УДК 514.765.1

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА НЕРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ И СВЯЗНОСТИ НА НИХ

Н. П. Можей
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Цель работы – классификация трехмерных симметрических однородных пространств, описание всех инвариантных аффинных связностей на таких пространствах вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, канонических связностей и естественных связностей без кручения. Рассмотрены пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований с неразрешимым стабилизатором. Локальная классификация однородных пространств эквивалентна описанию эффективных пар алгебр Ли. Исследования основаны на использовании свойств алгебр Ли, групп Ли и однородных пространств и носят, главным образом, локальный характер. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода, а также сочетание различных методов дифференциальной геометрии, теории групп и алгебр Ли и теории однородных пространств.

Ключевые слова: каноническая связность, группа преобразований, симметрическое пространство, алгебра голономии.

Введение

Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении (см. [1]). Геодезическая симметрия относительно любой точки такого пространства есть автоморфизм, заданная аффинная связность переходит в себя. Примерами симметрических пространств могут служить пространства постоянной кривизны, классические области в комплексном аффинном пространстве и т. д. Симметрические римановы пространства впервые исследовал П. А. Широков [2]. Э. Картан показал, какую существенную роль играют симметрические пространства в теории полупростых групп Ли, им получена классификация римановых симметрических пространств и локальная классификация симметрических однородных пространств с простыми компактными основными группами. Найдена также классификация симметрических пространств с простыми некомпактными основными группами (см. [3], [4]). В [5] можно ознакомиться с понятиями канонической связности и естественной связности без кручения. Трехмерные редуктивные однородные пространства с неразрешимой группой преобразований, допускающие нормальные связности, изучались в работе [6]. В данной работе изучаются симметрические однородные пространства, на которых действует неразрешимая группа преобразований с неразрешимым стабилизатором.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа $\bar{G}$, $G=\bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x\in M$. Проблема классификации однородных пространств $(M,\bar{G})$ равносильна классификации пар групп Ли $(\bar{G},G)$, так как M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов $\bar{G}/G$ (см., например, [7]). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли $\bar{G}$, а $\mathfrak{g}$ – подалгебра, соответствующая подгруппе G. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра $\mathfrak{g}$ не содержит отличных от нуля идеалов $\bar{\mathfrak{g}}$. *Изотропное действие* группы G на касательном пространстве T_xM – это фактор-действие присоединенного действия G на $\bar{\mathfrak{g}}$: $s.(x+\mathfrak{g})=(Ads)(x)+\mathfrak{g}$ для всех $s\in G$, $x\in\bar{\mathfrak{g}}$. При этом алгебра $\mathfrak{g}$ действует на $T_xM=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ следующим образом: $x.(y+\mathfrak{g})=[x,y]+\mathfrak{g}$ для всех $x\in\mathfrak{g}$, $y\in\bar{\mathfrak{g}}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление $\mathfrak{g}$. Это означает, что естественное действие стабилизатора $\bar{G}_x$, $x\in M$ на T_xM имеет нулевое ядро.

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, а все отображение является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если $\bar{G}$ эффективна на $\bar{G}/G$ [5]. Инвариантные аффинные связности на однородном пространстве $(M,\bar{G})$ находятся во взаимно однозначном соответствии (см., например, [8]) с аффинными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Поскольку M = $\bar{G}/G$ редуктивно (а $\bar{G}$ транзитивна), для классификации симметрических пространств достаточно рассматривать только изотропно-точные пространства. Симметрическое пространство есть тройка $(\bar{G},\ G,\ \sigma)$, состоящая из связной группы Ли $\bar{G}$, замкнутой подгруппы G и инволютивного автоморфизма σ такого, что $\sigma(g) = s_o\circ g\circ s_o^{-1}$ для $g\in\ \bar{G}$, где s_o – симметрия для M в o. Пусть $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},\sigma)$ – симметрическая алгебра Ли. Поскольку σ инволютивно, то его собственными значениями являются 1 и –1, а $\mathfrak{g}$ – собственное подпространство для 1. Пусть $\mathfrak{m}$ – собственное подпространство для –1. Разложение $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$ называется *каноническим разложением* для $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},\sigma)$. Если $\bar{\mathfrak{g}}\ =\ \mathfrak{g}+\mathfrak{m}$ – каноническое разложение симметрической алгебры Ли $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g},\sigma)$, то $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}$. Поскольку тензоры кривизны и кручения инвариантны относительно действия группы Ли G, то они однозначно определяются тензорами на касательном пространстве к многообразию, причем эти тензоры инвариантны относительно изотропного действия. Тензоры кручения $T\in InvT_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R\in InvT_3^1(\mathfrak{m})$ для всех $x,y\in\bar{\mathfrak{g}}$ имеют вид

