Л.А. Романович

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА В ГРУППОИДАХ ЛИ

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях и связностей на этих структурах. Классический подход к такому исследованию базируется на понятии главного расслоения. С другой стороны, в работах Ш. Эресмана развит еще один подход к построению основ геометрии, который базируется на понятиях группоида Ли, алгеброида Ли и k-струи гладкого отображения. Изложение основ дифференциальной геометрии, использующее группоиды и алгеброиды Ли, приведено в монографии К. Макензи [1].

В работе [2] И. В. Белько дается развитие метода Эресмана. В частности, приводится локальное описание группоидов Ли, алгеброидов Ли и их продолжений с помощью коциклов. Особую роль в теории алгеброидов Ли и их приложений в геометрии играют инфинитезимальные связности. Целью данной работы является их локальное описание.

Пусть Ω – группоид Ли на B, $b \in B$, $G = \Omega_b^b$ – группа изотропии. Выберем атлас $\{(U_i, \sigma_i)\}$ локальных сечений для Ω_b, состоящий из покрытия $\{U_i\}$ для B и гладких отображений $\sigma_i : U_i \to \Omega_b$, для которых $\beta_b \circ \sigma_i = id_{U_i}$ для всех i. Рассмотрим следующие отображения:

$$\sigma_{ji} : U_j \times G \times U_i \to \Omega_{U_i}^{U_j} : (y, g, x) \to \sigma_j(y) g \sigma_i(x)^{-1};$$

$$g_{ij} : U_j \cap U_i \to G : x \to \sigma_j(x)^{-1} \sigma_i(x)$$

Отображения g_{ij} являются функциями перехода для главного расслоения Ω_b относительно атласа тривиализаций $\{(U_i, \varphi_i)\}$, где $\varphi_i : U_i \times G \to \Omega_b (x, g) \to \sigma_i(x) g$. Отображения g_{ij} удовлетворяют условиям коцикла. Атлас $\{(U_i, \sigma_{ij})\}$ называется атласом *локальных тривиализаций* группоида Ли Ω. Таким образом, структуру группоида Ли можно построить склеивая его из подмножеств вида $U_j \times G \times U_i$ и пользуясь последней формулой для определения умножения.

Пусть *(A, p, B)* – алгеброид Ли, соответствующий группоиду Ли Ω, $q : A \to TB$ – анкерное отображение. Выберем атлас локальных сечений $\{(U_i, \sigma_{ij})\}$ для Ω_b. Отображение $g_i : U_i \times U_i \to \Omega_{U_i}^{U_i} : (y, x) \to \sigma_i(y) \sigma_i(x)^{-1}$ – морфизм группоидов Ли. Тогда $g_{i*} : TB|_{U_i} \to A\Omega|_{U_i}$ – морфизм алгеброидов Ли, для которого $q \circ g_{i*} = id$. g_{i*} – локальное сечение связностей, индуцированное атласом локальных сечений. Если $U_{ij} \neq 0$, то $g_{j*} = g_{i*} + l_{ij}$, где $l_{ij} : TB|_{U_{ij}} \to \Omega|_{U_{ij}}$ – морфизм векторных расслоений. Пусть – атлас на $L\Omega$, порожденный $\{(U_i, \sigma_i)\}$, такой, что $\psi_{i,x} = Ad\sigma_i(x)$. Тогда определены g-значные 1-формы $\chi_{ij} = \psi_i^{-1} \circ l_{ij} : TU_{ij} \to U_{ij} \times g$, являющиеся формами связности.

Ngo van Que в работе [3] дал описание продолженного группоида Ли, ввел понятие инфинитезимальной связности. *Инфинитезимальной связностью* в группоиде Ли Ω называется связность в его алгеброиде Ли $A(\Omega)$. Далее в этой же работе обосновано следующее утверждение: если группоид Ли Ω действует на векторном расслоении (E, p, B), то всякая связность порядка k в группоиде Ли Ω

определяет расщепление точной последовательности векторных расслоений $0 \to E \to J^kE \to E \to 0$:

$$\lambda_k: E \to J^kE.$$

Для локального задания λ_k рассмотрим расслоение элементов связности $Q^k(\Omega)$. Связность локально задается отображениями $c_i : U_i \to T^k_{m,e}(G)$, где $T^k_{m,e}(G)$ – группа Ли k-струй гладких отображений из R^m в G с началом в точке $0 \in R^m$ и концом $e \in G$. Построим отображение $\lambda_k : E \to J^kE : l \to j^k_x(\pi^* l)$, где $\pi : U_i \to \Omega^{U_j}_{U_i} : y \to \sigma_{ji}(y, g^\pi_i(y), x)$ – сечение связности. Это гладкое, линейное на слоях отображение является расщеплением точной последовательности $0 \to E \to J^kE \to E \to 0$. Для локального задания λ_k выберем выделенные тривиализации:

$$\varepsilon_i : U_i \times F \to E_{U_i} : (x, l) \to \sigma_i(x) \cdot l;$$

$$\tau_i : J^k E_{U_i} \to U_i \times F^k : j^k_x s \to (x, j^k_0 \bar{s}_i);$$

$$\rho_i : Q^k(\Omega)|U_i \to U_i \times T^k_{m,e}(G) : j^k_x \pi \to (x, j^k_0 \overline{g^\pi_i}),$$

где $F = E_b$, $F^k = J^k_0(R^m, F)$, $s_i : U_i \to E_{U_i}$ – гладкое отображение $\bar{s}_i = s_i \circ \varphi_i^{-1}$, $g^\pi_i : U_i \to G$, – гладкое отображение, для которого $g^\pi_i(x) = e$.

Морфизм λ_k локально задается в следующем виде:

$$\lambda_k : U_i \times F \to U_i \times F^k : (x, v) \to (x, c_i(x)^* v).$$

Полученные результаты могут быть применены к изучению структур высших порядков на гладких многообразиях и в векторных расслоениях, которые согласованы с некоторыми дополнительными структурами, заданными на многообразиях.

Литература:

1. Mackenzie K. Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometrie. Cambridge University Press, 1987. — 327 p.
2. Белько И.В. Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии. Мн.: Белгосуниверситет, 1997. –110 с.
3. Ngo van Que. Du prolongement des espaces fibres et des struktures infinitesimales. // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. 1969.— № 17. P. 159–223.