Н. М. Рогановский, доктор педагогических наук, профессор кафедры методики преподавания математики Могилёвского государственного университета им. А. А. Кулешова, член-корреспондент Академии образования Республики Беларусь,
Е. Н. Рогановская, кандидат педагогических наук, доцент кафедры методики преподавания математики Могилёвского государственного университета им. А. А. Кулешова

ОРТОГОНАЛЬНАЯ ПРОЕКЦИЯ УГЛА

Аннотация. В данной статье на примере ортогональной проекции угла приводится один из возможных подходов к организации содержания учебного материала на факультативных занятиях и во внеклассной работе, стимулирующий учебно-исследовательскую деятельность учащихся.

Ключевые слова: фигура-оригинал, изображение фигуры, ортогональное проектирование, развёртка угла и его ортогональной проекции на плоскость, перспективно-ортогональное соответствие, модель построения содержания учебного материала в факультативном курсе.

Введение

В школьном курсе геометрии на основе ортогонального проектирования вводится понятие угла между прямой и плоскостью, формулируются теоремы о трёх перпендикулярах, рассматривается формула, связывающая площади многоугольника и его ортогональной проекции на плоскость.

Рассмотрим основные свойства ортогонального проектирования угла, их аналитическое и геометрическое обоснование. Основными являются две формулы Эйлера (1) и (2), в которых φ — данный угол, а φ_1 — его ортогональная проекция на плоскость (в виде задач эти формулы имеются в источниках [1] и [2]). С помощью формул Эйлера можно вычислять один из этих углов, зная другой, проводить сравнение величин этих углов, находить условия, при которых данный угол ортогонально проектируется в больший, меньший или равный угол. Применение формул Эйлера часто делает доступным решение стереометрических задач, которые считались сложными.

Выбор данной темы с целью стимулирования учебно-исследовательской деятельности учащихся объясняется тем, что она допускает возможность развития содержания учебного материала в направлении: традиционный школьный материал – его расширение с элементами новизны вначале в более широких рамках элементарной математики, затем в доступной для учащихся форме в рамках вузовского курса геометрии.

Отметим, что известный из школьного курса материал в данной статье не повторяется, предполагаем также, что плоскость угла φ не параллельна и не перпендикулярна плоскости проекций (тривиальные случаи, в которых выполнимость формул Эйлера устанавливается непосредственной проверкой).

В данной теме необходимо различать такие понятия, как *фигура-оригинал* (это фигура, которая существует в пространстве, мы её представляем мысленно, её можно моделировать с помощью различных материальных средств), *изображение фигуры на плоскости* (в данной статье с помощью параллельного проектирования). Если направление параллельного проектирования перпендикулярно плоскости проекций П, то проектирование называется *ортогональным*. Обратимся к основным случаям расположения угла относительно плоскости проекций.

I. Одна сторона угла лежит в плоскости проекций, другая сторона является наклонной к этой плоскости

Аналитическое обоснование свойств.

Свойство 1. Дан $\angle PAB = \varphi$, сторона AB которого принадлежит плоскости проекций П, а сторона AP — наклонена к этой плоскости под углом β (рис. 1); угол PAB ортогонально проектируется на плоскость проекций в $\angle P_1AB = \varphi_1$. Для углов φ, φ_1 и β справедлива *первая формула Эйлера*:

$$\cos\varphi = \cos\varphi_1 \cdot \cos\beta. \qquad (1)$$

Свойство 2 В условиях предыдущего свойства: острый угол проектируется в острый угол, прямой угол — в прямой угол, тупой угол — в тупой угол.

Свойство 3 (сравнение углов φ и φ_1). В условиях предыдущего свойства: острый угол проектируется в меньший острый угол, прямой угол — в равный угол, тупой угол — в больший тупой угол.

Свойство 4 (обратное свойству 2). Если ортогональная проекция угла φ (одна сторона которого принадлежит плоскости проекций, а другая — является наклонной к этой плоскости) есть острый угол (прямой угол, тупой угол), то угол φ также является острым углом (прямым углом, тупым углом).

Доказательства.

1. *1-й случай* (рис. 1): $\varphi < 90°$.

1) Так как луч AP ортогонально проектируется на плоскость П в луч AP_1, то угол PAP_1 — угол наклона прямой AP к плоскости П. По условию $\angle PAP_1 = \beta$.

2) $(PP_1 \perp \text{П}$ и $AP_1 \subset \text{П}) \Rightarrow (PP_1 \perp AP$ и ΔAPP_1 — прямоугольный).

3) Проведём перпендикуляр P_1P_2 к стороне AB (ΔAP_1P_2 — прямоугольный) и точку P_2 соединим отрезком с точкой P.

