

УДК 511.42

ДВУХСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА ТОЧЕК С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ В K -МЕРНЫХ КУБАХ МАЛОЙ МЕРЫ

М. В. Ламчановская

кандидат физико-математических наук
Институт информационных технологий
Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники

Н. В. Сакович

кандидат физико-математических наук, доцент
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Н. В. Шамукова

кандидат физико-математических наук, доцент
Университет гражданской защиты МЧС РБ

Понятие всюду плотного множества является фундаментальным математическим понятием. Множество рациональных чисел является всюду плотным множеством на действительной прямой. В последние 40 лет было доказано свойство всюду плотности множеств действительных и алгебраических чисел в \mathbb{R} . Нетрудно доказать, что множество точек с алгебраическими координатами всюду плотно в любом кубе $T \subset \mathbb{R}^k$. Задача значительно усложняется, если рассматривать точки с алгебраическими сопряженными координатами и кубы T малой меры. В данной работе продолжено изучение распределения алгебраических чисел. Доказано несколько теорем об оценках сверху и снизу количества действительных алгебраических чисел в коротких интервалах.

Ключевые слова: корень многочлена, алгебраические числа, система диофантовых неравенств, порядок приближения, покрытие множества.

Число α называется алгебраическим, если существует полином

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z}, 0 \leq j \leq n, \quad (1)$$

для которого $P(\alpha) = 0$. Если $P(x)$ неприводим над \mathbb{Q} и $\text{НОД}(a_0, \dots, a_n) = 1$, то он называется минимальным полиномом числа α , а величины $n = \deg P = \deg \alpha$, $H = H(P) = H(\alpha)$ называются степенью и высотой полинома $P(x)$ и числа α соответственно. В этом случае полином $P(x)$ является минимальным полиномом и для остальных корней $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ полинома $P(x)$ такой же степени и высоты, как $\alpha = \alpha_1$.

© Ламчановская М. В., 2018

© Сакович Н. В., 2018

© Шамукова Н. В., 2018

Рассмотрим некоторый конечный интервал I длины μI . Для упрощения технических деталей будем считать, что $I \subset [0,1)$. Для $Q > 1$ рассмотрим класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}. \quad (2)$$

Пусть задан некоторый интервал $I_1 \subset I$ длины $\mu I_1 = Q^{-\gamma}$, $\gamma \geq 0$. При каких условиях на \mathcal{Y} можно утверждать, что в классе $\mathcal{P}_n(Q)$ найдется полином $P(x)$, корень которого принадлежит I_1 ?

В дальнейшем через μA будем обозначать меру Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$, $\#B$ – количество элементов конечного множества B , $c_1 = c_1(n), c_2(n), \dots$ – величины, зависящие только от n и не зависящие от H и Q . В работе [3] были доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Для любого рационального числа $\frac{p}{q}$ существует интервал I_2 с центром в точке $\frac{p}{q}$ и мерой $\mu I_2 = c_1 q^{-n} Q^{-1}$, не содержащий ни одного действительного алгебраического числа α степени $n \geq 1$ и высоты $H(\alpha) = Q$.

Теорема 2. Для $c_2 > c_0(n)$ и $Q > Q_0(n)$ в любом интервале I_3 , $\mu I_3 > c_2 Q^{-\gamma}$, $0 \leq \gamma \leq 1$, содержится не менее $c_3 Q^{n+1} \mu I_3$ алгебраических чисел α , $\deg \alpha = n$, $H(\alpha) \leq Q$.

В работе [1] были найдены оценки снизу для количества точек $z = (\alpha_1, \alpha_2)$ с действительными сопряженными алгебраическими числами α_1, α_2 , находящимися в полосе шириной $c_4 Q^{-\gamma_1}$, $0 \leq \gamma_1 \leq \frac{1}{2}$ возле гладкой кривой $y = f(x)$.

Отметим работу [2] где доказано, что существует не менее $c_5 Q^{\frac{n+1}{3}}$ полиномов, у которых два сопряженных корня находятся на расстоянии

$c_6 Q^{-\gamma_2}$, $0 \leq \gamma_2 \leq \frac{n+1}{3}$. Также найдены оценки снизу для количества полиномов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ и пар полиномов $(T_1(x), T_2(x)) \in \mathcal{P}_n^2(Q)$ с заданными дискриминантами и результатами [3]. Отметим также [4; 5] обобщения указанных результатов на поля комплексных и p -адических чисел.

В работе [6] получены результаты о распределении алгебраических чисел второй и третьей степени. В данной работе будут получены новые результаты о распределении алгебраических точек, причем впервые будут получены оценки сверху для их количества.

