УДК 514.76

ИНВАРИАНТНЫЕ СВЯЗНОСТИ В ГРУППОИДЕ ЛИ $\Pi^k(B)$

Л. А. Романович
старший преподаватель,
Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях. Среди геометрических структур особое внимание привлекают связности. Целью работы является описание инвариантных связностей в группоиде Ли k-струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия. Исследование проводится методом Эресмана, основанном на использовании группоидов Ли и k-струй гладких отображений.

Ключевые слова: гладкое многообразие, группоид Ли, алгеброид Ли, инвариантная связность, оператор Спенсера, однородное пространство.

Введение

Одним из направлений современной дифференциальной геометрии является теория структур высших порядков на гладких многообразиях. Интенсивная научная работа в этом направлении проводится уже не первое десятилетие. Классический подход к исследованию геометрических структур на гладких многообразиях основан на понятиях главного и присоединенного расслоения. Сами структуры определяются как подрасслоения в главных расслоениях или как сечения присоединенных векторных расслоений и исследуются методом, основанном на изучении структурных уравнений указанных структур. Фундаментальным введением в этот раздел геометрии являются, например, двухтомная монография Ш. Кобаяси, К. Номидзу [1], [2] или лекции по геометрии М. М. Постникова [3], [4]. Работы Э. Картана, Г.Ф. Лаптева, А.М. Васильева, Ю.Г. Лумисте и других математиков (см. например, [5], [6], [7]) по исследованию структур высших порядков на гладких многообразиях и связностей на этих структурах выполнены методом, основанном на изучении структурных уравнений.

С другой стороны, в работах Ш. Эресмана, П. Либерманн (см. например, [8], [9]) развит еще один подход к построению основ геометрии, который базируется на понятиях группоида Ли и k-струи гладкого отображения. Такой подход имеет свои преимущества. Во-первых, теория группоидов Ли имеет много аналогов с хорошо развитой теорией групп Ли. Появляется возможность использования таких фундаментальных понятий, как алгеброид Ли, экспоненциальное отображение. Например, применение алгеброидов Ли эффективно в теории связностей. Во-вторых, группоидный подход позволяет успешно использовать теорию k-струй гладких отображений. На основе k-струй строится фундаментальное понятие дифференциального продолжения геометрических объектов. Примером использования такого подхода может служить построение связностей высших порядков, приведенное в работе Нго ван Кё [10]. Изложение основ дифференциальной геометрии, использующее группоиды Ли и алгеброиды Ли, приведено в монографии К. Маккензи [11]. В монографии И.В. Белько [12] осуществлено развитие этого направления исследования геометрических структур.

Среди геометрических структур на многообразиях особое место занимают связности первого и высших порядков. Основные идеи общей теории связностей восходят к Э. Картану и Ш. Эресману. Связности, введенные Э. Картаном, сейчас называют картановыми связностями. Они определяют картановы геометрии, которые можно рассматривать одновременно как обобщения римановой геометрии и однородных пространств. Актуальность исследования картановых геометрий подтверждается возросшим в последние годы интересом к ним, о чем свидетельствуют статьи Д. В. Алексеевского, П. Михора, Е. Альта, Ш. Франца (см., например, [13], [14]), монографии А. Чапа и Я. Словака [15]. Одним из обобщений понятия линейной связности в векторном расслоении, основанном на использовании группоидов Ли, является связность высшего порядка в группоиде Ли, построенная Ш. Эресманом. Примером использования метода Эресмана может служить построение связностей высших порядков, приведенное в работе Нго ван Кё [10]. Нго ван Кё установил связь между связностями высших порядков в группоидах Ли и расщеплениями присоединенных векторных расслоений. С помощью оператора Спенсера он поставил в соответствие произвольной связности высшего порядка дифференциальный оператор специального вида. Интерес представляет изучение связностей высшего порядка в группоидах Ли, согласованных с действиями продолженных подгруппоидов Ли. Такие связности можно определить, как инвариантные связности высшего порядка в группоидах Ли или как регулярные сечения расслоения элементов связностей порядка относительно действий продолженных подгруппоидов Ли. Согласованность связностей высшего порядка с действиями продолженных подгруппоидов Ли накладывает условия на соответствующие расщепления и дифференциальные операторы и, с другой стороны, позволяет однозначно определить такие связности через связности более низких порядков [16].