4) Получаем, что прямая AB, лежащая в плоскости проекций П, перпендикулярна к ортогональной проекции P_1P_2 наклонной PP_2. По теореме о трёх перпендикулярах прямая AB перпендикулярна к наклонной PP_2.

5) Значит, $\Delta\, APP_2$ — прямоугольный.

6) Из прямоугольных треугольников APP_2, AP_1P_2 и APP_1 выразив косинусы интересующих нас углов, придём к формуле (1):

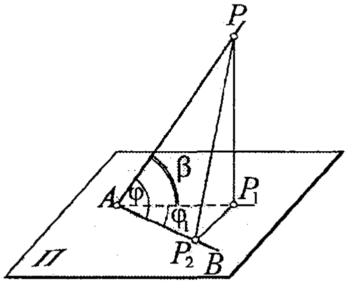

Рисунок 1

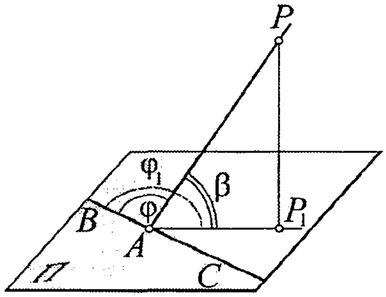

Рисунок 2

$$\left(\cos\varphi = \frac{AP_2}{AP},\ \cos\varphi_1 = \frac{AP_2}{AP_1},\ \cos\beta = \frac{AP_1}{AP}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\varphi_1 \cdot \cos\beta = \frac{AP_2}{AP_1}\cdot\frac{AP_1}{AP} = \frac{AP_2}{AP} = \cos\varphi.$$

2-й случай: $\varphi = 90°$. В этом случае, если $AB \perp AP$, то по теореме о трёх перпендикулярах $AB \perp AP_1$. Если $\varphi = \varphi_1 = 90°$, то формула (1) выполняется очевидным образом.

3-й случай: $\varphi > 90°$ (рис. 2). В этом случае $\angle PAC = 180° - \varphi$, $\angle P_1AC = 180° - \varphi_1$ (по свойству смежных углов). Так как угол PAC острый, то на основании первого случая $\cos(180° - \varphi) = \cos(180° - \varphi_1)\cdot\cos\beta$. Отсюда $\cos\varphi = \cos\varphi_1\cdot\cos\beta$.

2. Так как $\cos\beta > 0$, то из формулы (1) следует, что $\cos\varphi$ и $\cos\varphi_1$ одновременно либо оба положительные, либо оба отрицательные. Поэтому острый угол проектируется в острый угол, тупой угол — в тупой угол. Если $\varphi = 90°$, то, учитывая, что $\cos\varphi = 0$ и $\cos\beta \neq 0$, получим $\cos\varphi_1 = 0$. В этом случае $\varphi_1 = 90°$.

3. Из формулы Эйлера имеем:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \cos\beta < 1.$$

Если углы φ и φ_1 острые, то их косинусы положительные. Поэтому из записанного неравенства следует, что $\cos\varphi < \cos\varphi_1$. Отсюда $\varphi > \varphi_1$. Если $\varphi = 90°$, то, как выше установлено, $\varphi_1 = 90°$, и поэтому прямой угол проектируется в равный угол. Если углы φ и φ_1 тупые, то их косинусы отрицательные. Поэтому из неравенства $\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} < 1$ следует, что $\cos\varphi > \cos\varphi_1$. Отсюда $\varphi < \varphi_1$, и, значит, тупой угол проектируется в больший тупой угол.

4. Доказывается методом от противного.

Развёртка угла и его ортогональной проекции: геометрическое обоснование свойства 3.

Повернём вокруг прямой AB полуплоскость P_1AB (рис. 1) так, чтобы она стала дополнительной к полуплоскости PAB. Будем считать, что полученная плоскость располагается перпендикулярно лучу зрения наблюдателя (является фронтальной), а углы PAB и P_1AB, расположенные в ней, изображаются в натуральную величину, без искажения. При повороте отрезки PP_2 и P_1P_2 сохраняют перпендикулярность к прямой AB. Полученный рисунок (рис. 3) назовём *развёрткой* угла и его ортогональной проекции. С помощью развёртки возможно геометрическое обоснование свойств ортогонального проектирования.