Теорема 3. Существует величина c_6 , при которой в любом интервале I_4 , $\mu I_4 = Q^{-\gamma_3}$, $0 \leq \gamma_3 \leq 1$ лежит не более $c_6 Q^{n+1} \mu I_4$ алгебраических точек α полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$.

Доказательство. Предположим, что $\alpha \in I_4$

$$\#\{P(x) \in \mathcal{P}_n(Q), P(\alpha) = 0\} > c_6 Q^{n+1} \mu I_4 = c_6 Q^{n+1-\gamma_3}. \quad (3)$$

Если полином $P(x)$ имеет на I_4 больше одного корня, оставим только один из них, от чего в неравенстве (3) несколько изменится только величина c_6 . Зафиксируем вектор $\bar{b}_1 = (a_n, \dots, a_1)$, состоящий из коэффициентов полинома $P(x)$, и обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \bar{b}_1)$ подкласс, состоящий из полиномов $P(x)$, у которых совпадают коэффициенты при x, x^2, \dots, x^n . Ясно, с учетом (3), что

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{b}_1) > c_7 Q^{1-\gamma_3}. \quad (4)$$

Разложим каждый полином $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q, \bar{b}_1)$ на интервале I_4 в ряд Тейлора в окрестности корня $\alpha_1 = \alpha_1(P)$. Имеем

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P''(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)^2 + \dots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)^n. \quad (5)$$

Так как $|x - \alpha_1| \leq Q^{-\gamma_3}$, а $x \in [0, 1)$, то $|P'(\alpha_1)| < n^2 Q$,

$$|P'(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)| < n^2 Q^{1-\gamma_3}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} |P''(\alpha_1) \cdot (x - \alpha_1)^2| \leq \frac{1}{2} n^3 Q^{1-2\gamma_3} < n Q^{1-\gamma_3}, \quad Q > Q_0(n). \quad (7)$$

Остальные члены разложения оцениваются правой частью в (7), и поэтому из (5)–(7) получаем при $\forall x \in I_4$ и достаточно большом Q

$$|P(x)| < 2n^2 Q^{1-\gamma_3}. \quad (8)$$

Занумеруем все полиномы из $\mathcal{P}_n(Q, \bar{b}_1)$ так $P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x)$

$$k > \frac{1}{2} c_7 Q^{1-\gamma_3} \quad (9)$$

и образуем новые полиномы $R_j(x) = P_j(x) - P_0(x)$, $1 \leq j \leq k$. Полиномы $R_j(x)$ – различные целые числа, отличные от нуля, и

$$|R_j(x)| < 4n^2 Q^{1-\gamma_3}. \quad (10)$$

Из (9) следует, что среди них есть число l ,

$$|l| > \frac{1}{4} c_7 Q^{1-\gamma_3}. \quad (11)$$

Если $c_7 > 16n^2$, то неравенства (10) и (11) противоречивы, что доказывает противоречивость неравенства (3).

Теорема 4. Пусть β – действительный корень своего минимального полинома $T_k(x)$, $\deg T_k(x) = k$, $1 \leq k < n$, $H(T_k(x)) < Q^{\gamma_4}$, $0 \leq \gamma_4 \leq 1$. Тогда существует достаточно малая величина c_8 , при которой на интервале I_5 , $\mu I_5 = c_8 Q^{-\gamma_4 n - k}$ с центром в точке β нет корней многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$.

В доказательстве теоремы 4 будет использована следующая лемма [7].

Лемма. Пусть $P(x)$ – многочлен, $\deg P = n$, с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и старшим коэффициентом a_n . Тогда для любого набора корней $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$,

$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, k \leq n$, справедливо неравенство

$$|\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}| < c_9 \cdot \frac{H(P)}{|a_n|}.$$

Доказательство теоремы 4.

Предположим, что корень $\alpha \neq \beta$ полинома $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$ лежит на интервале I_4 . Тогда α – корень неприводимого многочлена $P_1(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Многочлены $T_k(x) = l_k x^k + \dots + l_1 x + l_0$ и $P_1(x) = d_n x^n + \dots + d_1 x + d_0$ не имеют общих корней, и поэтому их результат $R(P_1(x), T_k(x)) \neq 0$. Из определения результата имеем

$$1 \leq |R(P_1, T_k)| < l_k^n d_n^k \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} |\alpha_i - \beta_j|. \quad (12)$$

Для оценки произведения в (12) выделим сомножитель $|\alpha - \beta|$, а остальные сомножители оценим с помощью леммы.

