УДК 512.548

КРИТЕРИИ АССОЦИАТИВНОСТИ l-АРНОЙ ОПЕРАЦИИ $\eta_{s,\sigma,k}$

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук
Могилевский государственный университет продовольствия
А. Д. Русаков
аспирант
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

В данной статье получены новые критерии ассоциативности операции $\eta_{s,\sigma,k}$ *для некоторых конкретных подстановок.*

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, группа, ассоциативность.

1. Введение

Полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ была определена в [1] следующим образом. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$

$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) =$$

$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}$$

$$\eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}$$

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))).$$

При $s = 1$ l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\sigma,k}$.

Если в определении операции $\eta_{s,\sigma,k}$ положить $n = 2$, то получим определение l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [2] на k-й декартовой степени A^k полугруппы A. Изучению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ и некоторых ее обобщений посвящена книга [3]. При

$$k = m-1,\ l = m,\ \sigma = (12 \ldots m-1),\ A = \mathbf{S}_n$$

операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ совпадает с m-арной операцией Э. Поста, определенной в [4] на декартовой степени $\mathbf{S}_n^{m-1}$ симметрической группы $\mathbf{S}_n$, а при $A = \mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$ и тех же k, l и σ операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ совпадает с m-арной операцией Э. Поста, определенной в [4] на декартовой степени $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$. Таким образом, и операция $[\ ]_{l,\ \sigma,\ k}$, и обе отмеченные операции Э. Поста являются частными случаями операции $\eta_{s,\ \sigma,\ k}$.

В [1] доказано, что если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s,\ \sigma,\ k}$ также является ассоциативной. Для n-арной полугруппы $< A,\ \eta >$, содержащей более одного элемента и обладающей левой нейтральной последовательностью, верно обратное утверждение [5], то есть в этом случае ассоциативность операции $\eta_{s,\ \sigma,\ k}$ равносильна тождественности подстановки σ^{l-1}.

В данной статье получены новые критерии ассоциативности операции $\eta_{s,\sigma,k}$ для некоторых конкретных подстановок (в частности для циклических подстановок). Следствиями новых критериев являются критерии ассоциативности операции $[\ ]_{l,\ \sigma,\ k}$ из [6].

2. Предварительные сведения

Напомним, что n-арную операцию η n-арного группоида $< A,\ \eta >$ называют *ассоциативной*, если в нем выполняется каждое из следующих $n - 1$ тождеств

$$[[x_1 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}]] = [x_1[x_2 \ldots x_{n+1}]x_{n+2} \ldots x_{2n-1}],$$

$$[[x_1 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}]] = [x_1x_2[x_3 \ldots x_{n+2}]x_{n+3} \ldots x_{2n-1}],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[[x_1 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}]] = [x_1 \ldots x_{n-2}[x_{n-1} \ldots x_{2n-2}]x_{2n-1}],$$

$$[[x_1 \ldots x_n]x_{n+1} \ldots x_{2n-1}]] = [x_1 \ldots x_{n-1}[x_n \ldots x_{2n-1}]].$$

Если в $< A,\ \eta >$ выполняется только последнее тождество, то n-арную операцию η называют *полуассоциативной*.

Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A,\ \eta >$ называют его *левой* (*правой*) *нейтральной последовательностью*, если

$$\eta(e_1 \ldots e_{n-1}x) = x\ (\eta(xe_1 \ldots e_{n-1}) = x)$$

для любого $x \in A$.

Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A,\ \eta >$ называют его *нейтральной последовательностью*, если она является и левой нейтральной, и правой нейтральной.

Элемент e n-арного группоида $< A,\ \eta >$ называют его *единицей*, если для любого $x \in A$ верно

$$\eta(x\underbrace{e \ldots e}_{n-1}) = \eta(ex\underbrace{e \ldots e}_{n-2}) = \ldots = \eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-2}xe) = \eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-1}x) = x.$$

Если

$$\eta(\underbrace{e \ldots e}_{n-1}x) = x$$

для любого $x \in A$, то элемент e называют *левой единицей* n-арного группоида $< A,\ \eta >$.

Теорема 2.1 [1]. *Если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\ \sigma,\ k}$ ассоциативна.*

Теорема 2.2 [5]. *Пусть $< A,\ \eta >$ – n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью; σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является ассоциативной*;

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является полуассоциативной*;

3) *подстановка* σ^{l-1} – *тождественная*.

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть* $<A, \eta>$ – *n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью*; σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка d. Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{td + 1 \mid t = 1, 2, \ldots, \}; \tag{3.1}$$

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \ldots, ; r = 2, \ldots, d\}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Множество всех натуральных чисел $l \geq 2$ может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, присутствующих в (3.1) и (3.2).

Так как подстановка σ имеет порядок d, то для всех l из (3.1) верно равенство $\sigma^l = \sigma$, а для всех l из (3.2) верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$.

1) Пусть l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является ассоциативной, и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (3.1). Тогда l принадлежит множеству из (3.2) и верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 2.2 l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ – неассоциативна, что противоречит ее ассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (3.1), то верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 2.1 l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ является ассоциативной.

