}_* \circ (\psi^{-1})^{k-1}_* \circ \psi^{k-1}_* \circ \pi^k_{k-1} \circ \psi^k_* \circ \gamma^{-1}(X^k_\xi) = \left\langle X^k_\xi, \Theta^k \right\rangle.$$

Следовательно, форма Θ^k является левоинвариантной.

3. Если $r \le k$ то можно построить отображение усечения $\pi^r_k : \Pi^k(B) \to \Pi^r(B)$: $j^k_x f \to j^r_x f$, причем $\pi^s_k \circ \pi^r_k = \mu^s_k$, если $s \le r \le k$. Рассмотрим алгеброид Ли группоида Ли $\Pi^k(B)$, который представляет собой векторное расслоение $A\Pi^k(B) = \bigcup T(\Pi^k(B)_x)_{\bar{x}}$, состоящее из α-вертикальных векторов над подмногообразием $\varepsilon(B)$. Для произвольного элемента $X^k \in A(\Pi^k(B))$ выполняется условие $\left\langle X^k, \Theta^k \right\rangle = X^{k-1}$. Это означает, что ограничение формы Θ^k на алгеброид Ли $A\Pi^k(B)$ совпадает с усечением π^{k-1}_k.

Теорема доказана.

Следующее утверждение связывает форму Θ^k и продолжения диффеоморфизмов базы B.

Теорема 2. Автоморфизм группоида Ли $\Pi^k(B)$ с усечением оставляет инвариантной фундаментальную форму Θ^k.

Доказательство. Диффеоморфизм ψ базы B индуцирует автоморфизм группоида Ли $\Pi^k(B)$: $\psi^k(\xi) = j^k_{\psi(x)}(\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1})$, где $\xi = j^k_x\varphi$. Возьмем два различных элемента $\xi = j^k_x\varphi_1$ и $\eta = j^k_x\varphi_2$ группоида Ли $\Pi^k(B)$, для которых выполняется условие $\beta(\xi) = \alpha(\eta)$. Тогда

$$\psi^k(\xi)\cdot\psi^k(\eta) = j^k_{\psi(y)}(\psi\circ\varphi_2\circ\psi^{-1})\cdot j^k_{\psi(x)}(\psi\circ\varphi_1\circ\psi^{-1})$$

$$= j^k_{\psi(x)}(\psi\circ\varphi_2\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ\varphi_1\circ\psi^{-1}) = j^k_{\psi(x)}(\psi\circ\varphi_2\circ\varphi_1\circ\psi^{-1}) = \psi^k(\eta\xi).$$

Рассмотрим пару отображений ψ и ψ^k. Пусть $X^k_\xi \in T^\alpha_\xi\Pi^k(B)_x$ и $X^k_\xi = j^k_x X$, где X – некоторое векторное поле на базе. Тогда

$$\left\langle \psi^k{}_* X^k_\xi, \Theta^k \right\rangle = (j^k_{\psi(x)}(\psi\circ\varphi_2\circ\varphi_1\circ\psi^{-1}))^{-1} \circ \pi^{k-1}_k \circ \gamma^{-1}(\psi^k_* \circ X^k_\xi) =$$

$$= (j^{k-1}_x\psi)_* \circ \left\langle X^k_\xi, \Theta^k \right\rangle.$$

Теорема доказана.

Одним из вариантов определения G-структуры является следующее [2]: G-структурой порядка k на многообразии B называется редукция группоида Ли $\Pi^k(B)$ к некоторому подгруппоиду Ли, группа изотропии которого изоморфна некоторой подгруппе Ли G группы Ли L^k_m.