Получим

$$1 \leq l_k^n d_n^k c_8 Q^{-\gamma_4 n - k} c_{10} \left(\frac{H(T_k)}{l_k} \right)^n c_{11} \left(\frac{H(P_1)}{d_n} \right)^k < c_8 c_{12} H(T_k)^n H(P_1)^k Q^{-\gamma_4 n - k} < c_8 c_{12} Q^{\gamma_4 n + k} Q^{-\gamma_4 n - k} < c_8 c_{12}. \quad (13)$$

Возьмем $c_8 = c_{12}^{-1}$ и получим противоречие.

Теорема 4 может быть обобщена на многомерный случай.

Теорема 5. Существует величина c_{13} и куб $S \subset \mathbb{R}^k, 2 \leq k < n$ со стороны $c_{13} Q^{-1}$, внутри которого нет сопряженных алгебраических точек $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ никакого многочлена $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q), \deg P \geq k$.

Доказательство.

Возьмем точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k+1} \right) \in \mathbb{R}^k$ и рассмотрим куб

$K = \left\{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_k) : \prod_{l=2}^{k+1} |x_l - \frac{1}{l}| < c_{13} Q^{-1} \right\}$. Пусть точка $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, порожденная многочленом $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, лежит в S . Тогда $\left| \alpha_{l-1} - \frac{1}{l} \right| < c_{13} \cdot Q^{-1}$. Результат целочисленных многочленов

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ и $T(x) = (k+1)! \cdot \prod_{l=2}^{k+1} \left| x - \frac{1}{l} \right|$ отличен от нуля. Имеем

$$1 \leq |R(T, P)| \leq a_k^n (k!)^n \prod_{\substack{2 \leq l \leq k+1 \\ 1 \leq j \leq n}} \left| \frac{1}{l} - \alpha_j \right|. \quad (14)$$

Для оценки произведения в правой части (14) оценим

$$\left| \frac{1}{2} - \alpha_1 \right| \cdot \left| \frac{1}{3} - \alpha_2 \right| \cdots \left| \frac{1}{k+1} - \alpha_k \right| < c_{13}^k Q^{-k}.$$

Остальные сомножители оценим, как в (13), с помощью леммы. Получим

$$1 \leq c_{13}^k c_{14} Q^{-k} (k!)^n H(P)^k < c_{13}^k c_{15} Q^{-k+k} = c_{13}^k c_{15}. \quad (15)$$

При $c_{13} = 0,5 c_{15}^{\frac{1}{k}}$ неравенство (15) противоречиво, что доказывает теорему 5.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы 3.

Теорема 6. При любом $0 \leq \gamma_5 < 1$ в квадрате $T = I_1 \times I_2 \subset [0,1]^2$, $\mu_j = Q^{-\gamma_5}$ при подходящей величине c_{16} справедливо неравенство

$$\#\{\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in T : \exists P(x) \in \mathcal{P}_n(Q), P(\alpha_j) = 0, j=1,2\} < c_{16} Q^{n+1-2\gamma_5}. \quad (16)$$

Доказательство. Предположим, что верно неравенство, противоположное неравенству (16). Разложим многочлен $P(x)$ по каждой переменной x_j на интервале $I_j, j=1,2$ в ряд Тейлора.

$$P(x_j) = P(\alpha_j) + P'(\alpha_j) \cdot (x_j - \alpha_j) + \frac{1}{2} P''(\alpha_j) \cdot (x_j - \alpha_j)^2 + \dots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(\alpha_j) \cdot (x_j - \alpha_j)^n. \quad (17)$$

В (17) корень α_j лежит на отрезке $I_j, x_j \in I_j, 0 \leq x_j \leq 1$ и $P(\alpha_j) = 0, j=1,2$. Поэтому при достаточно большом Q

$$|P'(\alpha_j) \cdot (x - \alpha_j)| < n^2 Q^{1-\gamma_5},$$

$$\frac{1}{2} |P''(\alpha_j) \cdot (x - \alpha_j)^2| < n^3 Q^{2(1-\gamma_5)} < n Q^{1-\gamma_5},$$

$$\left| \frac{1}{s!} P^{(s)}(\alpha_j) \cdot (x - \alpha_j)^s \right| < n^s Q^{s(1-\gamma_5)} < n Q^{1-\gamma_5}, 3 \leq j \leq n,$$

$$|P(x_j)| < 2n^2 Q^{1-\gamma_5}. \quad (18)$$

Зафиксируем вектор $\bar{b}_2 = (a_n, \dots, a_2)$, состоящий из коэффициентов многочленов $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. При достаточно большом Q верно неравенство

$$\#\{\bar{b}_2\} \leq (2Q+1)^n < 2^{n+1} Q^{n-1}. \quad (19)$$

Множество полиномов $P(x)$ с одним и тем же вектором \bar{b}_2 обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \bar{b}_2)$. Занумеруем все полиномы $P(x): P_0(x), P_1(x), \dots, P_s(x)$ из $\mathcal{P}_n(Q, \bar{b}_2)$. Согласно предположению в начале доказательства