2) Пусть l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ не является ассоциативной, и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (3.2). Тогда l принадлежит множеству из (3.1) и верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 2.1 l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ – ассоциативна, что противоречит ее неассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (3.2), то верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 2.2 l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ не является ассоциативной. Теорема доказана.

Заметим, что в доказательстве теоремы 3.1 вместо теоремы 2.1 может быть использована и теорема 2.2.

В качестве подстановки σ в теореме 3.1 можно взять любую подстановку из $\mathbf{S}_k$, представимую в виде произведения независимых циклов, длина каждого из которых равна d, в частности, любой цикл длины d из $\mathbf{S}_k$ ($d \leq k$). Так как любой цикл длины k из $\mathbf{S}_k$ имеет порядок k, то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью*; σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{tk + 1 \mid t = 1, 2, \ldots, \}; \tag{3.3}$$

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда*

$$l \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \ldots, ; r = 2, \ldots, k\}. \quad (3.4)$$

Полагая в следствии 2.1 $\sigma = (12 \ldots k)$, получим

Следствие 3.2. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью. Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s, (12 \ldots k), k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.3);

2) *l-арная операция* $\eta_{s, (12 \ldots k), k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.4).

Следующая теорема получается из теоремы 3.1, если в ней n-арную полугруппу заменить n-арной группой.

Теорема 3.2. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, содержащая более одного элемента*; σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка d. Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s, \sigma, k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.1);

2) *l-арная операция* $\eta_{s, \sigma, k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.2).

Следующие два следствия могут быть извлечены как из теоремы 3.2, так и из следствий 3.1 и 3.2 соответственно.

Следствие 3.3. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, содержащая более одного элемента*; σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s, \sigma, k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.3);

2) *l-арная операция* $\eta_{s, \sigma, k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.4).

Следствие 3.4. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, содержащая более одного элемента. Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s, (12 \ldots k), k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.3);

2) *l-арная операция* $\eta_{s, (12 \ldots k), k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.4).

Сформулируем еще три следствия из теоремы 3.1.

Следствие 3.5. *Пусть A – n-арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента*; σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка d. Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s, \sigma, k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.1);

2) *l-арная операция* $\eta_{s, \sigma, k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.2).

Следствие 3.6. *Пусть A – n-арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента*; σ – *цикл длины k из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s, \sigma, k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.3);

2) *l-арная операция* $\eta_{s, \sigma, k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.4).

Следствие 3.7. *Пусть A – n-арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента. Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\,(12\,\dots\,k),\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.3);

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\,(12\,\dots\,k),\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.4).

Если в (3.1) и (3.2) положить $d = 2$, то множество всех l в (3.1) совпадает с множеством всех нечетных чисел без единицы, а множество всех l в (3.2) совпадает с множеством всех четных чисел. Если при этом учесть, что порядок любой транспозиции равен двум, то из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.8. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью;* σ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное*.

Аналогично из теоремы 3.2 или из следствия 3.8 вытекает

Следствие 3.9. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, содержащая более одного элемента;* σ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное*.

Из следствия 3.8 вытекает также

Следствие 3.10. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента;* σ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное*.

Полагая в следствиях 3.8 – 3.10 $\sigma = (12)$, получим еще три следствия.

Следствие 3.11. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная полугруппа, содержащая более одного элемента и обладающая левой нейтральной последовательностью. Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\,(12),\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\,(12),\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное*.

Следствие 3.12. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, содержащая более одного элемента. Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\,(12),\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\,(12),\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное*.

Следствие 3.13. *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента. Тогда*:

1) *l-арная операция* $\eta_{s,\,(12),\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечетное, большее единицы*;

2) *l-арная операция* $\eta_{s,\,(12),\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – четное*.

Замечание 3.1. Если во всех утверждениях этого раздела положить $n = 2$, то получим новые утверждения, отличающиеся от прежних только тем, что в них вместо операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ будет присутствовать операция $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$. Например, теоремам 3.1 и 3.2 соответствуют следующие два следствия.

Следствие 3.14 [6]. *Пусть A – полугруппа с левой единицей, содержащая более одного элемента, σ – подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка d. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.1);

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.2).

Следствие 3.15. *Пусть A – группа, содержащая более одного элемента, σ – подстановка из* $\mathbf{S}_k$ *порядка d. Тогда*:

1) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ *является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.1);

2) *l-арная операция* $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ *не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в* (3.2).

Замечание 3.2. Понятно, что утверждения этого раздела останутся верными, если в них левую нейтральную последовательность заменить нейтральной последовательностью, а левую единицу – единицей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гальмак, А. М.*** О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. ***Гальмак, А. М.*** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. ***Гальмак, А. М.*** Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. ***Post, E. L.*** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. ***Русаков, А. Д.*** О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ / А. Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1. – С. 68–72.
6. ***Гальмак, А. М.*** Об ассоциативности полиадических группоидов / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. Серыя, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2017. – № 1. – С. 4–11.

Поступила в редакцию 29.09.2017 г.
Контакты: +375 222 47 79 35 (Гальмак Александр Михайлович)

Gal'mak A., Rusakov A. ASSOCIATIVITY TESTS OF *l*-ARY OPERATION $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$

The article reveals new associativity tests of the operation $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ *for certain substitutions.*

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, group, associativity.