УДК 512.548

О НЕ n-ПОЛУАБЕЛЕВЫХ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. М. Гальмак
доктор физико-математических наук
Могилевский государственный университет продовольствия
Ю. И. Кулаженко
доктор физико-математических наук,
Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

В статье изучается перестановочность элементов в полиадических группоидах с полиадической операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется на k-й декартовой степени n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, ... k\}$ и n-арной операции η. Найдены достаточные условия не n-полуабелевости l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$. В частности, доказано существование полуабелевых, но не n-полуабелевых полиадических группоидов вида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

Ключевые слова: полиадическая операция, n-арный группоид, n-арная полугруппа, n-арная группа, полуабелевость.

1. Введение

Полиадическим группоидом специального вида называют универсальную алгебру $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с одной l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s(n-1) + 1$, которая определяется [1] на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n-арной операции η. Саму операцию $\eta_{s,\sigma,k}$ называют полиадической операцией специального вида. В [1] было доказано, что если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ также является ассоциативной.

Частными случаями ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ являются l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ на k-й декартовой степени A^k полугруппы A, и две полиадические операции Э. Поста [3], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, а вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Обе операции Э. Поста являются полиадическими операциями вида $[\ ]_{l,\sigma,k}$, так как для них $l = k + 1$, а роль подстановки σ в обоих случаях играет цикл $(12 \dots k)$. Таким образом, и операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, и обе отмеченные операции Э. Поста являются полиадическими операциями специального вида. Изучению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ и некоторых ее обобщений посвящена книга [4].

В данной статье найдены достаточные условия не n-полуабелевости l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$. Доказано также существование полуабелевых, но не n-полуабелевых полиадических группоидов специального вида.

2. Предварительные сведения

Напомним, что если в n-арном группоиде $< A, \eta >$ для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ выполняется тождество

$$\eta(x_1 x_2 \dots x_n) = \eta(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}),$$

то n-арный группоид $< A, \eta >$ и n-арная операция η называются *абелевыми*.

n-Арный группоид $< A, \eta >$, в котором выполняется тождество

$$\eta(x x_1 \dots x_{n-2} y) = \eta(y x_1 \dots x_{n-2} x),$$

называется *полуабелевым*. *Полуабелевой* в этом случае называется и сама n-арная операция η.

© Гальмак А. М., 2018
© Кулаженко Ю. И., 2018

Абелевы и полуабелевы n-арные операции впервые появились у В. Дёрнте [5] при изучении n-арных групп.

При $n = 2$ понятия абелевости и полуабелевости совпадают, так как в этом случае указанные выше тождества принимают вид $xy = yx$.

Пусть $l = s(n - 1) + 1$, $s \geq 1$. l-Арный группоид $< A, \eta >$ называется *n-полуабелевым*, если в нем для любых $t = 0, 1, \ldots, s - 1$ выполняется тождество

$$\begin{aligned} &\eta(x_1 \ldots x_{t(n-1)} x_{t(n-1)+1} x_{t(n-1)+2} \ldots x_{(t+1)(n-1)} \\ &\quad x_{(t+1)(n-1)+1} x_{(t+1)(n-1)+2} \ldots x_{s(n-1)+1}) = \\ &= \eta(x_1 \ldots x_{t(n-1)} x_{(t+1)(n-1)+1} x_{t(n-1)+2} \ldots \\ &\ldots x_{(t+1)(n-1)} x_{t(n-1)+1} x_{(t+1)(n-1)+2} \ldots x_{s(n-1)+1}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

В частности, при $t = 0$ тождество (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} &\eta(x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n x_{n+1} \ldots x_{s(n-1)+1}) = \\ &= \eta(x_n x_2 \ldots x_{n-1} x_1 x_{n+1} \ldots x_{s(n-1)+1}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

а при $t = s - 1$ тождество (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} &[x_1 x_2 \ldots x_{(s-1)(n-1)} x_{(s-1)(n-1)+1} x_{(s-1)(n-1)+2} \ldots x_{s(n-1)} x_{s(n-1)+1}] = \\ &= [x_1 x_2 \ldots x_{(s-1)(n-1)} x_{s(n-1)+1} x_{(s-1)(n-1)+2} \ldots x_{s(n-1)} x_{(s-1)(n-1)+1}]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Поэтому l-арный группоид $< A, \eta >$ не является n-полуабелевым, если в нем не выполняется любое из последних двух тождеств.