$$s > 0,5c_{16}Q^{2(1-\gamma_s)}. \quad (20)$$

Образум новые s полиномов . Это различные целочисленные полиномы, у которых, согласно определению $\mathcal{P}_n(Q, \bar{b}_2)$, коэффициенты при x^n, x^{n-1}, \dots, x^2 совпадают. Из (18) следует

$$|R_j(x)| < 4n^2Q^{1-\gamma_s}, \deg R_j(x) \leq 1, H(R_j) \leq 2Q, 1 \leq j \leq s. \quad (21)$$

Поскольку величина s по (20) велика, то среди коэффициентов $R_j(x) = a_jx + b_j$ должны быть коэффициенты, большие

$$\max(|a_j|, |b_j|) > 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_s}. \quad (22)$$

Возьмем многочлен $R_j(x)$, у которого один из коэффициентов удовлетворяет неравенству (22). Пусть это многочлен $ax + b$ и $a > 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_s}$. Воспользуемся (18) и составим систему неравенств

$$\begin{aligned} |ax_1 + b| &< 2n^2Q^{1-\gamma_s} \\ |ax_2 + b| &< 2n^2Q^{1-\gamma_s}, \quad a > 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_s}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как по предположению координаты x_1 и x_2 отделены, $|x_1 - x_2| \geq \delta$, то заменим (23) системой уравнений

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= \Theta_1(x_1)Q^{1-\gamma_s} = t_1 \\ ax_2 + b &= \Theta_2(x_2)Q^{1-\gamma_s} = t_2, \quad |\Theta_j(x_j)| \leq 2n^2. \end{aligned}$$

По правилу Крамера имеем

$$\begin{aligned} 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}}Q^{1-\gamma_s} \leq |a| &= \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|} = \frac{\begin{vmatrix} t_1 & 1 \\ t_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}} \leq \frac{4n^2Q^{1-\gamma_s}}{|\delta|} = 4n^2\delta^{-1}Q^{1-\gamma_s} \quad \text{и} \\ 2^{-2}c_{16}^{\frac{1}{2}} &< 4n^2\delta^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Неравенство (24) при $c_{16} > 2^8 n^4 \delta^{-2}$ противоречиво. Это означает, что теорема 6 верна при $c_{16} = 2^9 n^4 \delta^{-2}$.

Теорема 6 справедлива при любом $1 \leq k \leq n-1$, что можно доказать аналогично.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Кемеш О. Н.* О количестве точек с действительными алгебраическими координатами вблизи гладкой кривой / О. Н. Кемеш, И. М. Морозова, Н. В. Сакович // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – № 1(49). – 2017. – С. 12–16.
2. *Бересневич, В. В.* Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гётце // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 2. – С. 26–27.
3. *Рыкова, О. В.* О количестве рациональных точек с ограниченными знаменателями в коротких интервалах различных типов / О. В. Рыкова, Н. В. Сакович, Н. В. Шамукова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі. – № 1(47). – 2016. – С. 28–31.
4. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. матем., 79:1 (2015), 21–42.
5. *Дудко, Д. В.* О малых значениях монических многочленов на коротких интервалах / Д. В. Дудко, Н. В. Сакович, Н. В. Шамукова // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – № 1(29). – 2008. – С. 155–161.
6. *Шамукова, Н. В.* О распределении алгебраических чисел второй и третьей степени / Н. В. Шамукова, Н. В. Сакович // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – № 2(38). – 2011. – С. 36–43.
7. *Budarina N., Dickinson D., Jin Yuan.* On the number of polynomials with small discriminants in the euclidean and p-adic metrics // Acta Mathematica Sinica. – 2012. – Vol. 28, № 3. – P. 469–476.

Поступила в редакцию 19.12.2017 г.

Контакты: +375 222 28-35-85 (Сакович Наталья Владимировна)

+375 29 315 65 81 (Ламчановская Марина Валерьевна)

Lamchanovskaya M., Sakovich N., Shamukova N. TWO-SIDED EVALUATIONS FOR A NUMBER OF POINTS WITH ALGEBRAIC COORDINATES IN K-DIMENSIONAL CUBES OF SMALL SIZE.

The article views the upper bound for the real algebraic conjugate numbers (α_1, α_2) of a degree $n \geq 2$ and a height Q , which lie in the square $T \subset [0, 1]^2$ of the size $Q^{-\gamma}$, $0 \leq \gamma < 1$.

Keywords: root of polynomial, algebraic number, Diophantine inequality system, order of approximation, set cover.