В качестве примера рассмотрим G-структуры на однородном пространстве. Пусть G – группа Ли, H – замкнутая подгруппа Ли группы Ли G, $B = G/H$ – однородное пространство; l_g: B $\to$ B: $g_1H \to gg_1H$ – отображение левого сдвига на элемент $g \in G$. В работе [6] для описания дифференциальных структур порядка k на однородном пространстве B используются главное расслоение G (B, π, H), где π: $G \to G/H$ – каноническая проекция, и расслоение $L^k(B)$ реперов порядка k. Расслоение $G(B, \pi, H)$ является присоединенным к группоиду Ли $\dfrac{G\times G}{H}$ [1], состоящем из элементов вида $\langle g_2, g_1\rangle = \{(g_2h, g_1h)/h\in H\}$. Структура группоида Ли на множестве $\dfrac{G\times G}{H}$ определяется с помощью отображений $\alpha(\langle g_2, g_1\rangle) = \pi(g_1)$, $\beta(\langle g_2, g_1\rangle) = \pi(g_2)$, $\varepsilon(gH) = \langle g, g\rangle$, $\langle g_3, g_2\rangle \cdot \langle g_2, g_1\rangle = \langle g_3, g_1(g_2)^{-1}g_2\rangle$. Расслоение реперов $L^k(B)$ является присоединенным к группоиду Ли $\Pi^k(B)$, состоящем из k-струй локальных диффеоморфизмов многообразия B. Структура группоида Ли на множестве $\Pi^k(B)$ определяется с помощью отображений $\alpha(j^k_x f) = x$, $\beta(j^k_x f) = f(x)$, $\varepsilon(x) = j^k_x id_B$, $j^k_{f(x)}\varphi\cdot j^k_x f = j^k_x(\varphi\circ f)$. Если $r \le k$ то можно построить отображение μ^r_k: $\Pi^k(B) \to \Pi^r(B)$: $j^k_x f \to j^r_x f$, причем $\mu^s_k \circ \mu^r_k = \mu^s_k$, если $s \le r \le k$.

Пусть $0 = H \in B$, $(\Pi^k(B))^0_0$ – группа изотропии группоида Ли $\Pi^k(B)$, состоящая из k-струй диффеоморфизмов многообразия B, у которых начало и конец совпадают с точкой 0, и изоморфная дифференциальной группе D^k_n. При таком подходе важную роль играет изотропное представление порядка k, которое является гомоморфизмом $i_k: H \to (\Pi^k(B))^0_0 : h \to j^k_0 l_h$. Наименьшее из чисел

k, для которого изотропное представление точно, называется порядком изотропии однородного пространства.

Изотропному представлению i_k соответствует морфизм группоидов Ли:

$$J_K : \frac{G\times G}{H} \to \Pi^k(B) : \langle g_2, g_1\rangle \to j_x^k(l_{g_2} \circ l_{g_1^{-1}}),$$

где $x = g_1H$. Левому сдвигу $l_g : B \to B$. соответствуют отображения

$$l_g^k : \Pi^k(B) \to \Pi^k(B) : j_x^k f \to j_{gx}^k(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}}) \text{ и}$$

$$\bar{l}_g : \frac{G\times G}{H} \to \frac{G\times G}{H} : < g_2, g_1 > \to < gg_2, gg_1 >.$$

Лемма. Отображения l_g^k и $\bar{l}_g$ обладают следующими свойствами:

1) $\mu_k^s \circ l_g^k = l_g^s \circ \mu_k^s$;

2) $\alpha \circ l_g^k = l_g \circ \alpha, \beta \circ l_g^k = l_g \circ \beta$;

3) $l_{g_1g_2}^k = l_{g_1}^k \circ l_{g_2}^k$;

4) $J_k \circ \bar{l}_g = \bar{l}_g^k \circ J_k$.

Доказательство:

1. $(\mu_s^k \circ l_g^k)(j_x^k f) = \mu_k^s(j_{gx}^k(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}}) = j_{gx}^s(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}})$ и

$(l_g^s \circ \mu_k^s)(j_x^k f) = j_{gx}^s(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}})$.

2. $(\alpha \circ l_g^k)(j_x^k f) = \alpha(j_{gx}^k(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}}) = gx$ и $(l_g \circ \alpha)(j_x^k f) = l_g(x) = gx$,

$(\beta \circ l_g^k)(j_x^k f) = \beta(j_{gx}^k(l_g \circ f \circ l_{g^{-1}}) = gf(x)$ и $(l_g \circ \beta)(j_x^k f) = l_g(f(x)) = gf(x)$.