$$T(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}}-\Lambda(y)x_{\mathfrak{m}}-[x,y]_{\mathfrak{m}},\quad R(x_{\mathfrak{m}},y_{\mathfrak{m}})=[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y]).$$

Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к $\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m}=\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$.

Односвязное многообразие M с аффинной связностью такой, что $T=\nabla R\ =\ 0$, порождает симметрическое пространство $(\bar{G},\ G,\ \sigma)$ такое, что $M\ =\ \bar{G}/G$. Верно и обратное, если $(\bar{G},\ G,\ \sigma)$ – симметрическое пространство, то однородное пространство $\bar{G}/G$ допускает инвариантную аффинную связность с $T=\nabla R\ =\ 0$. Инвариантная связность, определяемая равенством $\Lambda|_{\mathfrak{m}}=0$, называется *канонической связностью* для $(\bar{G},\ G,\ \sigma)$ или $\bar{G}/G$ (относительно разложения $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}+\mathfrak{m}$), ее также называют *канонической связностью второго рода*. Поскольку для симметрического пространства $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{g}$, то каноническая связность совпадает с *естественной связностью без кручения* (единственной инвариантной аффинной связностью без кручения, имеющей те же геодезические, что и каноническая связность: $\Lambda_{\mathfrak{m}}(x)y=1/2[x,y]_{\mathfrak{m}}$, $x,y\in\mathfrak{m}$; ее также называют *канонической связностью первого рода*), и мы имеем $T=\nabla R\ =\ 0$. Если $(\bar{G},\ G,\ \sigma)$ – симметрическое пространство, то каноническая связность есть единственная аффинная связность на $M=\bar{G}/G$, которая инвариантна при действии симметрий для M.

Переформулируем теорему Вана об алгебре голономии инвариантной связности: *алгебра* Ли группы *голономии* связности $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ вида $V+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]+[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),[\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}),V]]+\ldots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x),\Lambda(y)]-\Lambda([x,y])\mid x,y\in\bar{\mathfrak{g}}\}$.

Основная часть

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1,\ldots,e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n=\dim\bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что подалгебра Ли $\mathfrak{g}$ порождается векторами $e_1,\ldots,e_{n-3}$, а $\{u_1=e_{n-2},u_2=e_{n-1},u_3=e_n\}$ – базис $\mathfrak{m}$. Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [9], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$. Поскольку ограничение $\Lambda:\bar{\mathfrak{g}}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ на $\mathfrak{g}$ – изотропное представление подалгебры, связность определяется своими значениями на $\mathfrak{m}$. Выпишем ее через образы базисных векторов $\Lambda(u_1)$, $\Lambda(u_2)$, $\Lambda(u_3)$, запишем тензор кривизны R его значениями $R(u_1,u_2)$, $R(u_1,u_3)$, $R(u_2,u_3)$, а тензор кручения T – его значениями $T(u_1,u_2)$, $T(u_2,u_3)$, $T(u_2,u_3)$.

Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *тривиальной*, если существует коммутативный идеал $\mathfrak{a}$ в алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$.

