Н.В. Кожуренко

О СТАРШЕМ ПОКАЗАТЕЛЕ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ, СУММИРУЕМЫМИ СО СТЕПЕНЬЮ И НЕМОНОТОННЫМ ВЕСОМ

Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \ x \in R^n, \ t \geq 0, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей коэффициентов A такой, что $\|A(t)\| \leq M < +\infty$ при всех $t \geq 0$. Наряду с системой (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \ y \in R^n, \ t \geq 0, \tag{2}$$

с кусочно-непрерывной ограниченной матрицей возмущений Q, удовлетворяющей условию интегральной ограниченности [1, с. 252], т.е. неравенству $\int_t^{t+1}\|Q(\tau)\|d\tau \leq C_Q < +\infty$ при всех $t \geq 0$, где C_Q – некоторая константа, зависящая от Q. Обозначим через   матрицу Коши системы (1), а через $X(t,\tau)$ – старший показатель системы (2).

Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольный класс возмущений. Величина $\Lambda(\mathfrak{M}) := \sup\{\lambda_n(A+Q) : Q \in \mathfrak{M}\}$ называется точной верхней границей подвижности старшего показателя системы (2) с возмущениями из класса $\mathfrak{M}$.

Пусть φ – положительная функция, определенная на промежутке $[0,+\infty[$. Обозначим через $L^p[\varphi]$ и $I^p[\varphi]$, $p>1$ множества кусочно-непрерывных и интегрально ограниченных матриц Q, удовлетворяющих условиям $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} t^{-1}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\|Q\|^p\,d\tau=0$ и $\int\limits_0^\infty \varphi(\tau)\|Q\|^p\,d\tau<+\infty$ соответственно.

Ранее были вычислены точные верхние границы для возмущений, суммируемых со степенью и монотонным весом (класс $I^p[\varphi]$) и бесконечно малых в среднем со степенью и монотонным весом (класс $L^p[\varphi]$). Вопрос о поведении старшего показателя линейных систем из указанных классов в случае немонотонного веса оставался открытым. В данной работе получены достаточные условия для вычисления таких границ по алгоритму Н.А. Изобова в случае немонотонной функции φ.

Будем считать, что функция φ непрерывна и, более того, ее логарифм $\ln\varphi$ равномерно непрерывен на полуоси $t\in[0,+\infty[$. Обозначим $a(i)=\min\{\varphi(t):t\in[i,i+1]\}$ и q – показатель, сопряженный показателю p, т.е. удовлетворяющий соотношению $1/p+1/q=1$.

В докладе представлены следующие результаты

Теорема 1. Пусть функция φ удовлетворяет сделанным предположениям и такова, что при всех $t\ge 0$ справедлива оценка $\varphi(t)\ge 4^p$. Если при некотором положительном $\varepsilon_0<1$ для каждого $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_0[$ выполняется равенство $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\sum\limits_{k=1}^{m} a^{1/q-\varepsilon}(k)=0$, то при всех $p>1$ справедлива формула $\Lambda\left(L^p[\varphi]\right)=\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$, где последовательность η_m, $m>0$, определяется рекуррентным соотношением $\eta_m=\max\limits_{k<m}\left(\|X(m,k)\|a^{-1/p}(k)\eta_k\right)$, $k,m\in N$, с произвольным начальным условием $\eta_0>0$.

Теорема 2. Пусть функция φ удовлетворяет сделанным предположениям и такова, что при всех $k\in N$ справедлива оценка $v(k)=k^{-1}a^{-1}(k)\le 1/4^p$. Если при некотором положительном $\varepsilon_0<1$ для каждого $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_0[$ выполнено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{-1}v^{-1/q-\varepsilon}(k)<+\infty$, то при всех $p>1$ справедлива формула $\Lambda\left(I^p[\varphi]\right)=\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} m^{-1}\ln\eta_m$, где последовательность η_m, $m>0$, определяется *рекуррентным соотношением* $\eta_m = \max\limits_{k<m}\left(\left\|X\left(m,k\right)\right\|\nu(k)^{1/p}\eta_k\right)$, $k,m \in N$, *с произвольным начальным условием* $\eta_0 > 0$.

Литература:

1. **Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М., 1966.