Так как отрезок P_1P_2 является ортогональной проекцией отрезка PP_2, то $P_1P_2 < PP_2$. Пусть P_3 симметрична точке P_1 относительно прямой AB. Тогда $P_2P_3 < PP_2$ и луч AP_3 проходит внутри острого угла PAB (рис. 3). Поэтому $\angle P_1AB = \angle BAP_3 < \angle PAB$, т. е. $\varphi_1 < \varphi$. Для тупого угла PAB луч AP_3 проходит внутри угла PAP_2, смежного с углом PAB (рис. 4). Поэтому $\angle BAP_1 = \angle BAP_3 > \angle PAB$, т. е. $\varphi_1 > \varphi$. Обоснование свойства 3 для прямого угла с

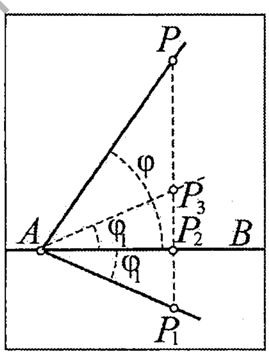

Рисунок 3

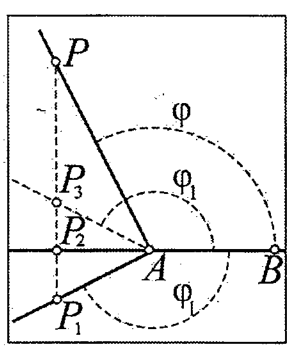

Рисунок 4

помощью развёртки также возможно (проведите его самостоятельно), другое его геометрическое обоснование даёт известное из школьных учебников доказательство теоремы о трёх перпендикулярах.

II. Стороны угла пересекают плоскость проекций

Аналитическое обоснование свойств.

Свойство 5. Ортогональная проекция угла, стороны которого пересекают плоскость проекций П (рис. 5), находится по формуле (*вторая формула Эйлера*)

$$\cos \varphi 1 = \frac{\cos\varphi - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}, \qquad (2)$$

где $\angle ABC = \varphi$ — данный угол, $\angle AB_1C = \varphi_1$ — его ортогональная проекция на плоскость П, $BB_1 \perp$ П, $\angle ABB_1 = \beta$, $\angle CBB_1 = \gamma$.

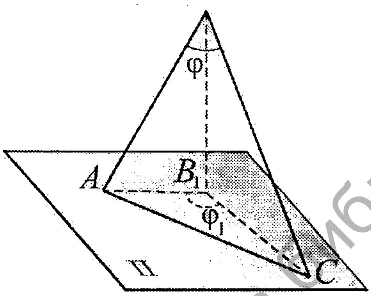

Рисунок 5

Свойство 6. Если стороны угла пересекают плоскость проекций (рис. 5), то тупой и прямой углы ортогонально проектируются в тупой угол. В обоих случаях $\varphi < \varphi_1$. Острый угол может ортогонально проектироваться в острый угол, в прямой угол и в тупой угол.

Свойство 7. Если стороны угла пересекают плоскость проекций П (рис. 5) и выполняется условие:

а) $\cos\varphi < \dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{1-\sin\beta\sin\gamma}$ (3), то $\varphi < \varphi 1$; в этом случае φ может быть тупым, прямым или острым углом;

б) $\cos\varphi = \dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{1-\sin\beta\sin\gamma}$ (4), то $\varphi = \varphi_1$; в этом случае φ может быть только острым углом;

в) $\cos\varphi > \dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{1-\sin\beta\sin\gamma}$ (5), то $\varphi > \varphi_1$; этом случае φ может быть только острым углом.

Замечания. 1 (к ортогональному проектированию острого угла). В правильной шестиугольной пирамиде острый плоский угол при вершине пирамиды (он меньше 60°), ортогонально проектируется на плоскость основания в острый угол, равный 60°; в правильной четырёхугольной пирамиде (он меньше 90°) — в прямой угол, в правильном тетраэдре (он равен 60°) — в тупой угол, равный 120°. В этих примерах $\varphi < \varphi_1$.

2. Свойство 7, *б* подтверждено ниже при решении задачи 6, *г*, свойство 7, *в* — при решении задачи 6, *д*.

3. Для плоских углов φ, β и γ, образующих трёхгранный угол, накладывается естественное ограничение: необходимо, чтобы сумма любых двух углов была больше третьего угла.

Доказательства.

5. Выразим дважды по теореме косинусов отрезок AC из треугольников ABC и AB_1C и приравняем полученные выражения:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\varphi,$$
$$AC^2 = AB_1^2 + CB_1^2 - 2AB_1 \cdot CB_1 \cdot \cos\varphi_1;$$
$$AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\varphi = AB_1^2 + CB_1^2 - 2AB_1 \cdot CB_1 \cdot \cos\varphi_1,$$
$$(AB^2 - AB_1^2) + (BC^2 - CB_1^2) = 2AB \cdot BC \cdot \cos\varphi - 2AB_1 \cdot CB_1 \cdot \cos\varphi_1,$$
$$2BB_1^2 = 2AB \cdot BC \cdot \cos\varphi - 2AB_1 \cdot CB_1 \cdot \cos\varphi_1,$$
$$\frac{BB_1}{AB} \cdot \frac{BB_1}{BC} = \cos\varphi - \frac{AB_1}{AB} \cdot \frac{CB_1}{BC}\cos\varphi_1,$$
$$\cos\beta \cdot \cos\gamma = \cos\varphi - \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos\varphi_1.$$

Отсюда следует равенство **(2)**.