Общие результаты такого исследования можно применить к изучению структур высших порядков на гладких многообразиях и в векторных расслоениях, которые согласованы с некоторыми дополнительными структурами, заданными на многообразиях. В последние десятилетия прошлого века интенсивное развитие получила такая область современной геометрии, как геометрия однородных пространств. Одним из направлений исследований в этой области дифференциальной геометрии является изучение инвариантных структур. Наличие таких структур на однородном пространстве позволяет извлекать существенную информацию о геометрии однородных пространств. Известный пример – инвариантные связности на однородных пространствах, определенные транзитивным действием группы Ли G на гладком многообразии $B = G/H$, где H – замкнутая подгруппа в G. Целью работы является применение метода Эресмана к описанию инвариантных связностей на гладком многообразии $B = G/H$. При исследовании используется группоид Ли $\Pi^k(B)$, элементами которого являются k-струи локальных диффеоморфизмов многообразия B, и его подгруппоид Ли $J^k\left(\frac{G\times G}{H}\right)$ [17, с. 146].

Основная часть

Пусть B – гладкое многообразие, (Ω, B) – группоид Ли над B, (Ω^k, B) – продолжение порядка k группоида Ли (Ω, B), (E, p, B) – векторное расслоение, ассоциированное с группоидом Ли (Ω, B), (J^kE, p^k, B) – продолжение порядка k векторного расслоения (E, p, B), $(Q^k(\Omega), \pi, B)$ – расслоение элементов связностей порядка k.

Группоид Ли (Ω^k, B) действует на векторном расслоении (J^kE, p^k, B) [10, с. 170]. Локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z\cdot X = j_x^k\sigma\cdot j_x^k S = j_y^k\left(\left(\sigma(\beta\circ\sigma)^{-1}\right)\cdot s(\beta\circ\sigma)^{-1}\right), \tag{1}$$

где $Z = j_x^k\sigma \in \Omega^k, \alpha\circ\sigma = id$, $X = j_x^k S \in J_x^k E, y = \beta\circ\sigma(x)$.

Группоид Ли (Ω^k, B) действует на векторном расслоении (J^kE, p^k, B) [12, с. 133]. Локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z\cdot Y = j_x^k\sigma\cdot j_x^k f = j_y^k\left(\left(\sigma(\beta\circ\sigma)^{-1}\right)\cdot f(\beta\cdot\sigma)^{-1}\cdot(\sigma(x))^{-1}\right), \tag{2}$$

где $Y = j_x^k f \in Q_x^k(\Omega)$.

Нго ван Кё каждой связности в группоиде Ли ставит в соответствие морфизм векторных расслоений [10, с. 190]

$$\lambda_k : E \to J^k E, \tag{3}$$

который расщепляет точную последовательность расслоений

$$0 \to J_0^k E \to J^k E \to E \to 0. \tag{4}$$

Пусть G – группа Ли, H – замкнутая подгруппа в G, $B = G/H$ – однородное пространство. Группа Ли G действует на гладком многообразии B

$$L_g : G\times B \to B : (g, x) \to gx. \tag{5}$$

Группоид Ли $\frac{G\times G}{H}$ действует на векторном расслоении (TB, p, B), его продолжение порядка $k - J^k\left(\frac{G\times G}{H}\right)$ – подгруппоид Ли группоида Ли $\Pi^k(B)$, действует на векторном расслоении (J^kTB, π, B) .

Пусть $\Omega = \frac{G\times G}{H}, \Omega^k = J^k\left(\frac{G\times G}{H}\right)$. Группоид Ли $\Pi^k(B)$ действует на векторном расслоении (J^kTB, p^k, B). Согласно (1), локальная запись этого действия имеет вид:

$$Z \cdot X = j_x^k \sigma \cdot j_x^k s = j_y^k \left(\left(\sigma (\beta \circ \sigma)^{-1} \right) \cdot s (\beta \circ \sigma)^{-1} \right), \tag{6}$$

где $Z = j_x^k \sigma \in \Pi^k(B), \alpha \circ \sigma = id, X = j_x^k s \in J_x^k TB, y = \beta \circ \sigma(x)$.

Действие группоида Ли $\Pi^k(B)$ на расслоении $\left(Q^k(\Omega), \pi, B\right)$ естественным образом определяет инвариантную связность относительно действия Ω^k.

Определение. Связность $c : B \to Q^k(\Omega)$ называется инвариантной, если для любого элемента $Z = j_x^k \sigma \in \Omega^k$ выполняется условие:

$$c(y) = Z \cdot c(x), \tag{7}$$

где $\alpha \circ \sigma(x) = x, y = \beta \circ \sigma(x)$.