Теорема 1. Все трехмерные симметрические тривиальные однородные пространства, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеют вид $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, где $\mathfrak{g}$ (подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$) сопряжена только одной из следующих подалгебр:

$$3.3. \boxed{\begin{array}{ccc} x & y & \\ z & -x & \\ & & \end{array}}; 3.4. \boxed{\begin{array}{ccc} x & y & \\ z & & y \\ & z & -x \end{array}}; 3.5. \boxed{\begin{array}{ccc} & y & x \\ -y & & z \\ -x & -z & \end{array}};$$

$$4.1. \boxed{\begin{array}{ccc} x & z & \\ u & y & \\ & & \end{array}}; 4.2. \boxed{\begin{array}{ccc} \lambda x+y & z & \\ u & \lambda x-y & \\ & & x \end{array}}; 4.3. \boxed{\begin{array}{ccc} x+y & z & \\ u & x & z \\ & u & x-y \end{array}}; 4.5. \boxed{\begin{array}{ccc} x & z & y \\ -z & x & u \\ -y & -u & x \end{array}};$$

$$5.1. \boxed{\begin{array}{ccc} x & u & \\ v & y & \\ & & z \end{array}}; 5.2. \boxed{\begin{array}{ccc} x & u & v \\ z & -x & u \\ & & \end{array}}; 5.3. \boxed{\begin{array}{ccc} & u & v \\ & x & y \\ & z & -x \end{array}};$$

$$6.1. \boxed{\begin{array}{ccc} x & z & w \\ u & y & v \\ & & \end{array}}; 6.2. \boxed{\begin{array}{ccc} \lambda x+y & z & w \\ u & \lambda x-y & v \\ & & x \end{array}}; 6.3. \boxed{\begin{array}{ccc} & v & w \\ & x & z \\ & y & u \end{array}}; 6.4. \boxed{\begin{array}{ccc} x & v & w \\ & \lambda x+y & z \\ & u & \lambda x-y \end{array}};$$

$$7.1. \boxed{\begin{array}{ccc} x & u & t \\ v & y & w \\ & & z \end{array}}; 7.2. \boxed{\begin{array}{ccc} x & w & t \\ & y & u \\ & v & z \end{array}}; 8.1. \boxed{\begin{array}{ccc} x & z & v \\ w & y-x & u \\ t & s & -y \end{array}}.$$

Также при $\dim \mathfrak{g} = 9$ подалгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$. Здесь подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметра λ, не сопряжены друг другу, предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$, также предполагается, что переменные обозначены латинскими буквами и принадлежат $\mathbb{R}$. Базис подалгебры, по умолчанию, будем выбирать, придав одной из латинских переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Доказательство. Все тривиальные однородные пространства являются симметрическими. Все неразрешимые подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ (см. [9]) выписаны в теореме.

Теорема 2. Все трехмерные симметрические нетривиальные однородные пространства, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$ неразрешимы, локально имеют следующий вид:

3.4.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	e_2	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$
u_3	u_3	$-u_2$	0	e_1	e_3	0

,

3.4.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2
e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1
u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3
u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.5.2	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	e_2	e_1
u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0	e_3
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_1$	$-e_3$	0

,

3.5.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	0	u_1
e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1	0
e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$	u_2
u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$	$-e_1$
u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0	$-e_3$
u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_1	e_3	0

,

5.2.2	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	e_4+u_1
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	e_5+u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-u_1$
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	$-u_2$
u_3	0	0	0	$-e_4-u_1$	$-e_5-u_2$	u_1	u_2	0

,

5.2.3	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	e_4	$-e_5$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	e_4	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	u_2	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_4$
u_2	u_2	$-u_1$	0	0	0	0	0	$-e_5$
u_3	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_4	e_5	0

,

6.1.2.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	e_5
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	e_6
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	$-e_5$	$-e_6$	0

,

6.1.3.	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$2e_2$	$-2e_3$	0	e_5	$-e_6$	u_1	$-u_2$	0
e_2	$-2e_2$	0	e_1	0	0	e_5	0	u_1	0
e_3	$2e_3$	$-e_1$	0	0	e_6	0	u_2	0	0
e_4	0	0	0	0	e_5	e_6	u_1	u_2	0
e_5	$-e_5$	0	$-e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	u_1
e_6	e_6	$-e_5$	0	$-e_6$	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0	$-e_5$
u_2	u_2	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0	0	$-e_6$
u_3	0	0	0	0	$-u_1$	$-u_2$	e_5	e_6	0

.