6. Если $\varphi \geq 90°$, то дробь, стоящая в правой части равенства **(2)**, отрицательная.

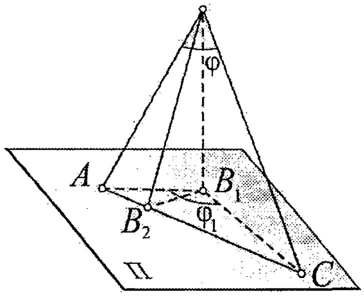

Рисунок 6

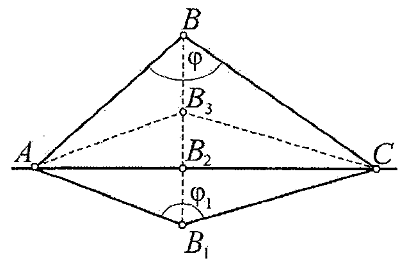

Рисунок 7

Поэтому $\cos\varphi_1 < 0$ и φ_1 — тупой угол. Кроме того, если $\varphi = 90°$, то $\varphi < \varphi_1$.

Для сравнения углов φ и φ_1 для тупого угла φ составим разность:

$$\cos\varphi - \cos\varphi_1 = \cos\varphi - \frac{\cos\varphi - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} =$$

$$= \frac{\cos\varphi\,(\sin\beta\cdot\sin\gamma - 1) + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}. \qquad (6)$$

Так как $\cos\varphi < 0$, $0 < \sin\beta\cdot\sin\gamma < 1$, $\cos\beta\cdot\cos\gamma > 0$ и $\sin\beta\cdot\sin\gamma > 0$, то из равенств (6) следует, что $\cos\varphi > \cos\varphi_1$, $\varphi < \varphi_1$.

При сравнении углов φ и φ_1 для острого угла φ знак разности $\cos\varphi - \cos\varphi_1$ однозначно не определяется (см. равенства 6). Этот вывод подтверждается также замечанием 1. Поэтому данный случай требует более детального исследования.

7. Составим разность, оставляя знак нестрогого неравенства пока в неопределённой позиции:

$$\cos\varphi - \cos\varphi_1 = \cos\varphi - \frac{\cos\varphi - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} =$$

$$= \frac{\cos\varphi\,(\sin\beta\cdot\sin\gamma - 1) + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} \vee 0.$$

Перейдём к равносильным неравенствам:

$$\cos\varphi\,(\sin\beta\cdot\sin\gamma - 1) \vee -\cos\beta\cdot\cos\gamma,$$

$$\cos\varphi \wedge \frac{\cos\beta\cos\gamma}{1-\sin\beta\sin\gamma}.$$

а) Если знак «$\wedge$» есть знак «<», т. е. выполняется неравенство (3), то $\cos\varphi - \cos\varphi_1 > 0$, $\cos\varphi > \cos\varphi_1$ и $\varphi < \varphi_1$. В этом случае φ может быть тупым, прямым или острым углом.

б) Если знак «$\wedge$» есть знак «=», т. е. выполняется равенство (4), то $\cos\varphi - \cos\varphi_1 = 0$, $\cos\varphi = \cos\varphi_1$ и $\varphi = \varphi_1$. В этом случае φ может быть только острым углом (сравните знаки обеих частей равенства 4).

в) Если знак «$\wedge$» есть знак «>», т. е. выполняется неравенство (5), то $\cos\varphi - \cos\varphi_1 < 0$, $\cos\varphi < \cos\varphi_1$ и $\varphi > \varphi_1$. В этом случае φ может быть только острым углом (как и выше, сравните знаки обеих частей неравенства (5)).

Геометрическое обоснование свойств 6 и 7 с помощью развёртки.

В треугольнике ABC (рис. 6) проведём высоту BB_2, по теореме о трёх перпендикулярах B_1B_2 — высота треугольника AB_1C. Повернём вокруг прямой AC треугольник AB_1C так, чтобы он оказался в одной плоскости с треугольником ABC и по разные стороны от прямой AC. При этом высоты треугольников останутся их высотами и точки B, B_2 и B_1 будут лежать на одной прямой, перпендикулярной к прямой AC (рис. 7). Рассмотрим также треугольник AB_3C, симметричный треугольнику AB_1C относительно прямой AC. Так как отрезок AB_1 — ортогональная проекция отрезка AB, то $AB_1 < AB$, поэтому $AB_3 < AB$ и точка B_3 будет внутренней точкой высоты BB_2. Так как углы AB_3B2 и CB_3B_2 — внешние углы соответственно треугольников ABB_3 и CBB_3, то $\angle AB_3B_2 > \angle ABB_2$ и $\angle CB_3B_2 > \angle CBB_2$. Поэтому $\angle AB_3C > \angle ABC$, $\varphi < \varphi_1$. Этот вывод справедлив для тупого и прямого угла φ (рис. 7), а также для острого угла φ, если прямая BB_1 пересе-