Теорема 1. Пусть связность $c : B \to Q^k(\Omega)$ является инвариантной относительно действия группоида Ли Ω^k.

Тогда морфизм $\lambda_k : TB \to J^k TB$ удовлетворяет условию:

$$\lambda_k(\sigma(x) \cdot \mu(x)) = j_x^k \sigma \cdot \lambda_k(\mu(x)). \tag{8}$$

Доказательство.

Пусть $c : B \to Q^k(\Omega)$ – связность, инвариантная относительно действия группоида Ли Ω^k. Построение морфизма $\lambda_k : E \to J^k E$ [10, с. 189] в нашем случае ($E = TB$) осуществляется по следующей схеме.

Для всякого $x \in B$ элемент $c(x)$ представляется в виде $c(x) = j_x^k \pi$, где $\pi : U \to \Omega_x$ – сечение связности в точке x над выделенной окрестностью U.

Для всякого элемента $X \in T_x B$ отображение

$$\pi^* X : U \to TB : y \to \pi(y) \cdot X \tag{9}$$

является локальным сечением расслоения (TB, p, B).

Так возникает морфизм векторных расслоений

$$\lambda_k : TB \to J^k TB : X \to j_x^k(\pi^* X). \tag{10}$$

Проверим выполнение условия (9):

$$\lambda_k(\sigma(x) \cdot X) = j_x^k(\pi^*(\sigma(x) \cdot X)) = j_x^k(\sigma(x) \cdot \pi^* X), \tag{11}$$

$$Z \cdot \lambda_k(X) = j_x^k \sigma \cdot j_x^k \pi = j_x^k(\sigma(x) \cdot \pi^* X). \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует, что условие инвариантности для морфизма λ_k выполняется.

Что и требовалось доказать.

Нго ван Кё с помощью дифференциального оператора Спенсера D, каждому морфизму (3) ставит в соответствие дифференциальный оператор специального вида [10, с. 192]:

$$\nabla_k = D \circ \lambda_k. \tag{13}$$

Построение соответствующего дифференциального оператора в нашем случае ($E = TB$) осуществляется по следующей схеме.

Дифференциальный оператор Спенсера D [17, с. 54] действует следующим образом:

$$D : \Gamma J^k(TB) \to \Gamma\left(J^{k-1}(TB) \otimes T^*B\right) : s \to J^1(\rho_{k-1} \circ s) - s. \tag{14}$$

Дифференциальный оператор ∇_k действует следующим образом:

$$\nabla_k : \Gamma TB \to \Gamma\left(J^{k-1}(TB) \otimes T^*B\right) : s \to \nabla_k(s) = D \circ \lambda_k(s). \tag{15}$$

Дифференциальный оператор ∇_k обладает свойствами [10, с. 192], позволяющими однозначно определить связность порядка k с помощью связности порядка $k - 1$.

Теорема 2. Пусть морфизм (10) удовлетворяет условию (8).

Тогда дифференциальный оператор (16) удовлетворяет условию:

$$\nabla_k(\sigma(x) \cdot \mu(x)) = j_x^k \sigma \cdot \nabla_k(\mu(x)).$$

Доказательство теоремы 2 следует из (13) и инвариантности оператора Спенсера.

Нго ван Кё [10, с. 192] доказал, что связность порядка k однозначно определяется связностью порядка $k - 1$ и дифференциальным оператором (13). Из теорем 1 и 2 следует, что аналогичный вывод можно сделать и для инвариантных связностей в группоиде Ли $\Pi^k(B)$.

В качестве примера исследованы инвариантные связности на двумерной сфере:

$$S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in R^3 \,|\, (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3) = 1\}. \tag{16}$$

Структура гладкого многообразия на S^2 определяется локальными тривиализациями:

$$U_1 : \left\{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \,\middle|\, x^3 > 0\right\}, \varphi_1(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2) \tag{17.1}$$

$$U_2 : \left\{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \,\middle|\, x^3 < 0\right\}, \varphi_2(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2) \tag{17.2}$$

$$U_3 : \left\{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \,\middle|\, x^1 > 0\right\}, \varphi_3(x^1, x^2, x^3) = (x^2, x^3) \tag{17.3}$$

$$U_4 : \left\{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \,\middle|\, x^1 < 0\right\}, \varphi_4(x^1, x^2, x^3) = (x^2, x^3) \tag{17.4}$$

$$U_5 : \left\{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \,\middle|\, x^2 > 0\right\}, \varphi_5(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^3) \tag{17.5}$$

$$U_6 : \left\{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \,\middle|\, x^2 < 0\right\}, \varphi_6(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^3). \tag{17.6}$$

