УДК 511.36

СОВМЕСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НУЛЯ ЗНАЧЕНИЯМИ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ R^4

В. Н. Борбат
(Учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова»,
кафедра математики и информатики)

Совершен переход от степенной функции к произвольной монотонно убывающей функции со сходящимся рядом для совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов в пространстве R^4.

В [1] В.Г. Спринджуком была доказана гипотеза К. Малера, которая для действительных чисел состоит в следующем. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ – многочлен с целыми коэффициентами, H – его высота. Тогда по теореме Спринджука неравенство

$$|P(x)| < H(P)^{-n-\varepsilon}$$

имеет для любого $\varepsilon > 0$ и почти всех $x \in R$ (в смысле меры Лебега) лишь конечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$.

Пусть $\Psi(H)$ монотонно убывающая функция при $H > 0$, такая что, ряд $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi(H)$ – сходится. А. Бейкер в [2] получил усиление теоремы Спринджука.

Теорема 1. Пусть $B(\varepsilon)$ – множество действительных чисел x, для которых неравенство

$$|P(x)| < \Psi^n(H)$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$. Тогда $\mu B(\varepsilon) = 0$, где $\mu B(\varepsilon)$ мера Лебега множества $B(\varepsilon)$.

Наряду с решением одномерных задач В.Г. Спринджуком рассматривались задачи о совместной аппроксимации нуля значениями целочисленных многочленов. В [1] он поставил основную проблему этого направления, решил ее частные случаи и указал некоторые применения. Гипотеза Спринджука состояла в следующем. Пусть $v_n(\overline{\omega})$ точная верхняя грань $v > 0$, для которых система неравенств

$$\max(|P(\omega_1)|, |P(\omega_2)|, \dots, |P(\omega_k)|) < H^{-v}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$. Верно ли, что для почти всех $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k)$ (в смысле меры Лебега) $v_n(\overline{\omega}) = \frac{n+1}{k} - 1$?

Доказательство гипотезы В.Г. Спринджука было проведено в более общей формулировке В.И. Берником [3]. Пусть $w_n(\overline{\omega})$ точная верхняя грань $w > 0$, для которых неравенство

$$\prod_{i=1}^{k}|P(\omega_i)| < H^{-w}$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$. Тогда для почти всех $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k)$ (в смысле меры Лебега) $w_n(\overline{\omega}) = n - k + 1$.

В [4] и [5] доказаны теоремы, из которых следуют аналоги теоремы 1 для пространств R^2 и R^3.

Теорема 2. Система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-w_1}\Psi^{v_1}(H) \\ |P(\omega_2)| < H^{-w_2}\Psi^{v_2}(H) \end{cases},$$

где $w_1 + w_2 = n-2$, $v_1 + v_2 = 1$, имеет для почти всех $(\omega_1, \omega_2) \in R^2$ лишь конечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$.

Теорема 3. Система неравенств

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < H^{-w_1}\Psi^{v_1}(H) \\ |P(\omega_2)| < H^{-w_2}\Psi^{v_2}(H) \\ |P(\omega_3)| < H^{-w_3}\Psi^{v_3}(H) \end{cases}.$$

где $w_1 + w_2 + w_3 = n-3$, $v_1 + v_2 + v_3 = 1$, имеет для почти всех $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in R^3$ лишь конечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$.

В настоящей работе доказывается обобщение теоремы 1 на пространство R^4.

Теорема 4. Пусть $L(\varepsilon)$ – множество $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in R^4$, для которых неравенство

$$\prod_{i=1}^{4} |P(\omega_i)| < \Psi^{n-3}(H)$$

имеет бесконечное число решений в многочленах $P(x) \in Z[x]$. Тогда $\mu L(\varepsilon) = 0$, где $\mu L(\varepsilon)$ мера Лебега множества $L(\varepsilon)$.

Теорема 4 позволяет построить регулярную систему векторов с действительными алгебраическими координатами и на основании этого получать оценки снизу для размерности Хаусдорфа. Метод, которым проводится доказательство, основан на методе существенных и несущественных областей В.Г. Спринджука [1]. Центральным моментом доказательства является новая арифметико-топологическая классификация областей, в которых целочисленные многочлены и их производные принимают значения, не превосходящие по модулю некоторой величины, зависящей от высоты многочлена.

Литература

1. Спринджук, В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S чисел / В. Г. Спринджук // Известия АН СССР. Сер. Матем. – 1965. – Т. 29, № 2. – С. 379–436.
2. Baker, A. On a theorem Sprindzuk / A. Baker // Proc. Royal Soc. 1966. – Vol. 292. – P. 92–104.
3. Берник, В. И. Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Известия АН СССР. Сер. Матем. – 1980. – Т. 44, № 1. – С. 24–45.
4. Борбат, В. Н. Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных полиномов / В. И. Берник, В. Н. Борбат // Труды математического института им. В. А. Стеклова. Аналитическая теория чисел и ее приложения : сборник статей к 60-летию со дня рожд. проф. А. А. Карацубы. – Москва : МАИК «Наука», 1997. – С. 58–73.
5. Борбат, В. Н. О точном порядке совместной аппроксимации нуля в R3 и гипотеза В. Г. Спринджука / В. Н. Борбат, С. Г. Чарный // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага універсітэта імя А. А. Куляшова, 2003. – № 1. – С. 111–124.