

И. Л. Тимофеева, И. Е. Сергеева,
г. Москва, Россия

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ НОРМ КОНСТРУИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Приведен расширенный список логических норм конструирования математических определений, указан характер каждой из этих норм, даны поясняющие комментарии, приведены примеры нарушения этих норм.

Ключевые слова: математическое определение, конструирование определений, математический язык, логическая норма, логическая структура определения, обязывающая норма, запрещающая норма, разрешающая норма, рекомендующая норма.

Одна из наиболее важных логических компетенций будущего учителя математики формулируется так: “Способен пользоваться математическим языком в соответствии с логическими нормами этого языка” [4, с. 16]. Эту способность следует формировать и у учащихся общеобразовательных школ при обучении математике. Логические нормы математического языка должен соблюдать как учитель математики, так и школьник, изучающий математику.

Логические нормы математического языка включают логические нормы конструирования математических определений (ЛНКО). Будем рассматривать определения через род и видовое отличие, поскольку именно такие определения наиболее часто встречаются в математике и в школьном курсе математики. Уточним и расширим список ЛНКО, который мы приводили в работе [3, с. 88]. Условно разделим ЛНКО по характеру предписания на обязывающие, запрещающие, разрешающие и рекомендуемые нормы. Заметим, что некоторые нормы имеют комбинированный характер. Под ЛНКО понимаем *синтаксические* нормы, т. е. связанные с общими чертами логической структуры определений. Для наглядного представления логической структуры определения будем использовать символическую запись. Для простоты символической записи мы ограничимся случаем одной переменной.

Прежде чем перейти к ЛНКО, сформулируем очень важную *лингвистическую* норму конструирования определений: в определении: а) должно присутствовать слово “называют”/”называется” или аналогичные по смыслу слова (“будем говорить” и т. п.); б) не должно вместо слова “называется” использоваться слово “является” (а — *обязывающая*, б — *запрещающая*).

Нарушение этой нормы заключается в использовании в формулировке слова “является” вместо слова “называется”, что меняет статус языковой конструкции с определения на теорему.

Комментарии. Слово “называется” является специфическим для определения, отражает его суть и однозначно указывает его статус. Слово “является” типично для теоремы. Иногда в определениях используется слово “это” вместо слова “называется”. *Рекомендуется* “это” заменить словом “называется”, поскольку именно оно отражает сущность определения как договоренности использовать новый термин (название) для определяемого понятия [1, с. 76].

Перечислим ЛНКО, группируя их в пары по объекту предписания, указывая их характер, по необходимости сопровождая их поясняющими комментариями и примерами их нарушения.

ЛНКО-1а. Определение должно состоять из двух частей — определяемой и определяющей. В *определяемой* части должен присутствовать новый

термин. *Определяющая* часть должна представлять собой условие (*определяющее условие*), которому должны удовлетворять объекты, относимые к определяемому понятию, и только они. В определяющей части следует использовать только понятия, введенные ранее (*обязывающая норма*).

Нарушение этой нормы может заключаться в потере определяемой части, а именно, учащиеся нередко начинают определение так: “Это когда ...”. Если нарушение состоит в использовании в определяющей части не введенных ранее понятий, то может возникнуть “порочный круг” или ссылка на себя.

Комментарий. Эта норма явно отражена в символической записи определения: $P(x) \xrightarrow{\text{def}} Q(x)$, где $P(x)$ — определяемая, $Q(x)$ — определяющая часть.

ЛНКО-16. В определении, как правило, определяемая часть предшествует определяющей части, однако допустимо эти части поменять местами (*рекомендующе-разрешающая норма*).

Комментарий. Если определение начинается с определяющей части, его *рекомендуется* переформулировать, чтобы оно начиналось с определяемой части. В символической записи определения определяемая часть $P(x)$ предшествует определяющей части $Q(x)$: $P(x) \xrightarrow{\text{def}} Q(x)$.

ЛНКО-2а. В соответствии с традицией, определяемую и определяющую части определения принято соединять словом “если” (*разрешающая норма*).

ЛНКО-2б. Определяемую и определяющую части определения можно соединять словами “если и только если” или их аналогами (*разрешающая норма*).

Комментарий. Следует осознавать, что определяемая и определяющая части по существу должны быть соединены словами “если и только если”. Используя в определении традиционное “если”, следует подразумевать “если и только если”. Символическая запись явно отражает логическую структуру определения именно со словами “если и только если”: $P(x) \xrightarrow{\text{def}} Q(x)$.

ЛНКО-3а. Традиционно рекомендуется использовать форму определения с опущенными внешними кванторами общности (*рекомендующая норма*).

ЛНКО-3б. Можно формулировать определение с внешними кванторами общности по всем свободным переменным (*разрешающая норма*).

Символическая запись определения: а) без внешнего квантора общности: $P(x) \xrightarrow{\text{def}} Q(x)$; б) с внешним квантором общности: $\forall x (P(x) \xrightarrow{\text{def}} Q(x))$.

ЛНКО-4а. Определяемая и определяющая части определения *должны* иметь одни и те же переменные, которым можно придавать значения (так называемые свободные переменные) (*обязывающая норма*).

ЛНКО-46. При формулировке определения рекомендуется не употреблять буквенные переменные в том случае, когда их можно опустить без потери смысла (*рекомендующая норма*).

Комментарий. Нарушение нормы 46: Натуральное число n называют четным, если n делится на 2 (n можно удалить). Однако в символической записи определения не удастся избежать использования букв-переменных.

ЛНКО-5а. Если в определяющей части определения есть кванторы, то недопустимо опускать никакие из них (*запрещающая норма*).

ЛНКО-5б. Если в определяющей части определения есть разноименные кванторы, то недопустимо их переставлять (*запрещающая норма*).

Комментарий. Нарушение этих норм является грубой логической ошибкой, поскольку меняет смысл определения или вовсе лишает его смысла.

ЛНКО-6а. В определении можно использовать общепринятые обороты с кванторным смыслом (*разрешающая норма*).

ЛНКО-6б. Определение, использующее обороты с кванторным смыслом, рекомендуется переформулировать, раскрывая этот смысл, т. е. явно используя кванторные слова (*рекомендующая норма*).

Комментарий. Пренебрежение рекомендацией в норме 6б ведет к ошибкам, вызванным непониманием смысла кванторных оборотов. Так, в определении скрещивающихся прямых слова “прямые не лежат в одной плоскости” учащиеся ошибочно заменяют словами “прямые лежат в разных плоскостях”.

ЛНКО-7. Если предложение в определяющей части определения имеет условную форму, полезно перейти к категорической форме (*рекомендующая*).

В заключение отметим, что в учебном пособии [2] предложен набор задач, направленных на формирование способности учащихся конструировать определения в соответствии с логическими нормами.

Список использованной литературы

1. Тимофеева, И. Л. О логической структуре математических определений / И. Л. Тимофеева // Математическое образование. – 2002. – № 3. – С. 75–86.
2. Тимофеева, И. Л. Вводный курс математики : учебное пособие для студентов учреждений высш. пед. проф. образования / И. Л. Тимофеева, И. Е. Сергеева, Е. В. Лукьянова. – Москва : Изд. центр “Академия”, 2011. – 240 с.
3. Тимофеева, И. Л. О логических нормах конструирования математических определений / И. Л. Тимофеева, И. Е. Сергеева // Математика. Образование. Информатизация : сб. тезисов XXIII Международной конф. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – С. 88.
4. Тимофеева, И. Л. Логические компетенции студентов — будущих учителей математики : монография / И. Л. Тимофеева. – Москва : Прометей, 2017. – 64 с.