3. $l_{g_1g_2}^k(j_x^k f) = j_{g_1g_2x}^k(l_{g_1g_2} \circ f \circ l_{(g_1g_2)^{-1}})$ и

$$(l_{g_1}^k \circ l_{g_2}^k)(j_x^k f) = l_{g_1}^k(j_{g_2x}^k(l_{g_2} \circ f \circ l_{g_2^{-1}})) = j_{g_1g_2x}^k(l_{g_1} \circ l_{g_2} \circ f \circ l_{g_2^{-1}} \circ l_{g_1^{-1}}) =$$

$$= j_{g_1g_2x}^k(l_{g_1g_2} \circ f \circ l_{(g_1g_2)^{-1}}).$$

4. $\left(J_k \circ \overline{l_g}\right)(\langle g_2, g_1\rangle) = J_k(\langle gg_2, gg_1\rangle) = j_{gg_10}^k(l_{gg_2} \circ l_{(gg_1)^{-1}})$ и

$$(l_g^k \circ J_k)(\langle g_2, g_1\rangle) = l_g^k(j_{g_10}^k(l_{g_1} \circ l_{(g_1)^{-1}}) = j_{gg_10}^k(l_g \circ l_{g_2} \circ l_{(g_1)^{-1}} \circ l_{g^{-1}}) =$$

$$= j_{gg_10}^k(l_{gg_2} \circ l_{(gg_1)^{-1}}).$$

Что и требовалось доказать.

Обозначим через $\Pi^k(B, H)$ образ $J_k(\frac{G\times G}{H}) \subset \Pi^k(B)$.

Теорема 3. Пусть $B = G/H$ – однородное пространство, k – его порядок изотропии. Тогда группоид Ли $\Pi^k(B, H)$ является редукцией группоида Ли $\Pi^k(B)$ до группы изотропии, изоморфной $H_k = H/H_k$, где H_k – ядро изотропного представления i_k.

Доказательство. Обозначим через α' и β' ограничение отображений α и β на множество $\Pi^k(B, H)$. Из свойств 2) и 4) леммы следует, что для любых элементов g и g_1 из G и для любого элемента h из H выполняются условия:

$$J_k(< hg_2, hg_1 >) = I_h^k(J_k(< g_2, g_1 >), \alpha' \circ I_g^k = I_g \circ \alpha', \beta' \circ I_g^k = I_g \circ \beta'.$$

Из свойства 4) доказанной леммы следует, что это множество замкнуто относительно операции частичного умножения, следовательно является группоидом Ли – подгруппоидом Ли группоида Ли $\Pi^k(B)$. Из выполнения условия 3) следует что каждый α-слой группоида Ли $\Pi^k(B, H)$ является орбитой действия группы G и, следовательно, однородным пространством группы Ли G с группой изотропии H^k – ядром изотропного представления i_k. Тогда $\Pi^k(B, H) \cong \frac{G\times G/H^k}{H}$ и

диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\frac{G\times G}{H} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Pi^k(B, H) \\
& \frac{G\times G/H^k}{H} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Проверим это. Пусть g_2 и g_1 принадлежат одному смежному классу в G/H_k. Это означает, что $g_2^{-1} g_1 \in H^k \in H^*$ или $g_2 = g_1 h$, $h \in H^k$. По определению 2 и по условию теоремы

$$i_k(h) == j_0^k(id_B) = i_k(g_2^{-1}g_1) = j_0^k l_{g_2^{-1}g_1} = j_0^k(l_{g_2^{-1}} \circ l_{g_1}) = \left(l_{g_2}^k\right)^{-1} \circ j_0^k l_{g_2}.$$

Тогда $j_0^k l_{g_1} = l_{g_2}^k \circ j_0^k(id_B) = j_0^k l_{g_2}$.

$$J_k(< g_3, g_1 >) = j_{g_1H}^k(l_{g_3} \circ l_{g_1^{-1}}) = l_{g_3}^k \circ j_{g_1H}^k(l_{g_1^{-1}}), \tag{1}$$

$$\mathrm{J_k}(\langle g_3, g_2\rangle) = j_{g_2H}^k(l_{g_3} \circ l_{g_2^{-1}}) = j_{g_1hH}^k(l_{g_3} \circ l_{(g_1h)^{-1}}) =$$

$$j_{g_1H}^k(l_{g_3} \circ l_{h^{-1}} \circ l_{g_1 -1}) = l_{g_3}^k \circ j_{g_1H}^k(l_{h^{-1}} \circ l_{g_1^{-1}}) =$$

$$= l_{g_3}^k \circ l_{h^{-1}}^k \circ j_{g_1H}^k(l_{g_1^{-1}}) = l_{g_3}^k \circ j_0^k(id_B) \circ j_{g_1H}^k(l_{g_1^{-1}}) = l_{g_3}^k \circ j_{g_1H}^k(l_{g_1^{-1}}).$$