Данное многообразие является однородным пространством

$$S^2 \sim {}^{O(3)}\!/\!_{O(2)}, \tag{18}$$

на котором действует группа ортогональных матриц третьего порядка $O(3)$

$$O(3)\times S^2 \to S^2 : (\sigma^i_j, x^j) \to \sigma^i_j \cdot x^j . \qquad (19)$$

Локальная запись действия (19) осуществлялась с помощью локальных тривиализаций (17.1–17.6). Локальная запись действия на J^1TS^2 и J^1TS^2 осуществлялась с помощью локальных тривиализаций [18], которые в нашем случае имеют вид:

$$J^1TS^2\mathrm{I}_U \approx U\times\left(L^0_S(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)\oplus L^1_S(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)\right), \qquad (20)$$

$$J^2TS^2\mathrm{I}_U \approx U\times\left(L^0_S(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)\oplus L^1_S(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)\oplus L^2_S(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)\right), \qquad (21)$$

где $L^m_S(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ – пространство m-линейных симметричных отображений $\underbrace{\mathbb{R}^2\times\ldots\mathbb{R}^2}_{m\ \text{раз}}\to\mathbb{R}^2$.

Локальная запись условий инвариантности морфизмов (3) использована для вычисления функций инвариантной связности первого и второго порядков на S^2.

Функции инвариантной связности первого порядка на S^2 относительно локальной карты (U_1,φ_1) вид (22.1–22.4):

$$\Gamma^1_{11}(x)=\frac{x^1\left(1-(x^2)^2\right)}{\rho^2},\quad \Gamma^1_{22}(x)=\frac{x^1\left(1-(x^1)^2\right)}{\rho^2}, \qquad (22.1)$$

$$\Gamma^1_{12}(x)=\frac{(x^1)^2x^2}{\rho^2}=\Gamma^1_{21}(x), \qquad (22.2)$$

$$\Gamma^2_{11}(x)=\frac{x^2\left(1-(x^2)^2\right)}{\rho^2},\quad \Gamma^2_{22}(x)=\frac{x^2\left(1-(x^1)^2\right)}{\rho^2}, \qquad (22.3)$$

$$\Gamma^2_{12}(x)=\frac{(x^2)^2x^1}{\rho^2}=\Gamma^2_{21}(x), \qquad (22.4)$$

где $\rho=\sqrt{1-(x^1)^2-(x^2)^2}$.

Функции инвариантной связности первого порядка на S^2 относительно локальной карты (U_1,φ_1) вид (23.1–23.6):

$$\Gamma^1_{111}(x)=\frac{(x^1)^2\left(1-(x^2)^2\right)}{\rho^4},\quad \Gamma^1_{112}(x)=\frac{x^1x^2\left(1-(x^2)^2\right)}{\rho^4}, \qquad (23.1)$$

$$\Gamma^1_{121}(x)=\Gamma^1_{211}(x)=-\frac{(x^1)^2x^2}{\rho^4},\quad \Gamma^1_{122}(x)=\Gamma^1_{212}(x)=-\frac{(x^1)^2(x^2)^2}{\rho^4}, \qquad (23.2)$$

$$\Gamma^1_{221}(x)=\frac{(x^1)^2\left(1-(x^1)^2\right)}{\rho^4},\quad \Gamma^1_{222}(x)=\frac{x^1x^2\left(1-(x^2)^2\right)}{\rho^4}, \qquad (23.3)$$

$$\Gamma^2_{111}(x)=\frac{x^1x^2\left(1-\left(x^2\right)^2\right)}{\rho^4},\quad \Gamma^2_{112}(x)=\frac{\left(x^1\right)^2\left(1-\left(x^2\right)^2\right)}{\rho^4}, \tag{23.4}$$

$$\Gamma^2_{121}(x)=\Gamma^1_{211}(x)=-\frac{\left(x^1\right)^2\left(x^2\right)^2}{\rho^4},\quad \Gamma^2_{122}(x)=\Gamma^2_{212}(x)=-\frac{x^1\left(x^2\right)^2}{\rho^4}, \tag{23.5}$$

$$\Gamma^2_{221}(x)=\frac{x^1x^2\left(1-\left(x^1\right)^2\right)}{\rho^4},\quad \Gamma^2_{222}(x)=\frac{\left(x^2\right)^2\left(1-\left(x^1\right)^2\right)}{\rho^4}. \tag{23.6}$$