Замечание. В случае 5.2.2 базис $\mathfrak{m}$ в каноническом разложении имеет вид $\{u_1+e_4, u_2+e_5, u_3\}$, в остальных случаях – стандартный базис $\{u_1, u_2, u_3\}$. Далее используется базис канонического разложения. Если на параметры, появляющиеся в процессе классификации, накладываются некоторые дополнительные условия, то они записаны сразу после таблицы умножения. В противном случае предполагается, что параметры пробегают все $\mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала найдены все трехмерные изотропно-точные пары. Для этого классифицированы подалгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ с точностью до сопряженности, а далее найдены (с точностью до эквивалентности) все пары ($\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}$); такие пары $codim_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} = 3$ выписаны в [9]. Из них выбраны симметрические пары с неразрешимыми алгебрами $\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{g}$, т. е. те, для которых $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = \mathbf{0}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ – неразрешимая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$ такая, что пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ нетривиальная симметрическая, а $\bar{\mathfrak{g}}$ неразрешима, то $\mathfrak{g}$ сопряжена одной и только одной из подалгебр 3.4, 3.5, 5.2, 6.1. Для каждой такой подалгебры найдем изотропно-точные пары.

Рассмотрим, например, пару ($\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}$) типа 3.4. Пусть $\mathfrak{h}$ (нильпотентная подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$) порождена вектором

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix},$$

$\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_3\oplus\mathbb{R}u_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_3\oplus\mathbb{R}u_3$, $[u_1,u_2]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})$, $[u_1,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})$, $[u_2,u_3]\in\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})$, тогда $[u_1,u_2]=a_2e_2+\alpha_1u_1$, $[u_1,u_3]=b_1e_1+\beta_2u_2$, $[u_2,u_3]=c_3e_3+\gamma_3u_3$. Использовав тождество Якоби, получим, что $[u_1,u_3]=-a_2e_1+\alpha_1u_2$, $[u_2,u_3]=-a_2e_3+\alpha_1u_3$. Положим $p=a_2+\alpha_1^2/4$. Рассмотрим следующие случаи:

1° $p=0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре при помощи отображения $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_1\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,3}$, $\pi(u_1)=u_1-(\alpha_1/2)e_2$, $\pi(u_3)=u_3+(\alpha_1/2)e_3$. $\pi(u_3)=u_3+(\alpha_1/2)e_3$.

2° $p>0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.4.2 посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i, i=\overline{1,3}$, $\pi(u_1)=p^{-1/2}(u_1-(\alpha_1/2)e_2)$, $\pi(u_2)=p^{-1/2}(u_2+(\alpha_1/2)e_1)$, $\pi(u_3)=p^{-1/2}(u_3+(\alpha_1/2)e_3)$.

3° $p<0$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 3.4.3 показывается при помощи $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_3\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i, i=\overline{1,3}$, $\pi(u_1)=(-p)^{1/2}(u_1-(\alpha_1/2)e_2)$, $\pi(u_2)=(-p)^{-1/2}(u_2+(\alpha_1/2)e_1)$, $\pi(u_3)=(-p)^{-1/2}(u_3+(\alpha_1/2)e_3)$.

Поскольку $\dim\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1)\neq\dim\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_2)$ и $\dim\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1)\neq\dim\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_3)$, пара $(\bar{\mathfrak{g}}_1,\mathfrak{g}_1)$ не эквивалентна паре $(\bar{\mathfrak{g}}_2,\mathfrak{g}_2)$ и паре $(\bar{\mathfrak{g}}_3,\mathfrak{g}_3)$. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}_3$ – простая алгебра Ли ($\bar{\mathfrak{g}}_3\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\times\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$), пары $(\bar{\mathfrak{g}}_2,\mathfrak{g}_2)$ и $(\bar{\mathfrak{g}}_3,\mathfrak{g}_3)$ не эквивалентны.

Рассмотрим пару типа 3.5. В силу тождества Якоби (с учетом того, что $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли) $[u_1,u_2]=a_2e_2+\alpha_3u_3$, $[u_1,u_3]=a_2e_1-\alpha_3u_2$, $[u_2,u_3]=a_2e_3+\alpha_3u_1$. Положим $p=\left|a_2-\alpha_3^2/4\right|^{-1/2}$ при $a_2\neq\alpha_3^2/4$.