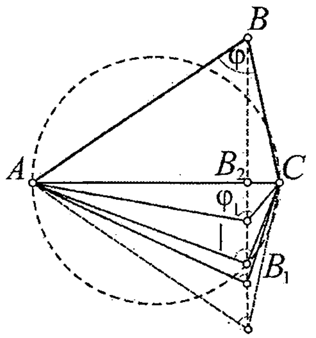

Рисунок 8

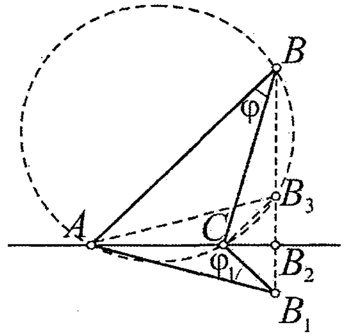

Рисунок 9

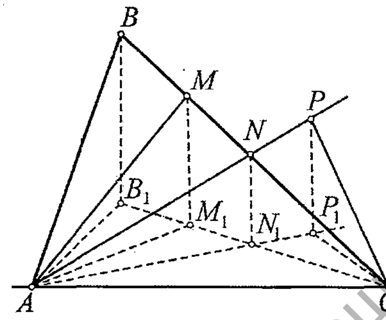

Рисунок 10

кает отрезок AC (рис. 8). На этом рисунке показано, что острый угол может проектироваться в больший острый угол, в прямой угол, в тупой угол. В этом случае равенство углов φ и φ_1 невозможно. Их равенство возможно, если прямая BB_1 пересекает продолжение отрезка AC (рис. 9). В этом случае $\angle AB_1C = \angle AB_3C = \angle ABC$, т. е. $\varphi = \varphi_1$.

III. От развёртки к перспективно-ортогональному соответствию

Обратим внимание, что развёртка угла и его ортогональной проекции задаёт определённое соответствие между точками плоскости, в которой они расположены. Это соответствие сохраняет параллельность прямых, отношение параллельных отрезков, т. е. является аффинным преобразованием плоскости, имеет прямую, все точки которой остаются в этом преобразовании неподвижными. Кроме того, прямые, соединяющие соответственные точки, перпендикулярны к этой прямой. Получаем *перспективно-ортогональное соответствие*, прямая с неподвижными точками называется *осью* перспективно-ортогонального соответствия. Перспективно-ортогональное соответствие однозначно задаётся парой соответственных треугольников. Как видим, развётка угла и его ортогональной проекции задаёт перспективно-ортогональное соответствие. Имея пару соответственных углов на развёртке, можно выбирать различные углы и строить ортогональные проекции, пользуясь перспективно-ортогональным соответствием. При этом необходимо учитывать, что эти углы на оригинале должны лежать в одной плоскости с исходными углами, задающими соответствие (рис. 10). Если углы φ и φ_1 заданы без искажения их величины, то величины других углов, строящихся с помощью перспективно-ортогонального соответствия, будут также получаться без искажения. На рисунке 11 даны углы ABC, AMC, ANC и APC и показано построение их ортогональных проекций с помощью перспективно-ортогонального соответствия (можно рассмотреть также углы, смежные и вертикальные к названным).

IV. Задачи

Задачи на применение формулы (1)

Задача 1. Если наклонная AP к плоскости проекций П (рис. 12) образует равные углы с лучами AB и AC, лежащими в плоскости проекций, то ортогональная проекция AP является биссектрисой угла BAC (или продолжением этой биссектрисы).

Доказательство. Пусть $\angle PAB = \angle PAC = \varphi$, AP_1 – ортогональная проекция наклонной AP на плоскость П, $\angle P_1AB = \varphi_1$, $\angle P_1AC = \varphi_2$. Требуется доказать, что $\varphi_1 = \varphi_2$. На основании формулы Эйлера: $\cos\varphi_1 = \dfrac{\cos\angle PAB}{\cos\beta} = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\beta}$ и