Если положить

$$\alpha_i = x_{(i-1)(n-1)+2} \ldots \mathrm{x}_{i(n-1)},\ i = 1, \ldots s,$$

то тождество (2.1) можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} &[x_1 \alpha_1 x_n \ldots x_{(t-1)(n-1)+1} \alpha_t x_{t(n-1)+1} \alpha_{t+1} x_{(t+1)(n-1)+1} \alpha_{t+2} \ldots \alpha_s x_l] = \\ &= [x_1 \alpha_1 x_n \ldots x_{(t-1)(n-1)+1} \alpha_t x_{(t+1)(n-1)+1} \alpha_{t+1} x_{t(n-1)+1} \alpha_{t+2} \ldots \alpha_s x_l]. \end{aligned}$$

Если $n = 2$, то $s = l - 1$, при этом все последовательности α_i являются пустыми, а последнее тождество при $t = 0, 1, \ldots l - 2$ принимает вид

$$\eta(x_1 x_2 x_3 \ldots x_l) = \eta(x_2 x_1 x_3 \ldots x_l),$$

$$\eta(x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots x_l) = \eta(x_1 x_3 x_2 x_4 \ldots x_l),$$

$$\eta(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \ldots x_l) = \eta(x_1 x_2 x_4 x_3 x_5 \ldots x_l),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\eta(x_1 x_2 \ldots x_{l-3} x_{l-2} x_{l-1} x_l) = \eta(x_1 x_2 \ldots x_{l-3} x_{l-1} x_{l-2} x_l),$$

$$\eta(x_1 x_2 \ldots x_{l-2} x_{l-1} x_l) = \eta(x_1 x_2 \ldots x_{l-2} x_l x_{l-1}).$$

Замечание 2.1. Понятно, что l-арный группоид $< A, \eta >$ является абелевым тогда и только тогда, когда в нем выполняются записаные выше $l - 1$ тождеств. Таким образом, 2-полуабелевые l-арные группоиды – это в точности абелевы l-арные группоиды.

Понятно также, что l-полуабелевые l-арные группоиды – это в точности полуабелевы l-арные группоиды.

n-Полуабелевы полиадические операции впервые появились у Э. Поста [3] при изучении полиадических групп.

Полиадический группоид, не являющийся n-полуабелевым, будем называть также не n-полуабелевым.

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 2.1. *Всякий n-полуабелевый l-арный группоид является полуабелевым.*

n-Арную операцию η n-арного группоида $< A, \eta >$ называют *ассоциативной*, если в нем для любого $i = 2, \ldots, n$ выполняется тождество

$$\eta(\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n)\mathbf{x}_{n+1} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}) = \eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{i-1}\eta(\mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_{i+n-1})\mathbf{x}_{i+n} \ldots \mathbf{x}_{2n-1}).$$

Согласно W. Dörnte [5], n-арный группоид $< A, \eta >$ называется *n-арной группой*, если операция η ассоциативна и для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

$$\eta(a_1 \ldots a_{i-1} x a_{i+1} \ldots a_n) = b.$$

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с ассоциативной n-арной операцией η называют *n-арной полугруппой*.

Ясно, что группы (полугруппы) – это n-арные группы (n-арные полугруппы) при $n = 2$.

Определение 2.1 [1]. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$

$$= (\eta(x_{11} x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(x_{1k} x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) =$$

$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1} \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}$$

$$\eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}$$

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}) \ldots))).$$

При $s = 1$ l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\sigma,k}$.