то есть выполняется условие

$$J_k(< g_3, g_2 >) = I_{g_3}^k \circ j_{g_1h}^k(I_{g_1^{-1}}). \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получим $J_k(<g_3,g_1>) = J_k(<g_3,g_2>)$, если g_2 и g_1 принадлежат одному смежному классу в G/H^*. Однородное пространство G/H^* допускает структуру главного расслоения со структурной группой $H_k = H/H_k$. Изотропное представление порядка k группы H определяет точное представление группы H_k в группе изотропии $(\Pi^k(B))$. Следовательно группоид Ли $\Pi^k(B, H)$ является сокращением группоида Ли $\Pi^k(B)$ до группы изотропии, изоморфной H_k.

Что и требовалось доказать.

Образ $J_k(\frac{G\times G}{H}) \subset \Pi^k(B)$ является редукцией группоида Ли $\Pi^k(B)$ до группы изотропии, изоморфной $H_k = H/H^k$, где H^k – ядро изотропного представления i_k. Это, по определению, G-структура порядка k на многообразии B. Фундаментальной формой этой G-структуры является сужение формы Θ^k на подалгеброид Ли $J_k(\frac{G\times G}{H}) \subset \Pi^k(B)$.

Аналогичные рассуждения можно провести для описания эквивалентных структур на эффективном однородном пространстве. Пусть $B = G/H$ – эффективное однородное пространство, k – его порядок изотропии, $0 = H \in B$, $i_k : H \to (\Pi^k(B))_0^0 : h \to j_0^k l_h$ – изотропное представление порядка k. В теореме 3 мы доказали, что группоид Ли $\Pi^k(B, H)$ является общим примером инвариантной структуры высшего порядка на B.

Из доказанной теоремы и известного утверждения о том, что эффективное однородное пространство имеет конечный порядок изотропии следует, что на всяком эффективном однородном пространстве всегда существует дифференциальная структура порядка k.

Пусть заданы диффеоморфизмы σ и σ' пространства B на себя. В дальнейшем мы будем рассматривать только те диффеоморфизмы, которые согласованы с действием G на B.

Определение. Диффеоморфизмы σ и σ' называются эквивалентными, если существует такой элемент $a \in G$, что $\sigma' = l_a \circ \sigma$.

Для диффеоморфизмов σ и σ' можно построить соответственно диффеоморфизмы $\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma}'$ такие, что $\bar{\sigma} = l_{g_1} \circ \sigma$ и $\bar{\sigma}(0) = 0$, $\bar{\sigma}' = l_{g_2} \circ \sigma'$ и $\bar{\sigma}'(0) = 0$. Диффеоморфизмы $\bar{\sigma}$ и $\bar{\sigma}'$ называются центрированными относительно точки $0 \in B$. Нетрудно показать, что σ и σ' эквивалентны тогда и только тогда, когда $\exists h \in H$ такой, что $\bar{\sigma}' = l_h \circ \bar{\sigma}$. Если последнее соотношение выполняется лишь в окрестности точки $0 \in B$, то будем говорить о локальной эквивалентности.

Для всякого диффеоморфизма $\sigma : B \to B$ определим отображение

$$\Lambda_K : \frac{G\times G}{H} \to \Pi^k(B) : \langle g_2, g_1 \rangle \to j_x^k(l_{g_2} \circ \sigma \circ l_{g_1^{-1}}).$$

Очевидно, что если $\sigma = id_B$, то $\Lambda_k = J_k$.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Mackenzie, K.*** Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometrie / K. Mackenzie. – Cambridge Universitu Press, 1987. – 327 p.

2. ***Ngo van Que.*** Du prolongement des espaces fibres et des struktures infinitesimales // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1967. – T. 17. – N 1. – P. 159-223.
3. ***Белько, И.В.*** Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии / И.В. Белько. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 208 с.
4. ***Belko, I.*** The fundamental form on a Lie groupoid of diffeomorphisms / I. Belko. 5th Conference Geometry an topology of Manifolds. – 2003. – P. 20-21.

Поступила в редакцию