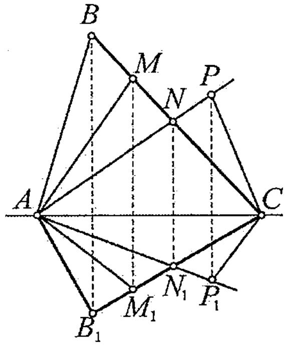

Рисунок 11

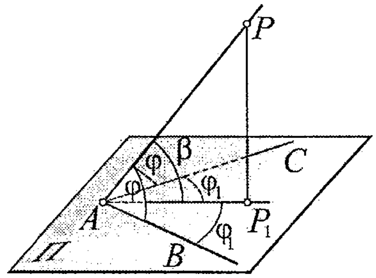

Рисунок 12

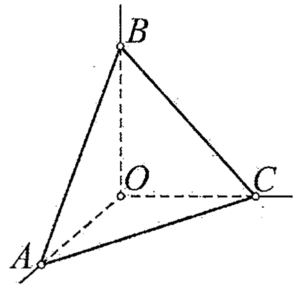

Рисунок 13

$\cos\ \varphi_2 = \dfrac{\cos\angle PAC}{\cos\beta} = \dfrac{\cos\varphi}{\cos\beta}$. Так как $\angle PAB = \angle PAC$, то косинусы этих углов одного знака. Отсюда получаем, что $\varphi_1 = \varphi_2$.

Задача 2. Если ортогональная проекция наклонной AP к плоскости проекций П (рис. 12) является биссектрисой угла BAC, лежащего в плоскости проекций, то наклонная AP образует равные углы с лучами AB и AC.

Доказательство. Пусть AP_1 — ортогональная проекция наклонной AP на плоскость П, $\angle P_1AB = \angle P_1AC = \varphi_1$. Требуется доказать, что $\angle PAB = \angle PAC$. На основании формулы Эйлера (1):

$$\cos\angle PAB = \cos\angle P_1AB \cdot \cos\beta = \cos\varphi_1 \cdot \cos\beta;$$
$$\cos\angle PAC = \cos\angle P_1AC \cdot \cos\beta = \cos\varphi_1 \cdot \cos\beta.$$

Так как косинусы углов P_1AB и P_1AC одного знака (в силу равенства этих углов), то косинусы углов PAB и PAC также одного знака. Отсюда получаем, что $\angle PAB = \angle PAC$.

Задача 3. Плоские углы трёхгранного угла прямые. Докажите, что при пересечении плоских углов трёхгранного угла плоскостью всегда образуется остроугольный треугольник.

Доказательство. Применим формулу Эйлера (1):

$$\cos\angle BAC = \cos\angle OAC \cdot \cos\angle BAO \text{ (рис. 13).}$$

Угол OAC — острый угол прямоугольного треугольника AOC, поэтому $\cos\angle OAC > 0$. Угол BAO также острый как угол между наклонной и ортогональной проекцией её на плоскость, поэтому $\cos\angle BAO > 0$. Отсюда $\cos\angle BAC > 0$. Следовательно, угол BAC — острый. Аналогично устанавливается, что два других угла треугольника ABC также острые.

Задача 4. Основанием наклонного параллелепипеда служит квадрат со стороной a (рис. 14). Одно из боковых рёбер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 60° и равно l. Найдите высоту параллелепипеда.

Решение. Сразу находим площадь основания: $S = a^2$. Для нахождения высоты параллелепипеда воспользуемся тем, что боковое ребро образует равные углы с прилежащими сторонами основания. На основании задачи 1 боковое ребро ортогонально проектируется на биссектрису угла, образованного этими сторонами основания. Так как основанием является квадрат, то биссектрисой будет диагональ квадрата. На основании формулы Эйлера (1): $\cos\angle A_1AB = \cos\angle CAB \cdot \cos\angle A_1AA_2$, или $\cos 60° = \cos 45° \cdot \cos\beta$; отсюда

$\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta = 45°$. Тогда треугольник

A_1AA_2 равнобедренный и по теореме Пифагора находим, что

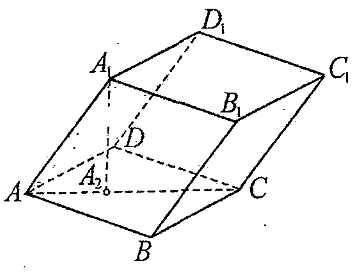

Рисунок 14

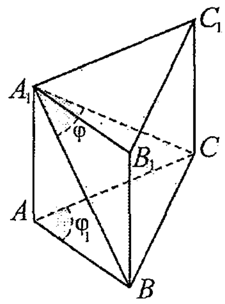

Рисунок 15

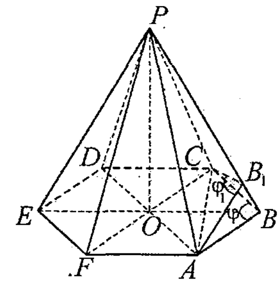

Рисунок 16

$$H = \frac{l\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 5. Все грани параллелепипеда — ромбы со стороной a и острым углом α (рис. 14). Найдите объём параллелепипеда.