Если η – бинарная операция, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из [4].

Явный вид l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ описывает следующая

Теорема 2.1 [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-я компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}\ \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1)\ \sigma^{2(n-1)-1}(j)}\ \eta(\ldots$$

$$\ldots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots))).$$

Замечание 2.1. Если n-арная операция η ассоциативна, то последнее равенство может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Теорема 2.2 [1]. *Если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.*

Теорема 2.3 [6]. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная группа.*

Теорема 2.4 [7]. *Если n-арная полугруппа $< A, \eta >$ является полуабелевой, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная полугруппа $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ также является полуабелевой.*

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает правой нейтральной последовательностью $e_1 \ldots e_{n-1}$ и отличным от e_{n-1} элементом a, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$. Тогда l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым.*

Доказательство. Так как подстановка σ^{n-1} не является тождественной, то существует $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ с условием $\sigma^{n-1}(j) \neq j$.

Положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_{n-1}, \ldots, a_{j-1} = e_{n-1}, a_j = a, a_{j+1} = e_{n-1}, \ldots, a_k = e_{n-1}),$$

$$\mathbf{e}_1 = (\underbrace{e_1 \dots e_1}_{k}),\ \mathbf{e}_2 = (\underbrace{e_2 \dots e_2}_{k}),\ \dots,\ \mathbf{e}_{n-1} = (\underbrace{e_{n-1} \dots e_{n-1}}_{k}),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-2}\mathbf{e}_{n-1}\underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-2}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) = (z_1, z_2, \dots, z_k).$$

Тогда ввиду замечания 2.1,

$$y_j = \eta(a_j e_1 \dots e_{n-2}e_{n-1}\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}),$$

$$z_j = \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-2}\, a_{\sigma^{n-1}(j)}\, \underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}).$$

Так как $e_1 \dots e_{n-1}$ – правая нейтральная последовательность n-арной полугруппы $< A, \eta >$, то $y_j = a_j = a$. А так как $\sigma^{n-1}(j) \neq j$, то $a_{\sigma^{n-1}(j)} = e_{n-1}$, откуда

$$z_j = \eta(e_{n-1}e_1 \dots e_{n-2}e_{n-1}\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}).$$

Снова, используя правую нейтральность последовательности $e_1 \dots e_{n-1}$, получаем $z_j = e_{n-1}$. Из

$$y_j = a,\ z_j = e_{n-1},\ a \neq e_{n-1}$$

следует $y_j \neq z_j$, откуда

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{a}\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-2}\mathbf{e}_{n-1}\underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}) \neq$$

$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-2}\mathbf{a}\underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}),$$

то есть в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не выполняется тождество вида (2.2). Следовательно, l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым. Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает левой нейтральной последовательностью* $e_1 \dots e_{n-1}$ *и отличным от* e_1 *элементом a, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^n \neq \sigma$ *. Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым.*

Доказательство. Так как подстановка σ^{n-1} не является тождественной, то

$$\sigma^{(s-1)(n-1)} \neq \sigma^{s(n-1)}.$$

Поэтому существует $j \in \{1, 2, ..., k\}$ с условием

$$\sigma^{(s-1)(n-1)}(j) \neq \sigma^{s(n-1)}(j).$$

Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ – те же, что и в теореме 3.1, и положим

$$\mathbf{a} = (a_1 = e_1, \dots, a_{\sigma^{s(n-1)}(j)} = e_1,\ a_{\sigma^{s(n-1)}(j)} = a,\ a_{\sigma^{s(n-1)}(j)+1} = e_1, \dots, a_k = e_1),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{a}) = (y_1, y_2, \dots, y_k),$$

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1} \dots \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}\mathbf{a}\mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1) = (z_1, z_2, \dots, z_k).$$