Заключение

Актуальность исследования картановых геометрий подтверждается возросшим в последние годы интересом к ним. В работе приведено описание инвариантных связностей в группоиде Ли k-струй локальных диффеоморфизмов гладкого многообразия $B = G/H$. В качестве примера дано локальное описание инвариантных связностей первого и второго порядков на двумерной сфере.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Кобаяси, Ш.*** Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Москва : Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с.
2. ***Кобаяси, Ш.*** Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Москва : Наука, 1981. – Т. 2. – 416 с.
3. ***Постников, М. М.*** Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия / М. М. Постников. – Москва : Наука, 1987. – 480 с.
4. ***Постников, М. М.*** Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия / М. М. Постников. – Москва : Наука, 1988. – 496 с.
5. ***Картан, Э.*** Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения / Э. Картан. – Москва : Издательство МГУ, 1962. – 237 с.
6. ***Васильев, А. М.*** Дифференциальные алгебры и дифференциально-геометрические структуры / А. М. Васильев // Труды геометрического семинара. Институт научной информации АН СССР. – 1978. – № 4. – С. 217–230.
7. ***Лумисте, Ю. Г.*** Однородные расслоения со связностью и их погружения / Ю. Г. Лумисте // Труды геометрического семинара. Институт научной информации АН СССР. – 1966. – № 1. – С. 191–236.
8. ***Ehresmann, C.*** Introduktion a la theorie des structures infinitesimales et des pseudogroupes de Lie / C. Ehresmann // Colloq. Geometr. Differ., Strastbourgs. – 1953. – P. 97–100.
9. ***Libermann, P.*** Sur la geometrie des prolongements des espaces fibres vectoriels / P. Libermann // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1964. – T. 14, № 1. – P. 145–172.
10. ***Ngo van Que***. Du prolongement des espaces fibres et des struktures infinitesimales / Ngo van Que // Ann. Inst. Fourier. Grenoble. – 1967. – T. 17, № 1. – P. 159–223.
11. ***Mackenzie, K***. Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometrie / K. Mackenzie. – Cambridge : Universitu Press, 1987. – 327 p.
12. ***Белько, И. В.*** Слоеные группоиды Ли и метод Эресмана в дифференциальной геометрии / И. В. Белько. – Москва : Издательство УРСС, 2004. – 208 с.
13. ***Alekseevsky, D. V.*** Tanaka structures (non Holonomic *G*-structures) and Cartan connections / Dmitri V. Alekseevsky, Lianna David // Joornal of Geometry and Phusics. – 2015. – V. 91. – P. 88–100.

14. ***Michor, P.*** Tensor fields an connections on holomorphic orbit spaces of finits groups / A. Kriegl, M. Losik, P. Michor // Journal of Lie Theorie. – 2003. – № 13(2). – P. 519–534.
15. ***Cap, A.*** Parabolic Geometrie I: Backgroup and General Theory / A. Cap, J. Slovak // AMS : Publishing House, 2009. – 628 p.
16. ***Рамановіч, Л. А.*** Інварыянтныя звязнасці ў групоідах Лі / Л. А. Рамановіч // Весці Беларускага дзяржаўнага педагагічнага універсітэта. – 1998. – № 3. – С. 117–121.
17. ***Романович, Л. А.*** Геометрические структуры на группоиде Ли $\Pi^k(B)$ / Л. А. Романович // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага універсітэта імя А. А. Куляшова. Серыя В, Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. – 2008. – № 1(29). – С. 146–155.
18. ***Пале, Р.*** Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе / Р. Пале. – Москва : Издательство "Мир", 1970. – 359 с.

Поступила в редакцию 20.12.2017 г.
Контакты: l_ramanovich@mail.ru (Романович Людмила Александровна)

Ramanovich L. INVARIANT CONNECTIONS IN LIE GROUPOID $\Pi^k(B)$.

The article explores invariant connections in the Lie groupoid's k-jets of local diffeomorphisms of differentiable manifolds B = G/H. The research is based on Ehresmann's method involving the Lie groupoid $\Pi^k(B)$ and subgroupoid $J^k\left(\frac{G\times G}{H}\right)$.

Keywords: smooth manifold, Lie groupoid, Lie algebroid, invariant connection, Spenser operator, homogeneous space.