Р е ш е н и е. Как и при решении предыдущей задачи, ребро AA_1 ортогонально проектируется на биссектрису угла BAD, которая является диагональю ромба $ABCD$. Применим формулу (1):

$$\cos\angle A_1AB = \cos\angle CAB \cdot \cos\angle A_1AA_2,$$

или $\cos\alpha = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta$;

отсюда $\cos\beta = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Тогда $AA_2 = AA_1 \cos\beta = \dfrac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

По теореме Пифагора из треугольника AA_1A_2 находим

$$A_1A_2 = H = \sqrt{a^2 - \frac{a^2\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\right)} =$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{-2\sin\left(-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{3\alpha}{4}\cdot 2\cos\frac{3\alpha}{4}\left(\cos\frac{-\alpha}{4}\right)} =$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Отсюда $V = SH = a^2\sin\alpha \times$

$$\times \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}} = \frac{a^3\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Отметим, что при заданном ограничении на параметр α ($0° < \alpha < 90°$ — по условию, $0° < \frac{\alpha}{2} < 45°$, $0° < \frac{3\alpha}{2} < 135°$) значение объёма существует. В частности, при $\alpha = 60°$ (что часто встречается в задачах) $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Задачи на применение формулы (2)

Задача 6. Сравните углы φ и φ_1, если: а) $\varphi = 95°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$; б) $\varphi = 90°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$; в) $\varphi = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$; г) $\varphi = 60°$, $\beta = 60°$, $\cos\gamma = \frac{1}{7}$; д) $\varphi = 22°$, $\beta = 60°$, $\cos\gamma = \frac{1}{7}$; е) самостоятельно подберите углы φ, β и γ, которые приводили бы к различным соотношениям между углами φ и φ_1.

Р е ш е н и е. Сравнивать можно с помощью непосредственных вычислений по формуле (2) или с помощью условий, полученных в свойстве 7.

а) Имеем: $\cos\varphi_1 = \dfrac{\cos 95° - \cos 60° \cos 45°}{\sin 60° \sin 45°} \approx$

$\approx \dfrac{-0{,}0872 - 0{,}5 \cdot 0{,}7071}{0{,}8660 \cdot 0{,}7071} \approx -0{,}7198$,

$\varphi_1 \approx 136{,}04°$. О т в е т: $\varphi < \varphi_1$.

б) $\cos\varphi_1 = \dfrac{\cos 90° - \cos 60° \cos 45°}{\sin 60° \sin 45°} < 0$,

$\varphi_1 > 90°$. О т в е т: $\varphi < \varphi_1$.

в) $\cos\varphi_1 = \dfrac{\cos 60° - \cos 60° \cos 45°}{\sin 60° \sin 45°} \approx$

$\approx 0{,}2391$, $\varphi_1 \approx 76{,}16°$. О т в е т: $\varphi < \varphi_1$.

г) $\cos\varphi_1 = \dfrac{\cos 60° - \cos 60° \cdot \frac{1}{7}}{\sin 60° \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7}} = \dfrac{1}{2}$,

$\varphi_1 = 60°$. О т в е т: $\varphi = \varphi_1$;

д) $\cos\varphi_1 = \dfrac{\cos 22° - \cos 60° \cdot \frac{1}{7}}{\sin 60° \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7}} \approx 0{,}998382$,

$\varphi_1 \approx 3{,}3°$. О т в е т: $\varphi > \varphi_1$.

Ответы в задачах 6, *а—д* подтвердите с помощью соотношений, полученных в свойстве 7.

Задача 7. В правильной треугольной призме (рис. 15) известен косинус угла φ между диагоналями A_1B и A_1C боковых граней: $\cos\varphi = \dfrac{3}{4}$. Докажите, что боковые грани призмы — квадраты.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдём углы β и γ между диагоналями A_1B и A_1C боковых граней и боковым ребром AA_1 ($\beta = \gamma$). Воспользуемся равенством 2: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{3}{4} - \cos^2\beta}{\sin^2\beta}$,

$\sin^2\beta = \dfrac{3}{2} - 2\cos^2\beta$. Отсюда $\cos^2\beta = \dfrac{1}{2}$,

$\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому $\beta = \gamma = 45°$. Приходим к выводу, что диагональ A_1B боковой грани с боковым ребром AA_1 и стороной основания AB образует углы в 45°. Отсюда сторона основания равна боковому ребру и, значит, боковыми гранями призмы являются квадраты.

Задача 8. Плоский угол при вершине P правильной шестиугольной пирамиды *PABCDEF* равен 30° (рис. 16). Найдите двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть $\angle AB_1C = \varphi_1$ — искомый линейный угол двугранного угла при ребре PB, $\angle ABC = \varphi = 120°$ — угол, который ортогонально проектируется в угол AB_1C, BB_1 — перпендикуляр к плоскости проекций, $\angle ABB_1 = \angle CBB_1 =$

$= \beta = \gamma = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$. На основании формулы (2) можно записать: $\cos\varphi_1 =$

$= \dfrac{\cos 120° - \cos^2 75°}{\sin^2 75°} = 6\sqrt{3} - 11 \approx -0{,}6077$

(в вычислениях воспользовались формулой косинуса суммы). Видим, что φ_1 — тупой угол, $\varphi_1 = \arccos(6\sqrt{3} - 11) \approx 127{,}42°$.