Тогда ввиду замечания 2.1,

$$y_j = \eta(\underbrace{e_1 \dots e_{n-1} \dots e_1 \dots e_{n-1}}_{s-1}e_1e_2 \dots e_{n-1}a_{\sigma^{s(n-1)}(j)}),$$

$$z_j = \eta(\underbrace{e_1 \ldots e_{n-1} \ldots e_1 \ldots e_{n-1}}_{s-1}\ a_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, e_2 \ldots e_{n-1}e_1).$$

Так как $e_1 \ldots e_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность n-арной полугруппы $< A, \eta >$, то

$$y_j = a_{\sigma^{s(n-1)}(j)} = a.$$

А так как

$$\sigma^{(s-1)(n-1)}(j) \neq \sigma^{s(n-1)}(j),$$

то

$$a_{\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} = e_1,$$

откуда

$$z_j = \eta(\underbrace{e_1 \ldots e_{n-1} \ldots e_1 \ldots e_{n-1}}_{s-1}\ e_1 e_2 \ldots e_{n-1}e_1).$$

Снова, используя левую нейтральность последовательности $e_1 \ldots e_{n-1}$, получаем $z_j = e_1$. Из

$$y_j = a, z_j = e_1, a \neq e_1$$

следует $y_j \neq z_j$, откуда

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{a}) \neq$$
$$\neq \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1} \ldots \mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_{n-1}}_{s-1}\ \mathbf{a}\mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_1),$$

то есть в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не выполняется тождество вида (2.3). Следовательно, l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ не является n-полуабелевым. Теорема доказана.

Теоремы 3.1 и 3.2 были анонсированы в [8].

Пример 3.1. Пусть $\mathbf{T}_3$ – множество всех нечетных подстановок на трех символах. Определим на $\mathbf{T}_3$ тернарную операцию $\eta(\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$. Тогда $< \mathbf{T}_3, \eta >$ – полуабелева тернарная группа третьего порядка, не являющаяся абелевой [9]. Согласно теореме 2.4, для любого $s \geq 1$ универсальная алгебра $< \mathbf{T}_3^2, \eta_{s,(12),2} >$ является полуабелевой $(2s + 1)$-арной полугруппой девятого порядка. В частности, $< \mathbf{T}_3^2, \eta_{1,(12),2} >$ – полуабелева тернарная полугруппа девятого порядка.

Положим

$$\tau = (12) \in \mathbf{S}_2, \mathbf{a} = (\alpha, \alpha), \mathbf{x} = (x_1, x_2),$$

где α может быть любым из трех элементов множества $\mathbf{T}_3$, $\mathbf{x}$ – произвольный элемент из $\mathbf{T}_3^2$. Так как α^2 и τ^2 – тождественные подстановки, то

$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{aax}) = \eta_{1,(12),2}((\alpha, \alpha)(\alpha, \alpha)(x_1, x_2)) =$$
$$= (\alpha\alpha x_{\tau^2(1)}, \alpha\alpha x_{\tau^2(2)}) = (x_1, x_2) = \mathbf{x},$$

$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{xaa}) = \eta_{1,(12),2}((x_1, x_2)(\alpha, \alpha)(\alpha, \alpha)) =$$
$$= (x_1\alpha\alpha, x_2\alpha\alpha) = (x_1, x_2) = \mathbf{x},$$

то есть

$$\eta_{1,(12),2}(\mathbf{aax}) = \mathbf{x}, \eta_{1,(12),2}(\mathbf{xaa}) = \mathbf{x}.$$

Следовательно, $\mathbf{aa}$ – нейтральная последовательность тернарной полугруппы $< \mathbf{T}_3^2, \eta_{1,(12),2} >$.

Считая в определении l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ (определение 2.1)

$$A = \mathbf{T}_3^2, \eta = \eta_{1,(12),2}, n = 3, k = 4, \sigma = (1234) \in \mathbf{S}_4,$$

определим на $(\mathbf{T}_3^2)^4$ операцию $\eta_{s,(1234),4}$ арности $2s + 1$.