1° $4a_2=\alpha_3^2$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_1\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,3}$, $\pi(u_1)=u_1+(\alpha_3/2)e_3$, $\pi(u_2)=u_2-(\alpha_3/2)e_1$, $\pi(u_3)=u_3+(\alpha_3/2)e_2$.

2° $4a_2>\alpha_3^2$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна паре 3.5.2 при помощи отображения $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,3}$, $\pi(u_1)=p(u_1+(\alpha_3/2)e_3)$, $\pi(u_2)=p(u_2-(\alpha_3/2)e_1)$, $\pi(u_3)=p(u_3+(\alpha_3/2)e_2)$.

3° $4a_2<\alpha_3^2$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 3.5.3 определяется посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_3\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,3}$, $\pi(u_1)=p(u_1+(\alpha_3/2)e_3)$, $\pi(u_2)=p(u_2-(\alpha_3/2)e_1)$, $\pi(u_3)=p(u_3+(\alpha_3/2)e_2)$.

Поскольку $\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_1)\neq\{0\}$ и $\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_2)=\mathfrak{r}(\bar{\mathfrak{g}}_3)=\{0\}$, ни одна из пар 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентна тривиальной паре. Заметим, что алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_2$ проста ($\bar{\mathfrak{g}}_2\cong\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$), а алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}_3$ не проста ($\bar{\mathfrak{g}}_3\cong\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)$). Отсюда следует, что пары 3.5.2 и 3.5.3 не эквивалентны.

Рассмотрим теперь случай 5.2. Разложение Леви $\mathfrak{g}$ имеет вид $\{\{-e_5,e_4\},\ \{2e_2,-2e_3-2e_5,e_1+e_4\}\}$, $\mathfrak{h}$ порождена e_1. Так как $\bar{\mathfrak{g}}=\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})\oplus\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})$, где $\bar{\mathfrak{g}}^{(-2)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(-1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_5\oplus\mathbb{R}u_2$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(0)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_1\oplus\mathbb{R}u_3$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(1)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_4\oplus\mathbb{R}u_1$, $\bar{\mathfrak{g}}^{(2)}(\mathfrak{h})=\mathbb{R}e_2$, имеем $[u_1,u_2]=a_1e_1+\alpha_3u_3$, $[u_1,u_3]=b_4e_4+\beta_1u_1$, $[u_2,u_3]=c_5e_5+\gamma_2u_2$. Использовав тождество Якоби, определим, что $[u_1,u_2]=0$, $[u_1,u_3]=\alpha e_4+\beta u_1$, $[u_2,u_3]=\alpha e_5+\beta u_2$. 1° $\alpha=\beta=0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ эквивалентна тривиальной паре.

2° $\beta^2+4\alpha\geq0$. Пара эквивалентна 5.2.2 посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}$, $\pi(e_1)=e_1$, $\pi(u_1)=e_4+u_1$, $\pi(e_2)=e_2$, $\pi(u_2)=e_5+u_2$, $\pi(e_3)=e_3$, $\pi(u_3)=\lambda u_3$, $\pi(e_4)=\lambda e_4$, $\pi(e_5)=\lambda e_5$, а $\lambda=(\beta\pm\sqrt{\beta^2+4\alpha})/2\neq0$. Полученная пара является редуктивной, но не является симметрической при $\lambda\neq-1$, при $\lambda=-1$ пара симметрическая, разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ – $\{\{-2e_4,-2u_1,u_3,-2u_2,-2e_5\},\{-4e_1+2e_5-4e_2-2e_4,-4e_3\}\}$.

3° $\beta^2+4\alpha<0$. Эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g})$ и 5.2.3 показывает $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_3\to\mathfrak{g}$, $\pi(e_1)=e_1$, $\pi(u_1)=u_1+(\beta\lambda/2)e_4$, $\pi(e_2)=e_2$, $\pi(u_2)=u_2+(\beta\lambda/2)e_5$, $\pi(e_3)=e_3$, $\pi(u_3)=\lambda^{-1}u_3$, $\pi(e_4)=\lambda e_4$, $\pi(e_5)=\lambda e_5$, а $\lambda=2/\sqrt{-\beta^2-4\alpha}$. Полученная пара не является симметрической при $\lambda\neq0$, при $\lambda=0$ пара симметрическая, разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ – $\{\{u_3,-2u_2,-2u_1,-2e_5,-2e_4\},\ \{-4e_1+2e_5,-4e_2-2e_4,-4e_3\}\}$.