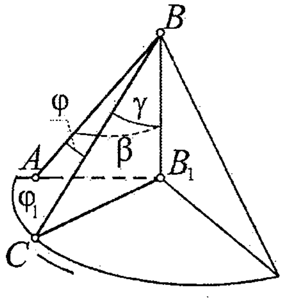

Рисунок 17

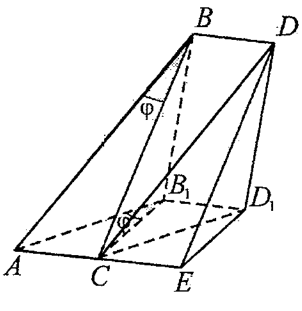

Рисунок 18

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9. а) Докажите, что формула (1) является частным случаем формулы (2). б) Докажите, что формула (2) справедлива для угла, продолжения обеих сторон которого пересекают плоскость проекций.

Задача 10. а) Сравните углы φ и φ_1 в случае, если продолжения сторон угла φ пересекают плоскость проекций. б) Убедитесь, что если $\varphi = \varphi_1$ для острых углов β и γ, то это равенство остаётся справедливым и в случае, когда продолжения угла φ пересекают плоскость проекций.

Задача 11. Пусть обе стороны угла φ пересекают плоскость проекций, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$. Положение угла β зафиксируем, а угол γ будем вращать вокруг прямой BB_1 (рис. 17). а) В каких границах изменяются значения угла φ? б) Установите, в каких границах изменяется угол φ_1. в) При каком значении φ выполняется равенство $\varphi = \varphi_1$? г) Установите промежуток, в котором: 1) $\varphi < \varphi_1$; 2) $\varphi > \varphi_1$. д) Постройте графики функций $y = \cos\varphi$ и $y = \cos\varphi_1$ и с их помощью подтвердите полученные выводы.

Задача 12. В тетраэдре AB_1CB отрезок $BB_1 \perp AB_1C$, $BB_1 = a$, $\angle ABC = \angle AB_1C = \varphi$, $\angle ABB_1 = \beta$, $\angle CBB_1 = = \gamma$ (рис. 18). Параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AC}$ данный тетраэдр переведён в тетраэдр CD_1ED. а) Найдите на этом рисунке углы, равные φ. б) Найдите две призмы. Какие это призмы: прямые или наклонные? в) Установите, что эти призмы имеют равные объёмы. г) Рассмотрите многогранник AB_1D_1EBD, ограниченный гранями AB_1D_1E, ABB_1, EDD_1, $ABDE$, B_1BDD_1. Из каких трёх пирамид он состоит? Найдите высоты этих пирамид. д) Найдите объём многогранника AB_1D_1EBD (возможны различные способы). е) Составьте и решите аналогичные задачи для случая, если параллельный перенос тетраэдра AB_1CB совершается: 1) на вектор $\overrightarrow{B_1B}$; 2) на вектор $\overrightarrow{AB_1}$.

Заключение

Одна из возможных *моделей построения содержания факультативного курса по математике*, конкретизированная выше на примере отдельной темы, представляется нам следующим образом. Содержание факультативного курса строится в виде комплекса сравнительно небольших учебно-исследовательских тем. Обеспечиваются достаточно частая смена содержательных в математическом отношении тем, их разнообразие. Как известно, эти факторы положительно действуют на поддержание интереса учащихся. В каждой теме содержание учебного материала развивается в направлении: от известного школьного учебного материала, имеющегося в учебниках, к его углублению в контексте элементарной математики с последующим небольшим выходом (в элементарной форме) к некоторым понятиям и методам вузовской математики. В целом такое развитие содержания обеспечивает углубление традиционного школьного материала. Прагматический характер содержания выражается в том, что основной акцент делается на практику решения задач. Содержание учебного материала, обладая элементами новизны, допускает организацию полноценной учебно-исследовательской деятельности, самостоятельное, творческое решение части задач, применение новых для школьного курса математики способов и приёмов решения задач.

Список использованной литературы

1. *Рогановский, Н. М.* Геометрия: 11 кл. : эксперим. учебник для шк. и кл. с углубленным изучением математики. Рекомендовано Министерством образования Республики Беларусь / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Народная асвета, 2004. — 271 с.

2. *Рогановский, Н. М.* Геометрия. 10 кл.: многообразие идей и методов : пособие для учащихся по факультативному курсу. Рекомендовано Национальным институтом образования Республики Беларусь / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская, О. И. Тавгень. — Минск : Аверсэв, 2011. — 207 с.