Если $s = 2t$, где $t \geq 1$, то

$$(1234)^{2s+1} = (1234)^{4t+1} = (1234).$$

А так как, кроме того, $(1234)^3 \neq (1234)$, то согласно теореме 3.1 (теореме 3.2), универсальная алгебра < $(\mathbf{T}_3^2)^4$, $\eta_{2t,\,(1234),\,4}$ > является полуабелевой $(4t + 1)$-арной полугруппой порядка 3^8, не являющейся 3-полуабелевой. В частности, < $(\mathbf{T}_3^2)^4$, $\eta_{2,\,(1234),\,4}$ > – полуабелева 5-арная полугруппа порядка 6561, не являющаяся 3-полуабелевой.

Пример 3.2. Пусть $\mathbf{D}_n$ – диэдральная группа, $\mathbf{B}_n$ – подмножество всех ее отражений. Определим на $\mathbf{B}_n$ тернарную операцию $\eta(\varphi\psi\theta) = \varphi\psi\theta$. Тогда < B_n, η > – полуабелева тернарная группа порядка n, не являющаяся абелевой [9]. Согласно теореме 2.4, для любого $s \geq 1$ универсальная алгебра < $\mathbf{B}_n^2$, $\eta_{s,\,(12),\,2}$ > является полуабелевой $(2s + 1)$-арной полугруппой порядка n^2. В частности, < $\mathbf{B}_n^2$, $\eta_{1,\,(12),\,2}$ > – полуабелева тернарная полугруппа порядка n^2.

Так же как в примере 3.1, устанавливается, что для любого отражения $\alpha \in \mathbf{B}_n$ последовательность $(\alpha , \alpha)(\alpha , \alpha)$ является нейтральной в < $\mathbf{B}_n^2$, $\eta_{1,\,(12),\,2}$ >.

Считая в определении l-арной операции $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ (определение 2.1)

$$A = \mathbf{B}_n^2 ,\ \eta = \eta_{1,\,(12),\,2},\ n = 3,\ k = 4,\ \sigma = (1234) \in \mathbf{S}_4,$$

определим на $(\mathbf{B}_n^2)^4$ операцию $\eta_{s,\,(1234),\,4}$ арности $2s + 1$.Тогда для любого $t \geq 1$, согласно теореме 3.1 (теореме 3.2), универсальная алгебра < $(\mathbf{B}_n^2)^4$, $\eta_{2t,\,(1234),\,4}$ > является полуабелевой $(4t + 1)$-арной полугруппой порядка n^8, не являющейся 3-полуабелевой. В частности, < $(\mathbf{B}_n^2)^4$, $\eta_{2,\,(1234),\,4}$ > – полуабелева 5-арная полугруппа порядка n^8, не являющаяся 3-полуабелевой.

Полагая в теоремах 3.1 и 3.2 $n = 2$, получим

Следствие 3.1. *Пусть A – неодноэлементная полугруппа с правой (левой) единицей. Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, то l-арный группоид < A^k, $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ > не является абелевым.*

Следствие 3.2. [4, предложение 3.5.1]. *Пусть A – неодноэлементная полугруппа с единицей. Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, то l-арный группоид < A^k, $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ > не является абелевым.*

Так как в любой n-арной группе существуют нейтральные последовательности, то для n-арных групп имеет место

Теорема 3.3. *Пусть < A, η > – неодноэлементная n-арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n \neq \sigma$. Тогда l-арный группоид < A^k, $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ > не является n-полуабелевым.*

Из теоремы 3.3 при $n = 2$ вытекает

Следствие 3.3. *Пусть A – неединичная группа. Если подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ не является тождественной, то l-арный группоид < A^k, $[\ ]_{l,\,\sigma,\,k}$ > не является абелевым.*

В связи с предложением 2.1 возникает вопрос: *существуют ли полуабелевы l-арные группоиды вида < A^k, $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ >, не являющиеся n-полуабелевыми?*

Если в теоремах 3.1 – 3.3 условие $\sigma^n \neq \sigma$ дополнить условием $\sigma^l = \sigma$, то ответ на этот вопрос будет положительным.