Пусть $\mathfrak{r}_i$ – радикал $\bar{\mathfrak{g}}_i$ для $i=\overline{1,3}$. Рассмотрим $f_i:\bar{\mathfrak{g}}_i\to\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$, где $f_i(x)$ – матрица $ad_{\bar{\mathfrak{r}}_i}x$ в базисе $\{e_4,e_5,u_1,u_2\}$ пространства $\bar{\mathfrak{r}}_i$, $x\in\bar{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку $f_i(\bar{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, пары не эквивалентны.

Рассмотрим случай 6.1, тогда разложение Леви $\mathfrak{g}$ – $\{\{-2e_5, e_4, -2e_6\}, \{-4e_1+2e_6, -4e_2-2e_5, -4e_3\}\}$, а $[u_1,u_2]=0, [u_1,u_3]=b_5e_5+\beta_1u_1, [u_2,u_3]=c_6e_6+\gamma_2u_2$. Использовав тождество Якоби, определим, что $[u_2,u_3]=b_5e_6+\beta_1u_2$. Отображение $\pi:\bar{\mathfrak{g}}'\to\bar{\mathfrak{g}}$ $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,6}$, $\pi(u_1)=u_1+(\beta_1/2)e_5$, $\pi(u_2)=u_2+(\beta_1/2)e_6$, $\pi(u_3)=u_3-(\beta_1/2)e_4$, установит эквивалентность тривиальной пары и пары $(\bar{\mathfrak{g}}',\mathfrak{g}')$. При $b_5=0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}',\mathfrak{g}')$ эквивалентна тривиальной паре. При $b_5>0$ эквивалентность пар $(\bar{\mathfrak{g}}',\mathfrak{g}')$ и 6.1.2 определяется при помощи $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}'$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,6}$, $\pi(u_j)=\sqrt{b_5}u_j$, $j=\overline{1,3}$. При $b_5<0$ пара $(\bar{\mathfrak{g}}',\mathfrak{g}')$ эквивалентна паре 6.1.3 посредством $\pi:\bar{\mathfrak{g}}_2\to\bar{\mathfrak{g}}'$, $\pi(e_i)=e_i$, $i=\overline{1,6}$, $\pi(u_j)=\sqrt{-b_5}u_j$, $j=\overline{1,3}$. Обозначим $\mathfrak{a}_i$ радикал $D\bar{\mathfrak{g}}_i$, $i=\overline{1,3}$. Рассмотрим $f_i:\bar{\mathfrak{g}}_i\to\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$, где $ad_{\mathfrak{a}_i}x$ – матрица $ad_{\mathfrak{a}_i}x$ в базисе $\{e_6,e_6,u_1,u_2\}$, $x\in\bar{\mathfrak{g}}_i$. Поскольку $f_i(\bar{\mathfrak{g}}_i)$ не сопряжены, пары $(\bar{\mathfrak{g}}_i,\mathfrak{g}_i)$, $i=\overline{1,3}$, не эквивалентны друг другу. Разложение Леви $\bar{\mathfrak{g}}$ в случае 6.1.2 имеет вид $\{\{e_4,-2u_2,-2e_6,-2u_1,-2e_5,u_3\}, \{-4e_1+2e_6,-4e_2-2e_5,-4e_3\}\}$, а в случае 6.1.3 – $\{\{-2u_2,-2u_1,-2e_6,-2e_5,u_3,e_4\}, \{-4e_1+2e_6,-4e_2-2e_5,-4e_3\}\}$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Для найденных пар выписываем аффинные связности, тензоры кривизны и кручения, алгебры голономии, находим канонические связности, а также естественные связности без кручения. Прямыми вычислениями получаем, что аффинная связность имеет вид:

Пара	Аффинная связность
3.4.2, 3.4.3	$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2} & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-p_{1,2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -p_{1,2} & 0 & 0\\ 0 & -p_{1,2} & 0\end{pmatrix}$
3.5.2, 3.5.3	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{2,3}\\ 0 & -p_{2,3} & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & -p_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\\ p_{2,3} & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & p_{2,3} & 0\\ -p_{2,3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
6.1.2,6.1.3	$\begin{pmatrix}0 & 0 & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}r_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & r_{1,1} & 0\\ 0 & 0 & r_{1,1}+p_{1,3}\end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix}0 & 0 & q_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}r_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & r_{1,1} & 0\\ 0 & 0 & r_{1,1}+q_{2,3}+1\end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix}0 & 0 & q_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_{2,3}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}r_{1,1} & 0 & 0\\ 0 & r_{1,1} & 0\\ 0 & 0 & r_{1,1}+q_{2,3}\end{pmatrix}$

Тензоры кривизны и кручения на симметрических пространствах:

Пара	Тензор кривизны
3.4.2	$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}{}^2-1 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}{}^2-1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-p_{1,2}{}^2+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}{}^2-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -p_{1,2}{}^2+1 & 0 & 0\\ 0 & -p_{1,2}{}^2+1 & 0\end{pmatrix}$
3.4.3	$\begin{pmatrix}0 & p_{1,2}{}^2+1 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}{}^2+1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-p_{1,2}{}^2-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,2}{}^2+1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -p_{1,2}{}^2-1 & 0 & 0\\ 0 & -p_{1,2}{}^2-1 & 0\end{pmatrix}$
3.5.2	$\begin{pmatrix}0 & -p_{2,3}{}^2-1 & 0\\ p_{2,3}{}^2+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & -p_{2,3}{}^2-1\\ 0 & 0 & 0\\ p_{2,3}{}^2+1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -p_{2,3}{}^2-1\\ 0 & p_{2,3}{}^2+1 & 0\end{pmatrix}$
3.5.3	$\begin{pmatrix}0 & -p_{2,3}{}^2+1 & 0\\ p_{2,3}{}^2-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & -p_{2,3}{}^2+1\\ 0 & 0 & 0\\ p_{2,3}{}^2-1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -p_{2,3}{}^2+1\\ 0 & p_{2,3}{}^2-1 & 0\end{pmatrix}$
6.1.2	$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & p_{1,3}{}^2-1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & p_{1,3}{}^2-1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Пара	Тензор кривизны
6.1.3	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&p_{1,3}{}^2+1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&p_{1,3}{}^2+1\\0&0&0\end{pmatrix}$
5.2.2	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{2,3}{}^2+2q_{2,3}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&q_{2,3}{}^2+2q_{2,3}\\0&0&0\end{pmatrix}$
5.2.3	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&q_{2,3}{}^2+1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&q_{2,3}{}^2+1\\0&0&0\end{pmatrix}$

Пара	Тензор кручения
3.4.2	$(2p_{1,2},0,0),(0,2p_{1,2},0),(0,0,2p_{1,2})$
3.4.3	$(2p_{1,2},0,0),(0,2p_{1,2},0),(0,0,2p_{1,2})$
3.5.2	$(0,0,-2p_{2,3}),(0,2p_{2,3},0),(-2p_{2,3},0,0)$
3.5.3	$(0,0,-2p_{2,3}),(0,2p_{2,3},0),(-2p_{2,3},0,0)$
6.1.2	$(0,0,0),(-p_{1,3}+r_{1,1},0,0),(0,-p_{1,3}+r_{1,1},0)$
6.1.3	$(0,0,0),(-p_{1,3}+r_{1,1},0,0),(0,-p_{1,3}+r_{1,1},0)$
5.2.2	$(0,0,0),(q_{2,3}-r_{1,1}+1,0,0),(0,q_{2,3}-r_{1,1}+1,0)$
5.2.3	$(0,0,0),(q_{2,3}-r_{1,1},0,0),(0,q_{2,3}-r_{1,1},0)$

Алгебры голономии указанных связностей имеют вид:

Пара	Алгебра голономии		Пара	Алгебра голономии
3.4.2	$p_{1,2}{}^2\neq 1$	$\begin{pmatrix}p_2&p_1&0\\p_3&0&p_1\\0&p_3&-p_2\end{pmatrix}$	3.4.3	$\begin{pmatrix}p_2&p_1&0\\p_3&0&p_1\\0&p_3&-p_2\end{pmatrix}$
	$p_{1,2}{}^2=1$	нулевая		
3.5.3	$p_{2,3}{}^2\neq 1$	$\begin{pmatrix}0&-p_1&-p_2\\p_1&0&-p_3\\p_2&p_3&0\end{pmatrix}$	3.5.2	$\begin{pmatrix}0&-p_1&-p_2\\p_1&0&-p_3\\p_2&p_3&0\end{pmatrix}$
	$p_{2,3}{}^2=1$	нулевая		

Пара	Алгебра голономии		Пара	Алгебра голономии	
6.1.2	$p_{1,3}{}^2\neq 1$	$\mathfrak{p}$	5.2.2	$q_{2,3}\neq 0,-2$	$\mathfrak{p}$
	$p_{1,3}{}^2=1$	нулевая		$q_{2,3}=0,-2$	нулевая
6.1.3		$\mathfrak{p}$	5.2.3		$\mathfrak{p}$

Здесь $\mathfrak{p}=\begin{pmatrix}0&0&p_1\\0&0&p_2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Связность является канонической, если $\Lambda(u_1)=\Lambda(u_2)=\Lambda(u_3)=0$. Выпишем, при каких условиях связность имеет те же геодезические, что и каноническая:

3.4.2, 3.4.3	p_{12} - любое
3.5.2, 3.5.3	p_{23} - любое
5.2.2, 5.2.3	$r_{11}=-q_{23}$
6.1.2, 6.1.3	$r_{11}=-p_{13}$

Связность является естественной связностью без кручения, если все параметры нулевые.

Заключение

Таким образом, найдены инвариантные аффинные связности на трехмерных симметрических однородных пространствах с неразрешимой группой преобразований и неразрешимым стабилизатором вместе с их тензорами кривизны и кручения, алгебрами голономии, выписаны канонические связности, а также естественные связности без кручения. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, при изучении пространств с аффинной связностью, а также могут найти приложения в теории относительности, которая с математической точки зрения базируется на геометрии искривленных пространств, в ядерной физике, физике элементарных частиц и др.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Картан, Э.*** Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – Москва : Москов. ун-т, 1960. – 307 с.
2. ***Широков, П. А.*** Симметрические пространства первого класса / П. А. Широков // Избранные работы по геометрии. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1966. – С. 366–383.
3. ***Картан, Э.*** Геометрия групп Ли и симметрические пространства / Э. Картан // Сборник работ. – Москва, 1949. – 384 с.
4. ***Хелгасон, С.*** Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – Москва, 1964. – 608 с.
5. ***Кобаяси, Ш.*** Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – Москва : Наука, 1981. – Т. 2.
6. ***Можей, Н. П*** Трехмерные редуктивные пространства неразрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2017. – Т. 61, № 1. – С. 7–17.
7. ***Онищик, А. Л.*** Топология транзитивных групп Ли преобразований/ А. Л. Онищик. – Москва : Физ.-мат. лит., 1995. – 384 с.
8. ***Nomizu, K.*** Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76, no. 1. – P. 33–65.
9. ***Можей, Н. П.*** Трехмерные изотропно-точные однородные пространства и связности на них/ Н. П. Можей. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 394 с.

Поступила в редакцию 08.03.2017 г.
Контакты mozheynatalya@mail.ru (Можей Наталья Павловна)

Mozhey N. SYMMETRIC HOMOGENEOUS SPACES OF UNSOLVABLE LIE GROUPS AND CONNECTIONS ON THEM.

The purpose of the article is to classify three-dimensional symmetric homogeneous spaces, to describe all invariant affine connections on those spaces together with their curvature and torsion tensors, holonomy algebras, canonical connections and natural torsion-free connections. The case of the unsolvable Lie group of transformations with an unsolvable stabilizer is considered. The local classification of homogeneous spaces is equivalent to the description of the effective pairs of Lie algebras. The studies are based on the use of properties of Lie algebras, Lie groups and homogeneous spaces and they mainly have local character The peculiarity of techniques presented in the work is the application of purely algebraic approach, as well as the combination of methods of differential geometry, the theory of Lie groups and algebras and the theory of homogeneous spaces.

Keywords: canonical connection, transformation group, symmetric space, holonomy algebra.