Теоремы 3.1, 3.2, 2.2 и 2.4 позволяют сформулировать следующие две теоремы, дающие положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 3.4. *Пусть неодноэлементная полуабелева n-арная полугруппа < A, η > обладает правой нейтральной последовательностью, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда < A^k, $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ > – полуабелева, но не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

Теорема 3.5. *Пусть неодноэлементная полуабелева n-арная полугруппа < A, η > обладает левой нейтральной последовательностью, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда < A^k, $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ > – полуабелева, но не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

Теоремы 3.3, 2.3 и 2.4 позволяют сформулировать еще одну теорему, дающую положительный ответ на тот же вопрос.

Теорема 3.6. *Пусть < A, η > – неодноэлементная полуабелева n-арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условиям $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. Тогда < A^k, $\eta_{s,\,\sigma,\,k}$ > – полуабелева, но не n-полуабелева l-арная группа.*

Полагая в теоремах 3.4 и 3.5 $n = 2$, получим

Следствие 3.4. *Пусть A – неодноэлементная коммутативная полугруппа с правой единицей (левой единицей, единицей), нетождественная подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – полуабелева, но неабелева l-арная полугруппа.*

Полагая в теореме 3.6 $n = 2$, получим

Следствие 3.5. *Пусть A – неединичная абелева группа, нетождественная подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ – полуабелева, но неабелева l-арная группа.*

Замечание 3.1. Согласно теореме 2.3, универсальные алгебры $< \mathbf{T}_3^2, \eta_{s,(12),2} >$ и $< \mathbf{B}_n^2, \eta_{s,(12),2} >$ из примеров 3.1 и 3.2 являются полуабелевыми $(2s + 1)$-арными группами. Поэтому для доказательства не 3-полуабелевости универсальных алгебр $< (\mathbf{T}_3^2)^4, \eta_{2t,(1234),4} >$ и $< (\mathbf{B}_n^2)^4, \eta_{2t,(1234),4} >$ можно вместо теорем 3.1 и 3.2 воспользоваться теоремой 3.3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Гальмак, А. М.*** О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.
2. ***Гальмак, А. М.*** Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак // Весцi НАН Беларусi. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. ***Post, E. L.*** Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. ***Гальмак, А. М.*** Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
5. ***Dörnte, W.*** Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
6. ***Гальмак, А. М.*** О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ / А. М. Гальмак // Веснік МДУ імя А. А. Куляшова. – 2018. – № 1. – С. 34–38.
7. ***Гальмак, А. М.*** Перестановочность элементов в полиадических группоидах специального вида / А. М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3. – С. 68–72.
8. ***Гальмак, А. М.*** О не n-полуабелевости полиадических группоидов специального вида / А. М. Гальмак, Ю. И. Кулаженко / XII школа-конференция по теории групп. – Геленджик, 2018. – С. 35–40.
9. ***Гальмак, А. М.*** Тернарные группы отражений / А. М. Гальмак, Г. Н. Воробьев. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 128 с.

Поступила в редакцию 12.04.2018 г.
Контакты: (Гальмак Александр Михайлович)

Galmak A.M., Kulazhenko Y.I. ON NON *n*-SEMIABELIAN SPECIAL POLYADIC GROUPOIDS.

The article highlights the permutability of elements in polyadic groupoids with the polyadic operation $\eta_{s,\sigma,k}$ which is determined on a k-th Cartesian power of the n-ary groupoid $< A, \eta >$ with the substitution σ of the set $\{1, ..., k\}$ and n-ary operation η. Sufficient conditions of the semiabelian operations $\eta_{s,\sigma,k}$ which are not n-semiabelian have been found. In particular, the existence of the semiabelian polyadic groupoids $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ which are not n-semiabelian is proved.

Keywords: polyadic operation, *n*-ary groupoid, *n*-ary semigroup, *n*-ary group, semiability.